

# UTILIZATION OF THE THEORY OF RECIPROCAL AND ANTIRECIPROCAL EQUATIONS FOR ANALYSIS OF DISCRETE-TIME LINEAR-PHASE FIR FILTERS

## VYUŽITÍ TEORIE RECIPROKÝCH A ANTIRECIPROKÝCH ROVNIC K ANALÝZE DISKRÉTNÍCH FILTRŮ FIR S LINEÁRNÍ FÁZÍ

Viera Biolková\*), Dalibor Biolek\*\*)

\*) ÚREL FEI VUT Brno, Purkyňova 118, 612 00 Brno, email biolkova@urel.fee.vutbr.cz

\*\*\*) K301 VA Brno, Kounicova 65, PS 13, 612 00 Brno, email biolek@cs.vabo.cz

**Abstract:** Several algebraic propositions from the theory of reciprocal and antireciprocal equations are conceived in this contribution. Applying them to the  $z$ -domain system functions of discrete-time FIR filters with the symmetrical and antisymmetrical impulse responses yields basic conditions and rules which have to be fulfilled to reach principally linear phase of filters with prescribed frequency responses.

### Úvod

Algebraickou rovnicí

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

pro jejíž koeficienty  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) platí vztah

$$a_k = a_{n-k}, \text{ resp. } a_k = -a_{n-k} \quad (2)$$

nazýváme reciprokou, resp. antireciprokou a značíme stručně  $R(x) = 0$ , resp.  $r(x) = 0$  [1].

Uvažujme systémovou funkci diskrétního filtru FIR  $n$ -tého řádu

$$K(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}}{z^n}. \quad (3)$$

Na koeficienty filtru budeme klást jedině omezení, které je podmínkou lineární fáze, a to je symetrie, resp. antisymetrie impulsní charakteristiky [1], což je popsáno vztahy (2).

Filtr s vlastnostmi (2) budeme stručně označovat jako filtr symetrický, resp. antisymetrický.

Z (3) plyne známý fakt, že filtr FIR  $n$ -tého řádu má  $n$ -násobný nulový pól a  $n$  nulových bodů. Řešení nulových bodů takového filtru pak lze převést na výpočet kořenů reciproké, resp. antireciproké algebraické rovnice. Pro kořeny těchto rovnic je v algebře formulováno několik zajímavých vět. Jejich postupnou aplikací ukážeme na některé podmínky, které musí splňovat diskrétní filtry typu DD, HP, PP a PZ, aby vykazovaly lineární fázovou charakteristiku.

## Některé věty algebry

Věta 1:

*Antireciproká rovnice  $r(x) = 0$  stupně  $n \geq 2$  má vždy kořen  $x = 1$ . Přitom platí*

$$r(x) = (x-1)R(x) = 0$$

*kde  $R(x) = 0$  je reciproká rovnice stupně  $n - 1$ .*

*Dodatek autorů: Antireciproká rovnice stupně  $n = 1$  má rovněž kořen  $x = 1$ . Popsaný rozklad na reciprokou rovnici však v tomto případě neplatí.*

Věta 2:

*Reciproká rovnice  $R(x) = 0$  lichého stupně  $n = 2k+1$  má vždy kořen  $x = -1$ . Přitom platí*

$$R(x) = (x+1)R_1(x)$$

*kde  $R_1(x) = 0$  je reciproká rovnice stupně  $2k$ .*

Věta 3:

*Každá reciproká i antireciproká rovnice má s každým kořenem  $x$  zároveň kořen  $1/x$ .*

*Dodatek autorů: Věta neplatí pro kořeny  $x = \pm 1$ .*

Kromě uvedených vět převzatých z [1] doplníme i některé vlastní:

Věta 4:

*Každá reciproká (antireciproká) rovnice stupně  $n$  vynásobená kořenovým součinitelem  $(x+1)$  vede na reciprokou (antireciprokou) rovnici stupně  $n+1$ .*

Věta 5:

*Každá reciproká (antireciproká) rovnice stupně  $n$  vynásobená kořenovým součinitelem  $(x-1)$  vede na antireciprokou (reciprokou) rovnici stupně  $n+1$ .*

Věta 6:

*Každá reciproká (antireciproká) rovnice stupně  $n$  vynásobená kořenovými součiniteli  $(x-a)(x-1/a)$  vede na reciprokou (antireciprokou) rovnici stupně  $n+2$ . Koeficienty výsledné rovnice budou reálné za předpokladu, že  $a$  je buď reálné číslo, nebo komplexní číslo s modulem rovným jedné.*

Věta 7:

*Každá reciproká (antireciproká) rovnice stupně  $n$  vynásobená kořenovými součiniteli  $(x-a)(x-1/a)(x-a^*)(x-1/a^*)$  vede na reciprokou (antireciprokou) rovnici stupně  $n+4$ . Koeficienty výsledné rovnice jsou reálné. Zde  $a$  je obecné komplexní číslo a  $a^*$  číslo k němu komplexně sdružené.*

