

3. AMPLITUDOVĚ MODULOVANÉ SIGNÁLY

Modulací nazýváme proces při kterém je jedním signálem přetvářen jiný signál za účelem přenosu informace.

Při amplitudové modulaci dochází k ovlivňování amplitudy nosného signálu, který můžeme zapsat ve tvaru $s_0(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + j_0)$, signálem modulačním $s_m(t)$, viz obr.3.1. S_0 je amplituda, ω_0 je úhlový kmitočet a j_0 je počáteční fáze. Při modulaci jsou kladeny na modulační funkci $s_m(t)$ tyto požadavky:

1. Její spektrum $S_m(\omega)$ je omezeno na pásmo úhlových kmitočetů $\omega \in [\omega_m, \omega_m]$.
2. $s_m(t)$ je normovaná funkce, neboli pro každé t je $|s_m(t)| \leq 1$.

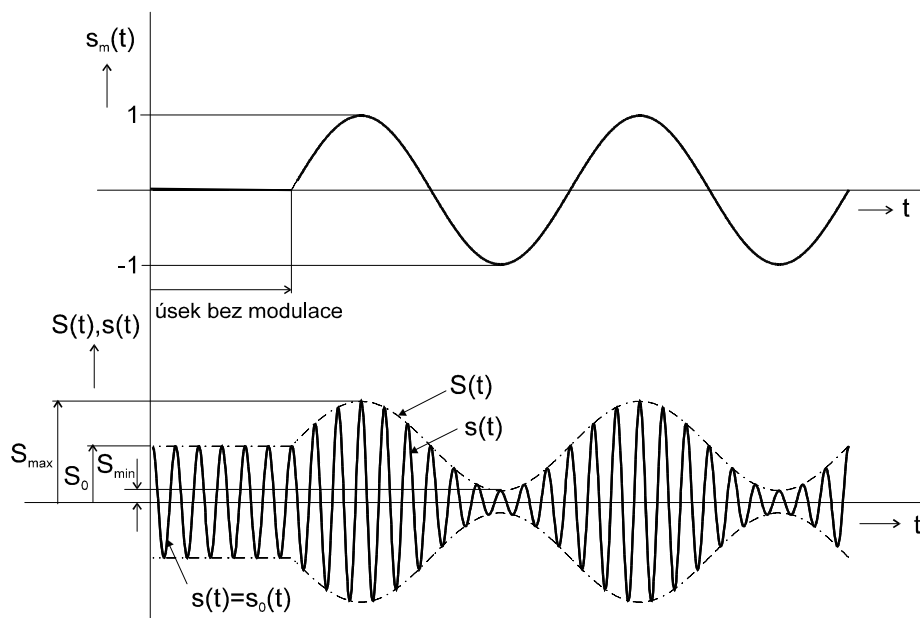
U amplitudové modulace je zpravidla $\omega_m \ll \omega_0$.

Pro okamžitou amplitudu $S(t)$ platí:

$$S(t) = S_0 + S_0 m s_m(t). \quad (3.1)$$

„Stejnoseměrné posunutí“ o S_0 je nutné proto, aby okamžitá amplituda $S(t)$ neměnila znaménko, což by vedlo k ovlivňování fáze modulovaného signálu $s(t)$. Konstanta m nazývaná *modulačním činitelem* určuje do jaké míry bude docházet k ovlivnění amplitudy a musí při dodržení požadavku 2 (viz výše) splňovat podmínku $m \in (0,1)$. Je-li m vyjádřeno v procentech mluvíme o *hloubce modulace*. Výsledný amplitudově modulovaný signál je dán vztahem:

$$s(t) = S_0(1 + m s_m(t)) \cos(\omega_0 t + j_0) \quad (3.2)$$



Obr.3.1. Časové průběhy při amplitudové modulaci harmonickým signálem, $m = 0,8$.

Spektra amplitudově modulovaných signálů budou ukázány u jednotlivých příkladů.

Tento typ amplitudové modulace je jedním z nejstarších typů modulace vůbec. Její hlavní výhodou a důvodem zavedení je možnost velice snadné demodulace, tedy získání přenášené informace.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

r 3.1. Nakreslete fázorový diagram a reálné spektrum amplitudově modulovaného signálu $s(t) = S_0[1 + m \cos(Wt + F)] \cos(\omega_0 t)$ při $\omega_0 \gg W$.

