

Analýza obvodů s aktivními prvky pomocí modifikovaných T- grafů

DALIBOR BIOLEK) and VIERA BIOLKOVA*)
Department of Telecommunications) Radioelectronics)*
Brno University of Technology
Purkynova 118, 612 00 Brno
CZECH REPUBLIC

dalibor.biolek@vabo.cz <http://www.vabo.cz/stranky/biolek>

Abstrakt: - V článku jsou popsány tzv. modifikované transformační (T) grafy, které jsou grafickou obdobou napěťových a proudových incidenčních matic. Je ukázáno, jak lze pomocí těchto grafů získat klasický Masonův-Coatesův graf signálových toků analyzovaného obvodu. Výklad je ilustrován na příkladech obvodů s operačními zesilovači a proudovými konvejory CCII.

Key-Words: - Signal flow graph, flow graph, T-graph, incidence matrix, linear transformation, operational amplifier, current conveyor.

1 Úvod

Masonovy, resp. Masonovy-Coatesovy grafy signálových toků (M- resp. MC- grafy) patří již řadu let k prostředkům rychlé "ruční" analýzy relativně jednodušších lineárních obvodů [1], [2]. Ve své základní formě však nejsou příliš vhodné k řešení obvodů obsahujících některé aktivní prvky, jako jsou například dnes perspektivní proudové konvejory.

Pro obvody obsahující aktivní prvky bylo vyvinuto několik typů grafů signálových toků [3], [4], [5]. Jejich rozбором zjistíme, že k širšímu využívání daného grafu je nutno splnit následující podmínky:

1. Jednoduchá pravidla při sestavování grafu přímo ze schématu obvodu.
2. Úsporná struktura grafu, tzn. aby analýza relativně jednoduchého obvodu nevedla na příliš složitý a tudíž obtížně vyhodnotitelný graf.
3. Jednoduchá pravidla vyhodnocování grafu.
4. Graf musí umožňovat vyhodnocení napěťových a proudových přenosů i imitancí.

Pravidla č. 1 a 2 jsou většinou v rozporu: K úspornému grafu se většinou dopravujeme aplikací pouček, které nejsou jednoduché k zapamatování [4]. Pravidlo č. 3 bývá automaticky splněno, pokud je výsledný graf Masonův nebo Masonův-Coatesův. Pak použijeme známé Masonovo pravidlo. Pravidlo č. 4 není u některých grafů splněno například díky tomu, že během aplikace pravidla č. 2 došlo k redukci některých proměnných, které jsou však nutné např. k určení imitancí poměrů.

Z hlediska pravidel č. 1, 3 a 4 jsou zajímavé tzv. transformační (zkráceně T) grafy, zavedené v [5], které vycházejí z grafické interpretace napěťových a proudových incidenčních matic. Pro naplnění pravidla č. 2 jsme vyvinuli maticovou metodu tzv. párových proměnných.

V článku jsou zavedeny tzv. modifikované T-grafy, které jsou syntézou T-grafů a metody párových proměnných. Tyto grafy byly vyvinuty s cílem dosažení vyváženého kompromisu při naplňování pravidel č. 1 až 4. Konečným výsledkem je klasický MC graf s běžným vyhodnocením.

Článek je organizován následovně: V části 2 jsou shrnuty základní poznatky z teorie T-grafů a na příkladu pasivního obvodu je demonstrována konverze T-grafu v MC graf. V části 3 je na obvodech s ideálním operačním zesilovačem a s proudovým konvejorem CCII± objasněna základní myšlenka párových proměnných a její využití k tvorbě úsporných T-grafů. V aplikační části 4 je mj. ukázán a řešen problém hledání povolených párových proměnných při analýze obvodů obsahujících několik aktivních prvků.

2 Incidenční matice, T-grafy a MC-grafy

Uvažujme pasivní lineární obvod obsahující m dvojpolů o admitancích Y_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Nechť obvod obsahuje n nezávislých uzlů, k nimž přiřadíme n uzlových napětí V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, orientovaných z uzlu i k referenčnímu uzlu, a n uzlových proudů I_i , $i = 1, 2, \dots, n$, které přitékají z vnějších zdrojů do obvodu.