## Důsledky vět pro diskrétní filtry FIR

Nejprve připomeňme známé souvislosti mezi koeficienty, resp. nulovými body systémové funkce  $K(z)$  (3) filtru FIR a jeho amplitudovou kmitočtovou charakteristikou  $K(\omega)$ :

Přenos filtru na nízkých kmitočtech získáme dosazením  $z = 1$  do systémové funkce:

$$K_0 = K(\omega) \Big|_{\omega=0} = K(z) \Big|_{z=1}$$

Přenos filtru na polovině vzorkovacího kmitočtu  $\omega_{\nu}/2$  získáme dosazením  $z = -1$  do systémové funkce:

$$K_{1/2} = K(\omega) \Big|_{\omega=\omega_{\nu}/2} = K(z) \Big|_{z=-1}$$

Přenos filtru na obecném kmitočtu  $\omega_0$  získáme ze systémové funkce podle předpisu

$$K_{\omega_0} = K(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} = K(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0 T}}, T = \frac{2\pi}{\omega_V}$$

Filtr, pro nějž platí  $K_0 = 0$  ( $K_0 \neq 0$ ) nazvěme AC filtr (DC filtr).

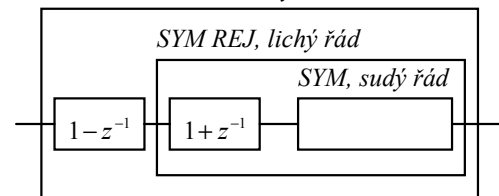
Filtr, pro nějž platí  $K_{1/2} = 0$  nazvěme rejekční filtr (filtr s nulou přenosu na polovině vzorkovacího kmitočtu).

Filtr, pro nějž platí  $K_{\omega_0} = 0$  pro  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_V/2$  nazvěme filtr s nulou přenosu (na kmitočtu  $\omega_0$ ).

Důsledek věty 1:

Každý antisymetrický filtr má vždy nulový bod  $z = 1$  a je tedy současně AC filtrem. V případě řádu  $n > 1$  je možné tento nulový bod separovat, čímž vznikne symetrický filtr řádu  $n-1$ .

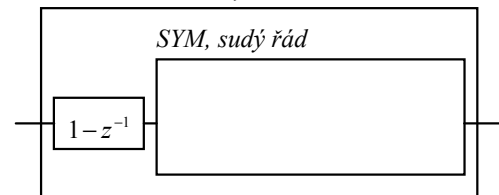
ANTISYM AC REJ, sudý řád



Důsledek věty 2:

Každý symetrický filtr lichého řádu  $n = 2k+1$  má vždy nulový bod  $z=-1$ , je tedy automaticky rejekčním filtrem. V případě řádu  $n > 1$  je možné tento nulový bod separovat, čímž vznikne symetrický filtr řádu  $2k$ .

ANTISYM AC, lichý řád



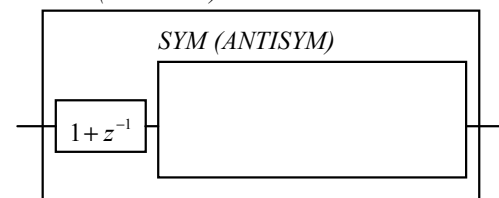
Důsledek věty 3:

Má-li libovolný symetrický či antisymetrický filtr nulový bod  $z \neq \pm 1$ , pak má současně i nulový bod  $1/z$  a příslušné nulové body komplexně sdružené.

Důsledek věty 4:

Rozšířením každého symetrického (antisymetrického) filtru řádu  $n$  o libovolný počet  $r$  nulových bodů  $z = -1$  vznikne vždy symetrický (asymetrický) rejekční filtr řádu  $n+r$ .

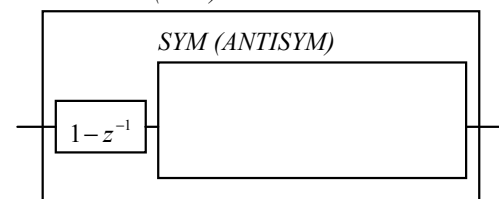
SYM (ANTISYM) REJ



Důsledek věty 5:

Rozšířením každého symetrického (antisymetrického) filtru řádu  $n$  o libovolný počet  $r$  nulových bodů  $z = 1$  vznikne DC filtr řádu  $n+r$ . V případě sudého počtu přídavných nulových bodů bude výsledný filtr symetrický (antisymetrický), v případě lichého počtu bude antisymetrický (symetrický).

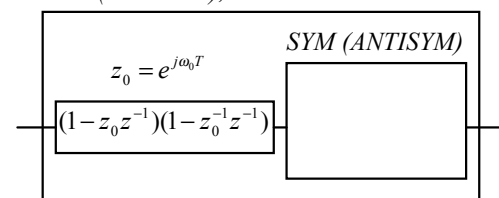
ANTISYM (SYM) AC



Důsledek věty 6:

Rozšířením každého symetrického (antisymetrického) filtru řádu  $n$  o dvojici nulových bodů  $\exp(j\omega_0 T)$ ,  $\exp(-j\omega_0 T)$  vznikne symetrický (asymetrický) filtr řádu  $n+2$  s nulou přenosu na kmitočtu  $\omega_0$ .