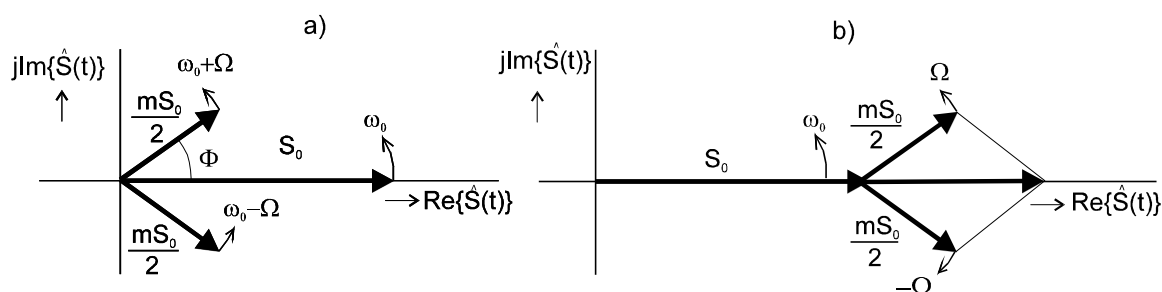
p Řešení:

Využijeme možnosti vyjádření funkce $s(t)$ jako průmět odpovídajícího fázoru $\hat{S}(t)$ do reálné osy:

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0[1 + m \cos(Wt + F)] \cos(\omega_0 t) = \operatorname{Re}\{S_0[1 + m \cos(Wt + F)]e^{j\omega_0 t}\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{\left(S_0 + \frac{mS_0}{2}e^{jWt}e^{jF} + \frac{mS_0}{2}e^{-jWt}e^{-jF}\right)e^{j\omega_0 t}\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{S_0e^{j\omega_0 t} + \frac{mS_0}{2}e^{j(\omega_0 + W)t}e^{jF} + \frac{mS_0}{2}e^{j(\omega_0 - W)t}e^{-jF}\right\}. \end{aligned}$$

Fázorový diagram:

Pro $t = 0$ je:



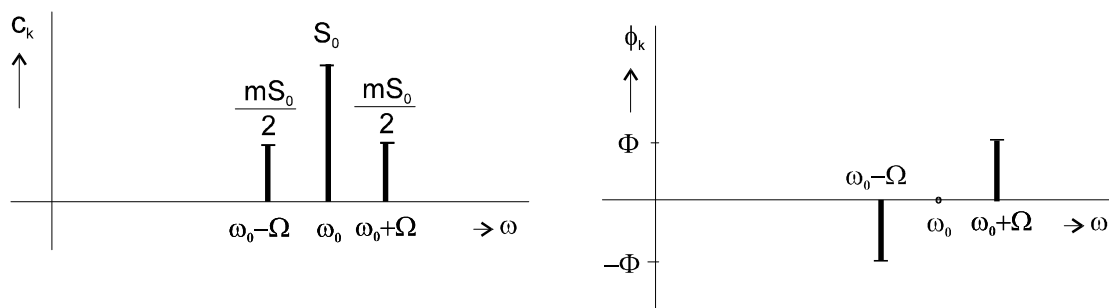
Obr.3.2. Fázorové diagramy amplitudově modulovaného signálu.

Jak je vidět z výsledku, při modulaci jedním harmonickým signálem je výsledný fázor složen ze tří fázorů jak je naznačeno na obr. 3.2a). Častěji se však používá zobrazení podle obr. 3.2b). Fázory s moduly $0.5mS_0$ rotují relativní rychlostí $\pm W$ vůči fázoru s modulem S_0 .

Spektrum AM signálu: můžeme ještě upravit předchozí vztah:

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\left\{S_0e^{j\omega_0 t} + \frac{mS_0}{2}e^{j(\omega_0 + W)t}e^{jF} + \frac{mS_0}{2}e^{j(\omega_0 - W)t}e^{-jF}\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{S_0[\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)] + \frac{mS_0}{2}[\cos((\omega_0 + W)t + F) + j \sin((\omega_0 + W)t + F)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{mS_0}{2}[\cos((\omega_0 - W)t - F) + j \sin((\omega_0 - W)t - F)]\right\} = S_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{mS_0}{2} \cos[(\omega_0 + W)t + F] + \\ &\quad + \frac{mS_0}{2} \cos[(\omega_0 - W)t - F]. \end{aligned}$$

Spektrum amplitudově modulovaného signálu, v případě kdy modulačním signálem je jediná harmonická funkce s úhlovým kmitočtem W , je složeno ze tří složek na kmitočtech ω_0 , $\omega_0 + W$ a $\omega_0 - W$. Postranní složky mají velikost $mS_0/2$.