Zavedeme čítací šipky napětí V_k a proudů I_k větrových admitancí Y_k ve smyslu spotřebičové orientace. Pak platí rovnice

$$\mathbf{I}^B = \mathbf{Y}^B \mathbf{V}^B \quad (1)$$

$$\mathbf{I}^N = \mathbf{A}^I \mathbf{I}^B \quad (2)$$

$$\mathbf{V}^B = \mathbf{A}^V \mathbf{V}^N \quad (3)$$

kde $\mathbf{I}^B(m, 1)$, $\mathbf{V}^B(m, 1)$, $\mathbf{I}^N(n, 1)$, $\mathbf{V}^N(n, 1)$ jsou vektory větrových proudů, větrových napětí, uzlových proudů a uzlových napětí. Zde $\mathbf{Y}^B(m, m)$ je diagonální matice větrových admitancí, $\mathbf{A}^I(n, m)$ a $\mathbf{A}^V(m, n)$ jsou proudová a napěťová incidenční matice. Pro pasivní obvod platí,

že dané incidenční matice jsou svázány operací transpozice.

Spojením rovnic (1), (2) a (3) získáme admitanční rovnice metody uzlových napětí:

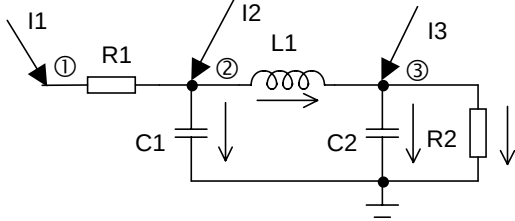
$$\mathbf{I}^N = \mathbf{Y}^N \mathbf{V}^N \quad (4)$$

kde

$$\mathbf{Y}^N = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}^B \mathbf{A}^V. \quad (5)$$

T-grafy představují grafickou reprezentaci rovnic (1)-(3). Rovnice (4) a (5) pak dávají návod, jak z T-grafů přejít na MC-grafy.

Jako příklad uveďme pasivní Čebyševův filtr typu příčkový článek na obr. 1.



Obr. 1. Analyzovaný pasivní filtr.

Ve schématu jsou vyznačeny nezávislé uzly, uzlové proudy a zvolené orientace čítacích šipek napětí a proudů v jednotlivých větvích. Pro obvod platí:

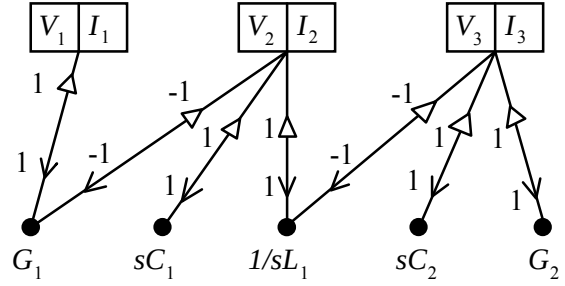
$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} I_{R1} \\ I_{C1} \\ I_{L1} \\ I_{C2} \\ I_{R2} \end{array} = \begin{array}{ccccc} G_1 & & & & \\ & sC_1 & & & \\ & & 1/sL_1 & & \\ & & & sC_2 & \\ & & & & G_2 \end{array} \begin{array}{c} V_{R1} \\ V_{C1} \\ V_{L1} \\ V_{C2} \\ V_{R2} \end{array} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \mathbf{I}^B \quad \quad \quad \mathbf{Y}^B \quad \quad \quad \mathbf{V}^B \end{array} \quad (1)'$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} I_{R1} \\ I_{C1} \\ I_{L1} \\ I_{C2} \\ I_{R2} \end{array} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \mathbf{I}^N \quad \quad \quad \mathbf{A}^I \quad \quad \quad \mathbf{I}^B \end{array} \quad (2)'$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} V_{R1} \\ V_{C1} \\ V_{L1} \\ V_{C2} \\ V_{R2} \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & -1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \mathbf{V}^B \quad \quad \quad \mathbf{A}^V \quad \quad \quad \mathbf{V}^N \end{array} \quad (3)'$$

$$\mathbf{Y}^N = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}^B \mathbf{A}^V = \begin{array}{ccc} G_1 & -G_1 & \\ -G_1 & G_1 + sC_1 + 1/sL_1 & -1/sL_1 \\ & -1/sL_1 & G_2 + sC_2 + 1/sL_1 \end{array} \quad (5)'$$

Graficky lze rovnice (1)'-(3)' znázornit transformačním grafem na obr. 2.