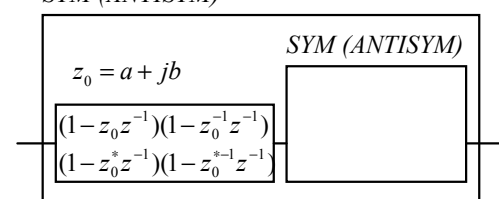
SYM (ANTISYM), NULA PŘENOSU na  $\omega_0$



Důsledek věty 7:

Rozšířením každého symetrického (antisymetrického) filtru řádu  $n$  o čtveřici nulových bodů  $a+jb$ ,  $a-jb$ ,  $1/(a+jb)$ ,  $1/(a-jb)$  vznikne symetrický (antisymetrický) filtr řádu  $n+4$ . Pro modul kořenů rovný jedné se bude jednat o filtr s nulou přenosu.

SYM (ANTISYM)



V tabulce 1 jsou shrnuty některé výše uvedené poznatky. Je zřejmé, že pomocí symetrického filtru je principiálně možné realizovat všechny známé průběhy kmitočtové charakteristiky, zatímco pomocí filtru antisymetrického lze dosáhnout pouze realizace rejekční pásmové propusti (pro sudé i liché řády) a rejekční dolní propusti (pouze pro liché řády).

typ filtru	symetrický filtr		antisymetrický filtr	
	řád sudý i lichý		řád sudý	řád lichý
DP	ano	ne	ne	
DP rejekční			ano	
HP			ne	
PP			ne	
PP rejekční			ano	
PZ			ne	

Tab. 1. Přehled možností realizace různých typů FIR filtrů s lineární fází symetrickými a antisymetrickými strukturami.

### Příklad

Uvažujme antisymetrický rejekční AC filtr 10.řádu o koeficientech  
 $[7.20396e-3 \ 2.19314e-2 \ 5.29020e-2 \ 7.93358e-2 \ 5.88771e-2 \ 0 \ -5.88771e-2 \ -7.93358e-2 \ -5.29020e-2 \ -2.19314e-2 \ -7.20396e-3]$ .

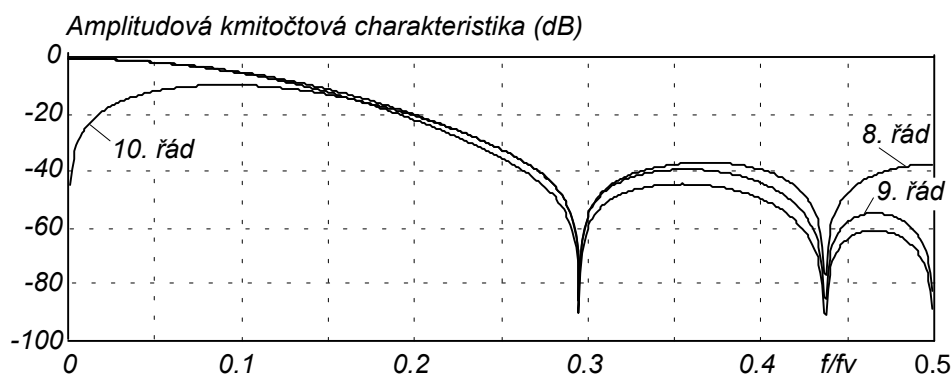
Filtr má nulový bod  $z = 1$  (důsledek věty 1). Po jeho separaci získáme koeficienty symetrického DC rejekčního filtru 9. řádu:

$[7.20396e-3 \ 2.91353e-2 \ 8.20373e-2 \ 1.61373e-1 \ 2.20250e-1 \ 2.20250e-1 \ 1.61373e-1 \ 8.20373e-2 \ 2.91353e-2 \ 7.20396e-3]$ .

Každý symetrický filtr lichého řádu má nulový bod  $z = -1$  (důsledek věty 2). Jeho separaci získáme koeficienty symetrického DC filtru 8. řádu:

$[1.44079e-2 \ 4.38628e-2 \ 1.20212e-1 \ 2.02534e-1 \ 2.37966e-1 \ 2.02534e-1 \ 1.20212e-1 \ 4.38628e-2 \ 1.44079e-2]$ .

Všechny filtry vykazují lineární fázovou kmitočtovou charakteristiku. Amplitudové charakteristiky jsou srovnány na obrázku.



Tato práce vznikla za podpory Grantové agentury ČR v rámci řešení projektu č. 102/98/P204.

### Literatura:

- [1] ŠKRÁŠEK, J.-TICHÝ, Z.: Základy aplikované matematiky I. SNTL, Praha 1983.
- [2] ER, M.H. et al.: FIR Filters. Chapter 82 of the book Circuits and Filter Handbook, CRC Press, 1995, pp. 2525-2530.