Obr.3.3. Spektrum amplitudově modulovaného signálu.

- r 3.2.** Určete rovnici amplitudově modulovaného signálu, chceme-li dosáhnout hloubky modulace 100% při daném modulačním signálu $s_m(t) = \sin(10pt) + \sin(30pt)$. Kmitočet nosné $f_0 = 75\text{Hz}$, amplituda nosné je $S_0 = 0,1\text{V}$. Nakreslete fázorový diagram pro $t = 0,012\text{s}$ a spektrum.

p Řešení:

Modulační funkce musí být normovaná. Proto je nejprve nutné najít maximální hodnotu modulačního signálu. Najdeme tedy jeho extrém:

$$\frac{d}{dt}[\sin(10pt) + \sin(30pt)] = 0,$$

$$10p \cos(10pt) + 30p \cos(30pt) = 0.$$

Tuto rovnici je možno upravit např. pomocí známého vztahu:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b).$$

Zvolíme-li $a=20pt$, $b=10pt$, dostáváme:

$$2\cos(20pt)\cos(10pt) - \cos(10pt) = \cos(30pt).$$

Levou stranu dosadíme do řešení rovnice a dostaneme:

$$10p \cos(10pt) + 30p[2\cos(20pt)\cos(10pt) - \cos(10pt)] = 0 \quad /:10p \cos(10pt) \neq 0$$

$$6\cos(20pt) - 2 = 0$$

Dále platí:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2a)}{2}$$

a tedy

$$12\cos^2(10pt) - 8 = 0$$

$$\cos(10pt) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$t = \frac{1}{10p} \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$t = 0,0196\text{s}$$

Řešení je periodické s periodou $T = 0,2\text{s}$ neboť funkce $\cos(10pt)$ je periodická s periodou $2p$.

Nyní určíme hodnotu $s_m(0,0196)$

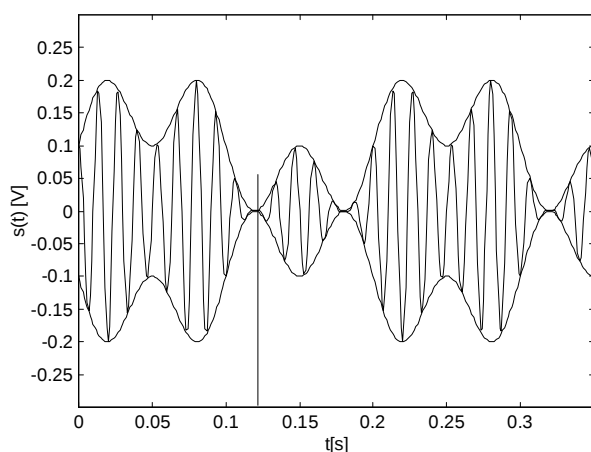
$$\sin(10pt \cdot 0,0196) + \sin(30p \cdot 0,0196) = 1,54.$$

Normovanou modulační funkci určíme podle vztahu $s_m^{(n)}(t) = s_m(t) / \max(s_m(t))$.

Vzhledem k požadavku 100% hloubky modulace je $m = 1$.

Výsledná rovnice amplitudově modulovaného signálu je tedy:

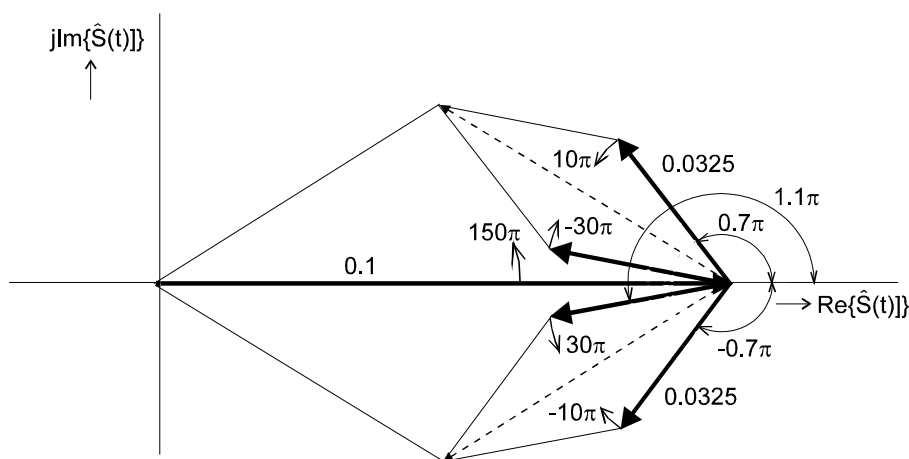
$$s(t) = 0,1 \left\{ 1 + \frac{1}{1,54} [\sin(10p t) + \sin(30p t)] \cos(150p t) \right\} V.$$