Obr. 2. Transformační graf k obvodu z obr. 1.

V transformačním grafu lze rozeznat následující struktury:

- páry "uzlové napětí/uzlový proud"
- větvové admitance
- napěťové a proudové větve T-grafu, označené otevřenými a plnými šipkami; u šipek jsou uvedeny příslušné transformační koeficienty, které odpovídají prvkům napěťové a proudové incidenční matice.

V důsledku pasivity obvodu a symetrie napěťových a proudových incidenčních matic jsou napěťové a proudové přenosy příslušných větví T-grafu vždy stejné.

Z transformačních grafů lze přejít k MC grafům podle následujícího algoritmu:

- Přenos vlastní smyčky nad uzlovým napětím V_i se získá jako součet součinitelů

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}^V Y_k a_{ki}^I, \quad (6)$$

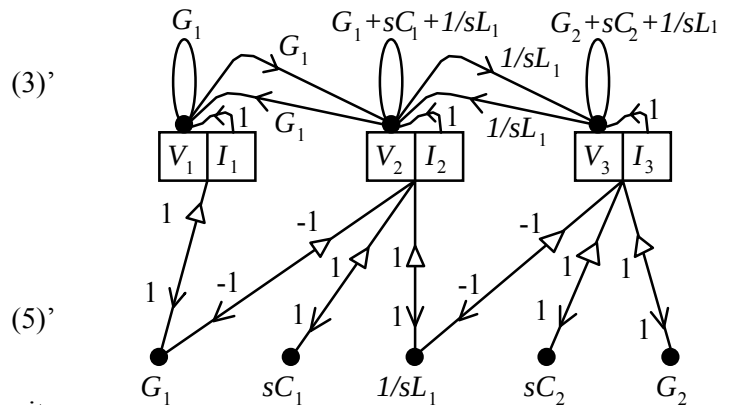
kde a_{ik}^V a a_{ki}^I jsou napěťový a proudový přenos větve, která přímo spojuje pár proměnných V_i/I_i s admitancí Y_k .

- Přenos orientované cesty z uzlu V_i do uzlu V_j se získá jako záporně vzatý součet součinitelů

$$-\sum_{k=1}^m a_{ik}^V Y_k a_{kj}^I. \quad (7)$$

- Do každého z uzlů grafu V_i vstupuje s váhou 1 přenos z uzlu I_i .

Praktická aplikace uvedeného postupu je na obr. 3. MC-graf lze konstruovat přímo nad T-grafem. Výsledný MC-graf plně odpovídá rovnici (4), kde $\mathbf{Y}^N$ je konkretizováno vztahem (5').



Obr. 3. Konstrukce MC-grafu z T-grafu (obvod z obr. 1).

Je vhodné podotknout, že příslušné jednotkové přenosy z uzlových proudů do uzlových napětí konstruuje jen v případě, kdy je účelné daný uzlový proud uvažovat.