Obr.3.4. Časový průběh AM signálu s modulační funkcí $s_m(t) = \sin(10pt) + \sin(30pt)$.

Pro zobrazení signálu v komplexní rovině upravíme vztah $s(t)$:

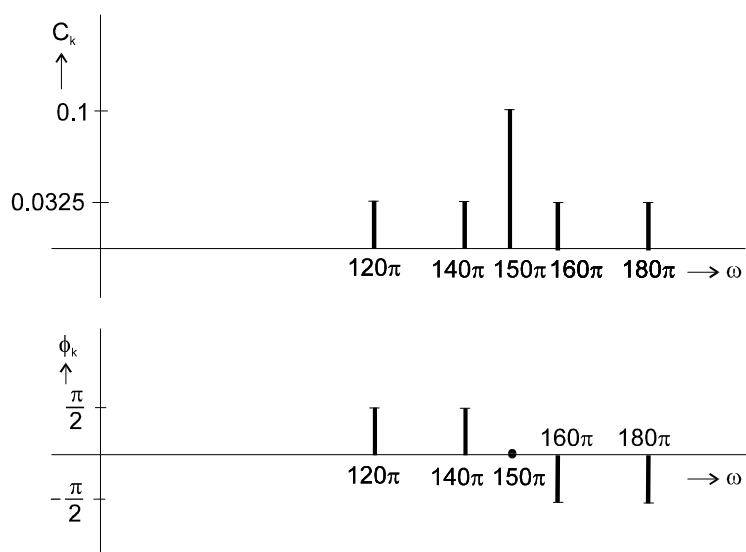
$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \left[0,1 + \frac{0,1}{1,54} \left(\frac{e^{j10pt} - e^{-j10pt}}{2j} + \frac{e^{j30pt} - e^{-j30pt}}{2j} \right) \right] e^{j150pt} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 0,1 e^{j150pt} + 0,0325 \left(e^{j160pt} e^{-j\frac{p}{2}} + e^{j140pt} e^{j\frac{p}{2}} + e^{j180pt} e^{-j\frac{p}{2}} + e^{j120pt} e^{j\frac{p}{2}} \right) \right\}, \\ s(0,12) &= \operatorname{Re} \left\{ 0,1 + 0,0325 \cdot \left(e^{j0,7p} + e^{-j0,7p} + e^{j1,1p} + e^{-j1,1p} \right) \right\} = -2,47 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$



Obr.3.5. Fázorový diagram amplitudově modulovaného signálu, $t = 0,12s..$

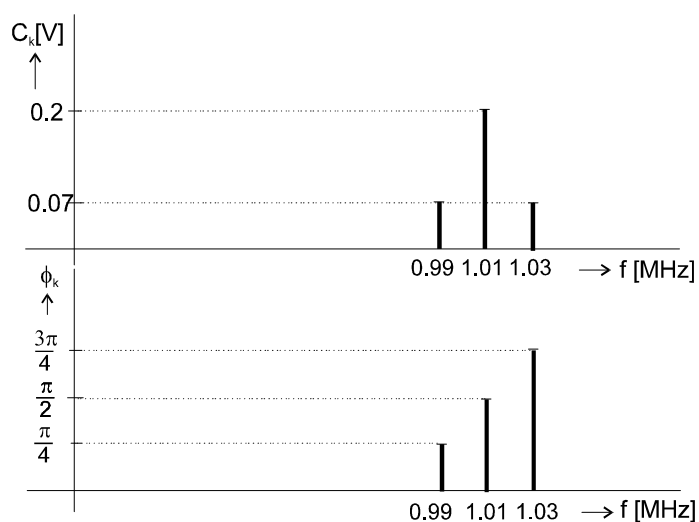
Pro pohodlné určení spektra můžeme vztah pro $s(t)$ ještě upravit:

$$s(t) = 0,1 \cos(150p t) + 0,0325 \cdot \left[\cos \left(160p t - \frac{p}{2} \right) + \cos \left(140p t + \frac{p}{2} \right) + \cos \left(180p t - \frac{p}{2} \right) + \cos \left(120p t + \frac{p}{2} \right) \right].$$



Obr.3.6. Spektrum amplitudové modulační při modulaci dvěma harmonickými signály.