T-graf je možné zkonstruovat přímo ze schématu, držíme-li se následujícího postupu:

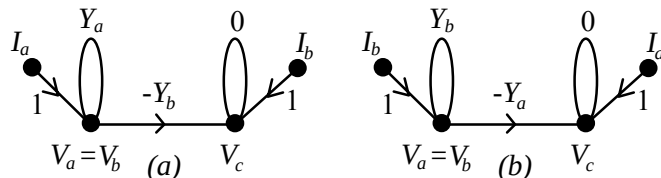
- Ve schématu očíslovíme uzly, přikreslíme větve vnějších zdrojů a orientujeme je dovnitř uzlů, a (libovolně) orientujeme každou z vnitřních větví obsahujících admitance dvojpólů v obvodu.
- Nakreslíme symboly párových proměnných s uspořádáním neznámá veličina | známá veličina (u pasivních obvodů uzlové napětí | uzlový proud). Pod nimi nakreslíme uzly s označením jednotlivých větvových admitancí.
- Nakreslíme větve napěťového transformačního grafu s využitím 2. Kirchhoffova zákona, k větvím přepíšeme váhy (+1 nebo -1).
- Větve transformačního grafu doplníme symetricky (u pasivních obvodů) proudovými vahami.

Pak již následuje výše popsaná konstrukce MC-grafu s jeho následným vyhodnocením pomocí Masonova pravidla.

kde tečkami jsou naznačeny další možné členy, generované plovoucími admitancemi Y_a a Y_b . V maticovém zápise

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a & 0 & \dots \\ Y_b & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a=V_b \\ V_c \\ \dots \end{bmatrix} \quad (8)$$

Odpovídající MC-grafy mohou být dva – viz obr. 5.



Obr. 5. Dvě varianty MC-grafů odpovídajících rovnici (8).

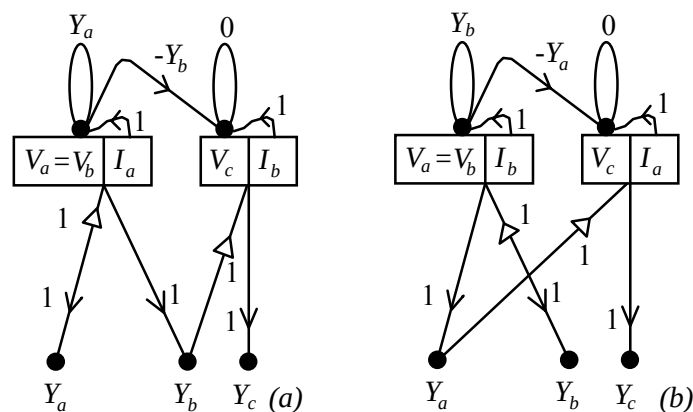
Z grafů vyplývají dvě možné varianty párování proměnných:

a) $V_a=V_b|I_a, V_c|I_b$

b) $V_a=V_b|I_b, V_c|I_a$

Závěr: Objeví-li se v zapojení IOZ, uvažujeme pouze neznámé $V_a = V_b$ a V_c . K první napěťové neznámé (vstup IOZ) přiřadíme do páru buď proud I_a nebo I_b . Druhý z proudů přiřadíme do páru k výstupnímu napětí IOZ.

Obě varianty T- a MC-grafů subobvodu z obr. 4 pak ukazuje obr. 6. Všimněme si shody grafů s grafy na obr. 5.

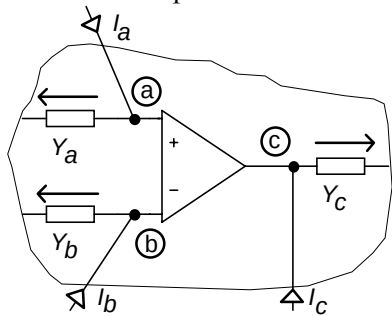


Obr. 6. Konstrukce grafů k obvodu z obr. 4.

3. Metoda párových proměnných a modifikovaného T-grafu

3.1 Obvody s ideálními operačními zesilovači

Uvažujeme ideální operační zesilovač (IOZ) a způsob jeho začlenění do obvodu podle obr. 4.



Obr. 4. Příklad IOZ s operační sítí.

IOZ udržuje nulové napětí mezi svými vstupy, takže způsobuje rovnost uzlových napětí $V_a = V_b$. Toho využijeme k redukci počtu neznámých. Nezajímá-li nás dále výstupní proud IOZ (resp. tento je možné dopočítat dodatečně z napěťových poměrů), nemusíme sestavovat rovnici 1. Kirchhoffova zákona pro uzel c.

Uvědomme si, že v maticové rovnici obvodu musí figurovat stejný počet uzlových napětí a uzlových proudů. Po výše popsané redukci to budou $[V_a=V_b, V_c]$ a $[I_a, I_b]$.

Pro obvod na obr. 4 platí rovnice

$$I_a = V_a Y_a - \dots, \quad I_b = V_b Y_b - \dots,$$

3.2 Obvody s proudovými konvejory CCII±

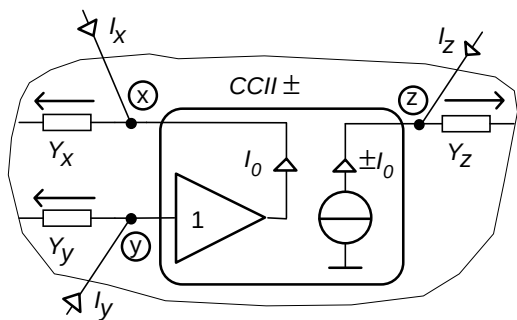
Na obr. 7 je proudový konvektor se známou vnitřní strukturou zapojený v obecné operační sítí. Pro obvod lze zapsat následující rovnice:

$$I_x = Y_x V_x - I_0 - \dots$$

$$I_y = Y_y V_y - \dots$$

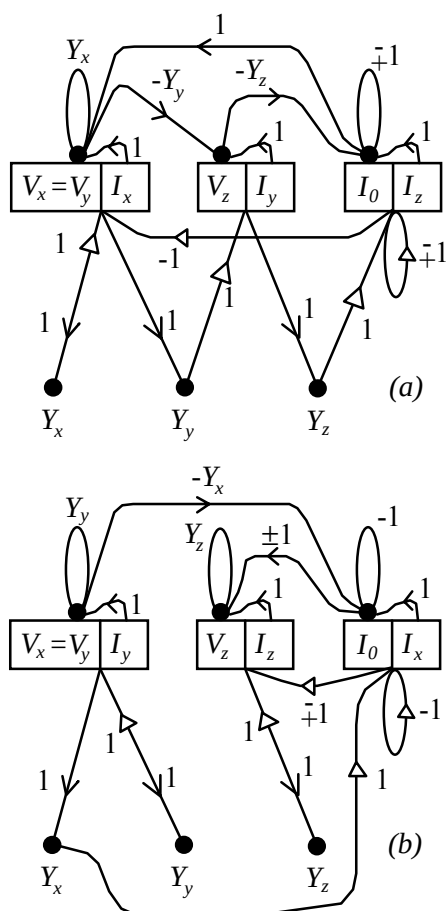
$$I_z = Y_z V_z \mp I_0 - \dots$$

Současně platí rovnost $V_x=V_y$, které využijeme k redukci proměnné.



Obr. 7. Subobvod s proudovým konvejorem CCII±.

Výše uvedeným rovnicím mohou odpovídat dvě varianty grafů na obr. 8.



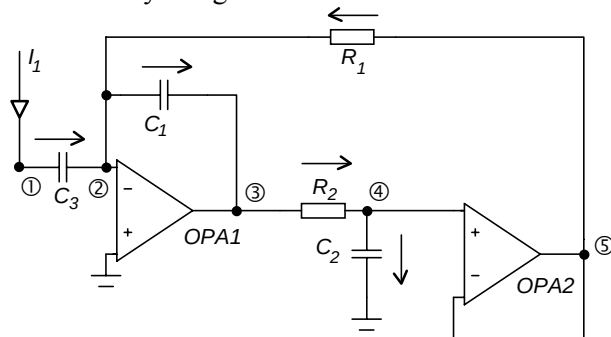
Obr. 8. Grafové reprezentace obvodu z obr. 7.

Závěr: Objeví-li se v zapojení prvek typu CCII±, uvažujeme pouze neznámé $V_x=V_y$, V_z a I_0 . K první napěťové neznámé ($V_x=V_y$) přiřadíme do páru buď proud I_x nebo I_y , k druhé napěťové neznámé (V_z) buď I_y nebo I_z , k neznámé I_0 buď I_z nebo I_x . Uvažujeme-li posloupnost neznámých $V_x=V_y$, V_z , I_0 , pak odpovídající posloupnost párových proudů je buď I_x , I_y , I_z , nebo posloupnost vzniklá jejím cyklickým posuvem doleva (I_y , I_z , I_x).