- r 3.3.** Amplitudově modulovaný signál je zadán svým spektrem. Určete:
- hloubku modulační,
 - rovnici modulovaného signálu.



Obr.3.7. Spektrum amplitudové modulační k příkladu 3.3.

p Řešení:

Určíme součet jednotlivých harmonických složek:

$$s(t) = 0,07 \cos\left(2\pi \cdot 0,99 \cdot 10^6 t + \frac{p}{4}\right) + 0,2 \cos\left(2\pi \cdot 1,01 \cdot 10^6 t + \frac{p}{2}\right) + 0,07 \cos\left(2\pi \cdot 1,03 \cdot 10^6 t + \frac{3p}{4}\right).$$

Protože platí:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b), \text{ můžeme psát}$$

$$\begin{aligned}
s(t) &= 0,2 \cos\left(2p \cdot 1,01 \cdot 10^6 t + \frac{p}{2}\right) + 0,14 \cos\left(2p \cdot 1,01 \cdot 10^6 t + \frac{p}{2}\right) \cos\left(2p \cdot 0,02 \cdot 10^6 t + \frac{p}{4}\right) = \\
&= \left[0,2 + 0,14 \cos\left(2p \cdot 0,02 \cdot 10^6 t + \frac{p}{4}\right)\right] \cos\left(2p \cdot 1,01 \cdot 10^6 t + \frac{p}{2}\right) = \\
&= 0,2 \left[1 + 0,7 \cos\left(4 \cdot 10^4 p t + \frac{p}{4}\right)\right] \cos\left(2,02 \cdot 10^6 p t + \frac{p}{2}\right) \quad \forall
\end{aligned}$$

Pro $m=0,7$.

Do minima znalostí problematiky amplitudové modulace patří závěry příkladu 3.1. Při jejich využití by bylo možno přímo psát $S_0 = 0,2V$, $\omega_0 = 2,02p \cdot 10^6 \text{ rad/s}$, $W = 2p(1,03 \cdot 10^6 - 1,01 \cdot 10^6) = 4p \cdot 10^4 \text{ rad/s}$. $F = p/2 - p/4 = p/4 \text{ rad}$ a $j_0 = p/2 \text{ rad}$. Dále platí $m \cdot 0,2/2 = 0,7$ Pro $m = 0,7$.

r 3.5. Na osciloskopu byl sejmout časový průběh amplitudově modulovaného signálu. Bylo zjištěno, že minimální amplituda obálky $S_{\min}=0,5V$ (viz obr.3.1), maximální amplituda $S_{\max}=1,75V$. Další údaje nebyly změřeny. Určete hloubku modulace. Vztah pro její určení odvoďte obecně.

p Řešení:

Obálka AM signálu nabude hodnoty $S_{\min}$ jestliže $s_m(t)=-1$ a hodnoty $S_{\max}$ pro $s_m(t)$ (viz. 3.1). Pak tedy dostaneme dvě rovnice:

$$S_{\min} = S_0(1 - m),$$

$$S_{\max} = S_0(1 + m).$$

$$\text{Z první vyjádříme: } \frac{S_{\min}}{(1 - m)} = S_0,$$

$$S_{\max}(1 - m) = S_{\min}(1 + m) \Rightarrow m = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max} + S_{\min}}.$$

Po dosazení:

$$m = \frac{1,75 - 0,5}{1,75 + 0,5} = 0,55.$$

Hloubka modulace je tedy přibližně 55,5%

Uvedený postup měření hloubky modulace lze s výhodou použít v případě, je-li splněna podmínka $\omega_0 \gg W$. V opačném případě by mohl nastat problém s určením $S_{\min}$ a $S_{\max}$, neboť signál by nemusel mít v potřebném bodě maximum.