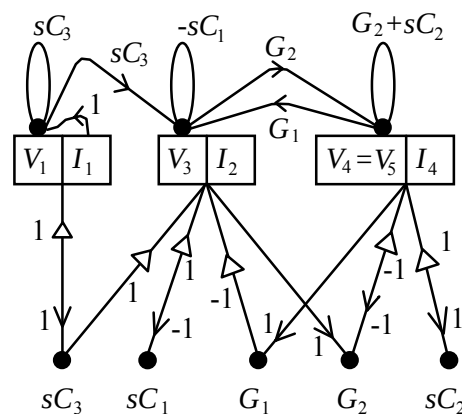
4 Ilustrativní příklady

4.1 Obvody s operačními zesilovači

Na obr. 9 je zapojení aktivního filtru 2. řádu typu pásmová propust [6], na obr. 10 pak MC-graf zkonstruovaný z T-grafu.



Obr. 9. Filtr 2. řádu typu pásmová propust.



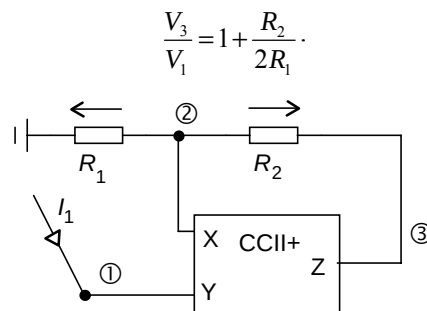
Obr. 10. Grafová reprezentace filtru z obr. 9.

Vyhodnocením MC-grafu lze získat např. napěťovou přenosovou funkci

$$\frac{V_5}{V_1} = C_3 G_2 \frac{s}{-s C_1 (G_2 + s C_2) - G_1 G_2} = -\frac{s R_1 C_3}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s R_1 C_1 + 1}$$

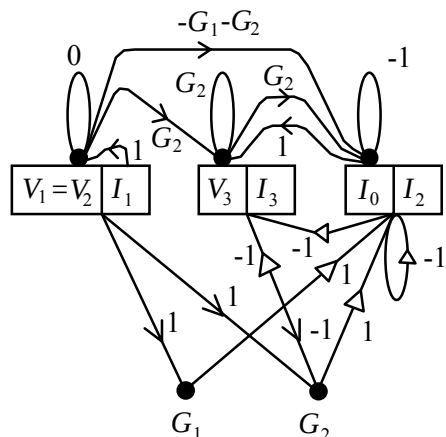
4.2 Obvody s proudovými konvejery

Na obr. 11 je jednoduchý příklad obvodu s CCII+. Přenos napětí z uzlu 1 do uzlu 3 je



Obr. 11. Zapojení s CCII+.

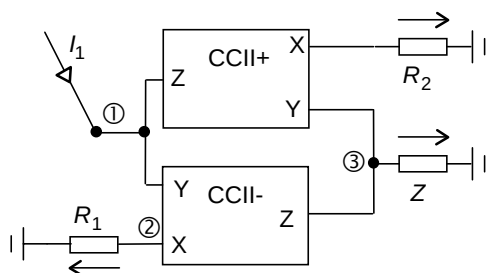
Příslušné grafy jsou na obr. 12. Vyhodnocením MC-grafu získáme uvedenou přenosovou funkci.