r 3.6. Určete spektrální funkci amplitudově modulovaného signálu $S_{AM}(\omega)$, jestliže modulační funkce $s_m(t)$ je zadána obecně a její spektrální funkce $S_m(\omega)$ je omezena na pásmo úhlových kmitočtů $\omega \in \omega_0 - \omega_m, \omega_0 + \omega_m$.

p Řešení:

Pro spektrální funkci AM signálu platí:

$$S_{AM}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 [1 + m s_m(t)] \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{mS_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+w_0)t} dt + \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-w_0)t} dt + \\
 &+ \frac{mS_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)e^{-j(\omega+w_0)t} dt + \frac{mS_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)e^{-j(\omega-w_0)t} dt.
 \end{aligned}$$

Zavedeme-li kmitočty: $n=(\omega+w_0)$ a $m=(\omega-w_0)$, pak můžeme psát:

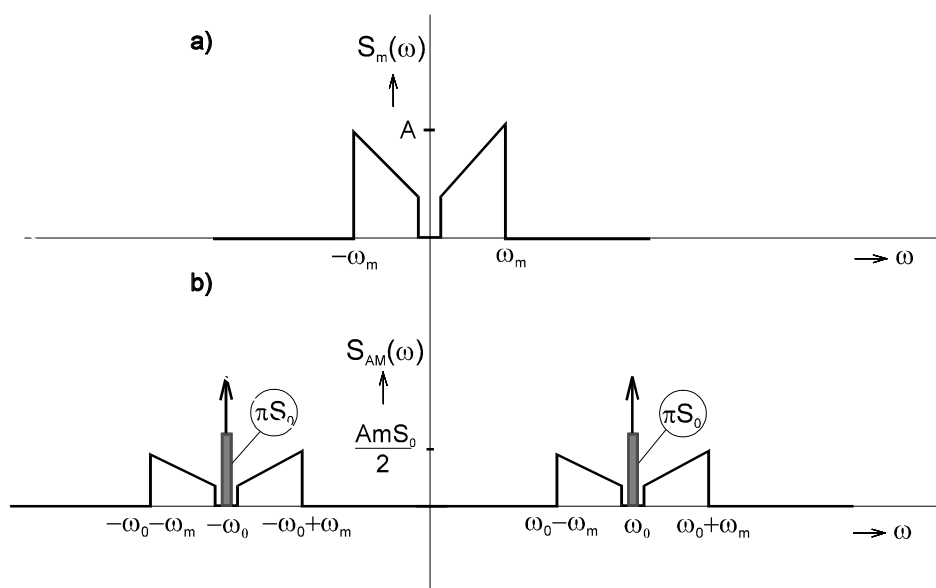
$$\begin{aligned}
 &\frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jnt} dt + \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jmt} dt + \frac{mS_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)e^{-jnt} dt + \frac{mS_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)e^{-jmt} dt = \\
 &= \frac{S_0}{2} 2pd(n) + \frac{S_0}{2} 2pd(m) + \frac{mS_0}{2} S_m(n) + \frac{mS_0}{2} S_m(m).
 \end{aligned}$$

První dva integrály představují výpočet spektrální funkce stejnosměrného signálu, druhé dva integrály jsou výpočty spektrálních funkcí modulačního signálu. Výsledná spektrální funkce tedy bude:

$$S(\omega) = pS_0d(\omega + \omega_0) + pS_0d(\omega - \omega_0) + \frac{mS_0}{2} S_m(\omega + \omega_0) + \frac{mS_0}{2} S_m(\omega - \omega_0).$$

Poznámka: Výpočet 1. a 2. integrálu lze snadno ukázat s využitím filtračního účinku Diracova impulsu:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega - \omega_0)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2p} e^{j\omega_0 t} \Rightarrow F\{e^{j\omega_0 t}\} = 2pd(\omega - \omega_0) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2pd(\omega - \omega_0).
 \end{aligned}$$



Obr.3.8. Spektrální funkce a) modulačního a b) amplitudově modulovaného signálu.

Spektrální funkce $S_m(\omega)$ AM signálu vznikne tak, že spektrální funkce modulačního signálu $S_m(\omega)$ se posune na kmitočty $-\omega_0$ a ω_0 a vynásobí se členem $mS_0/2$. Na obou kmitočtech $-\omega_0$ a ω_0 se objeví Diracovy impulsy o mohutnosti pS_0 .