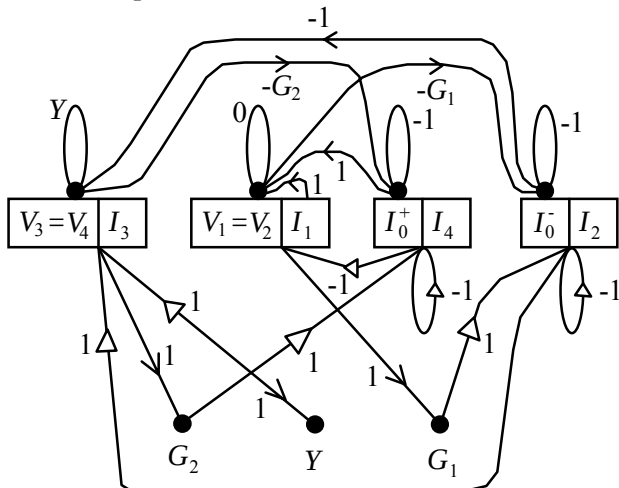
Obr. 12. Grafová reprezentace obvodu z obr. 10.

Na obr. 13 je impedanční konvertor s dvojicí pozitivního a negativního proudového konveju [7]. Neznámé veličiny jsou tyto:

$V_1=V_2$, $V_3=V_4$, I_0^+ (proud CCII+), I_0^- (proud CCII-).



Obr. 13. Impedanční konvertor s CCII+ a CCII- [7].



Obr. 14. Grafová reprezentace obvodu z obr. 13.

Z hlediska CCII+ bychom mohli provést následující dvojí párování proměnných:

- a) $V_3=V_4 \mid I_4$ nebo $V_3=V_4 \mid I_3$
- b) $V_1 \mid I_3$ $V_1 \mid I_1$
- c) $I_0^+ \mid I_1$ $I_0^+ \mid I_4$

Párování doplníme z hlediska CCII-:

$$V_1=V_2 \mid I_2 \text{ rozpor s b) } \quad \text{nebo} \quad V_1=V_2 \mid I_1 \text{ viz b) } \\ V_3 \mid I_3 \text{ viz a)}$$

Jediné možné párování je tedy zachyceno na obr. 14. Vyhodnocením MC-grafu získáme vstupní impedanci obvodu:

$$Z_{inp} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1 \cdot Z \cdot (-1) \cdot (-1)}{0 + G_1 G_2} = \frac{R_1 R_2}{Z}$$

5 Závěry

Popsaná metoda grafického řešení lineárních systémů kombinuje tzv. transformační grafy s metodou párových proměnných. Tímto způsobem je dosaženo relativně jednoduchého algoritmu sestavení výchozí grafové struktury při současné redukci rozměru výsledného MC-grafu. Závěrečný příklad ukazuje, že v případě výskytu většího počtu transformačních prvků v obvodu je třeba pečlivě volit povolené páry obvodových proměnných. Metoda je využitelná pro grafické řešení obecných lineárních problémů bez vazby na analýzu elektrických obvodů.

References:

- [1] Mason, S.J., Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs. *Proc. IRE*, Vol. 44, No. 7, pp. 920-926, 1956.
- [2] Coates, C.L., Flow-graph Solution of Linear Algebraic Equations. *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-6, pp. 170-187, 1959.
- [3] Mikula, J., Signal-Flow-Graph-gain with Respect to the General Node of a Graph. *Electronics Letters*, August 1969, No. 16, pp. 382-383.
- [4] Bielek, D., Novel Signal Flow Graphs of Current Conveyors. *38th MWSCAS*, Rio de Janeiro, Brazil August 13-16, 1995, pp. 1058-1061.
- [5] Mikula, J., Pospisil, J., Analysis of circuits containing active transform elements. *Electronic Horizon*, Vol. 35, No. 4, pp. 161-167, 1974 (in Czech).
- [6] BIOLEK, D., BIOLKOVA, V., Optimization of Linear Systems using Symbolic Modelling. *MS2000*, Las Palmas de Gran Canaria (Spain), pp. 701-707.
- [7] Tomazou, C., Lidgey, F.J., Haigh, D.G., Analogue IC Design: the Current-Mode Approach. *IEE Circuits and Systems Series 2*, Peter Peregrinus Ltd, London 1993, UK.

Acknowledgement: This work is supported by the Grant Agency of the Czech Republic under grants No. 102/01/0432 and 102/00/0907, and by the research programme of BUT „Research of electronic communication systems and technologies”.