

ALGORITMUS VÝPOČTU ČLENŮ MACLAURINOVY ŘADY SIGNÁLU Z JEHO DIFERENCIÁLNÍHO NEBO OPERÁTOROVÉHO POPISU

Doc. Ing. Dalibor Bielek, CSc., katedra elektrotechniky a elektroniky VA Brno, K4,
PS 13, Kounicova 65, 612 00 Brno

Ing. Viera Biolková, Ústav radioelektroniky FEI VUT Brno, Antonínská 1, 662 09 Brno

The simple algorithm for computation of higher-order signal derivatives is described in this contribution on the assumption that either Laplace transformation or set of algebraic-differential equations for signal generation are known. Some applications for circuit computer simulation are presented.

POPIS ALGORITMU

K všeobecně známým pravidlům Laplaceovy transformace se řadí věty o limitních hodnotách. V [1] se dokazuje, že je-li k -tá derivace funkce $f(t)$ exponenciálního řádu, t.j.

$$|f^{(k)}(t)| < Me^{ct}, t > t_0$$

pro určitá čísla M, c, t_0 , pak

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} L\{f^{(k)}(t)\} = 0, \quad (1)$$

kde $L\{\}$ je označení operátoru Laplaceovy transformace. Po aplikaci pravidla pro Laplaceův obraz k -té derivace lze rovnici (1) přepsat na tvar

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [p^k F(p) - p^{k-1} f(0^+) - p^{k-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+)] = 0, \quad (2)$$

kde

$$f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t).$$

Klademe-li postupně v (2) za $k=0, 1, 2, \dots$, dostaneme po krátkém výpočtu

$$0 = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) \\ f'(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} [p^2 F(p) - pf(0^+)] \\ f''(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} [p^3 F(p) - p^2 f(0^+) - pf'(0^+)] \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \left[p^{k+1} F(p) - \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(0^+) p^{k-i} \right] \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Rovnost (3) je někdy označována jako matematický zápis 1. limitní věty. Tato rovnost platí vždy s výjimkou Laplaceových obrazů signálů, obsahujících zobecněné impulzy (Diracovy impulzy a jejich derivace). Tyto speciální případy dále vyloučíme ze svých úvah.

Vzorce (4) poskytují návod, jak na základě Laplaceova obrazu $F(p)$ postupně určit jednotlivé derivace signálu $f^{(k)}(0^+)$, $k=0,1,2,\dots$

V zápisech limit (4) není informace o imaginárních složkách operátoru p . Při numerickém vyšetřování je proto možné tyto imaginární složky považovat za nulové a s operátorem p pracovat jako s reálným číslem rostoucím nade všechny meze ($p \rightarrow \infty$ namísto $\text{Re } p \rightarrow \infty$). Při počítačovém hledání limit pak není nutná komplexní aritmetika.

Ukážeme způsob hledání derivací pro často se vyskytující Laplaceův obraz ve tvaru racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}, m < n. \quad (5)$$

Při nerespektování podmínky $m < n$ by to znamenalo přítomnost zobecněných impulzů v originále $f(t)$.

Jednoduchým výpočtem lze ukázat, že za předpokladu (5) je možné (4) upravit na tvar

$$f(0^+) = \frac{a_{n-1}}{b_n}, \quad (6)$$

$$f^{(k)}(0^+) = \frac{a_{n-k-1} - \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(0^+) b_{i+n-k}}{b_n}, k > 0, a_j = 0, b_j = 0 \text{ pro } j < 0, b_n \neq 0.$$

Předchozí vzorce lze použít k jednoduchému rekurentnímu výpočtu vyšších derivací.

PŘÍKLADY VYUŽITÍ

Inverzní Laplaceova transformace rozvojem signálu v MacLaurinovu řadu

Z výsledků testování algoritmu je zřejmá jeho spolehlivost při výpočtu derivací značných řádů. Z vzorce (6) vyplývá, že doba výpočtu konkrétního počtu derivací nesouvisí se složitostí Laplaceova obrazu $F(p)$, konkrétně s řádem polynomů m a n . Proto je principiálně možné výše uvedeným způsobem určit v relativně krátkém čase značný počet koeficientů MacLaurinovy řady signálu a zrekonstruovat tak s vysokou přesností časový průběh v relativně širokém okolí počátku.

Výpočet matematických počátečních podmínek systému z fyzikálních počátečních podmínek

Uvažujme lineární dynamický systém popsáný soustavou algebraicko-diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t).$$

Zde $\mathbf{v}$ je vektor obsahující n hledaných obvodových veličin (zobecněných stavových veličin), $\mathbf{w}$ je vektor m vstupních veličin, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové, obecně singulární matice rozměru $(n \times n)$ a $\mathbf{C}$ je incidenční matice rozměru $(n \times m)$. Na systému je definováno l výstupů, které jsou sdruženy do vektoru výstupu $\mathbf{y}$. Matice $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ v algebraické výstupní rovnici mají rozměry $(l \times n)$ a $(l \times m)$. Stav systému je v čase $t=0^+$ popsán vektorem fyzikálních počátečních podmínek $\mathbf{v}(0^+)$.

Úkolem je určit matematické počáteční podmínky

$$\mathbf{y}(0^+), \mathbf{y}'(0^+), \mathbf{y}''(0^+), \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}(0^+),$$

kde $r < n$ je řád systému, známe-li vektor fyzikálních počátečních podmínek.

Podrobíme-li rovnice (7) Laplaceově transformaci, dostaneme

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + p\mathbf{B})\mathbf{V}(p) &= \mathbf{C}\mathbf{W}(p) + \mathbf{B}\mathbf{v}(0^+), \\ \mathbf{Y}(p) &= \mathbf{D}\mathbf{V}(p) + \mathbf{E}\mathbf{W}(p). \end{aligned} \quad (8)$$

K dobře známým numerickým úlohám patří algoritmy semisymbolické inverze matice $\mathbf{A} + p\mathbf{B}$ [2],[3],[4],[5]. Řešení je ve tvaru

$$[\mathbf{A} + p\mathbf{B}]^{-1} = \frac{\sum_{k=0}^r \mathbf{M}_k p^k}{\sum_{k=0}^r d_k p^k}, \quad (9)$$

kde $\mathbf{M}_k$ jsou jisté čtvercové matice a d_k koeficienty determinantu matice $\mathbf{A} + p\mathbf{B}$. Je zřejmé, že je-li Laplaceův obraz budicího signálu dán racionální lomenou funkcí, vede aplikace (9) na (8) na vyjádření Laplaceova obrazu složek výstupního vektoru rovněž pomocí racionálních lomených funkcí. Tím je úloha hledání matematických počátečních podmínek převedena na již dříve řešenou úlohu nalezení derivací signálu z jeho Laplaceova obrazu.

Přesná přechodová analýza spínaných obvodů

K zajímavým problémům počítačové simulace patří analýza přechodných jevů, které jsou vyvolávány skokovou změnou stavu analogových spínačů. V některých případech, které jsou typické pro obvody se spínanými kapacitami a některé spínané zdroje nebo měniče, může při modelování dojít k situaci, která vede na skokovou změnu napětí kapacitoru nebo proudu induktorem. V okamžiku sepnutí dochází k zdánlivému porušení Kirchhoffových zákonů. Tento jev se označuje anglickým termínem "inconsistent initial conditions" [6]. Analýza těchto obvodů klasickými metodami, např. numerickým řešením diferenciálních rovnic, zde selhává díky nevlastním derivacím obvodových veličin v okamžiku skokové změny stavu obvodu.

V [7] jsme popsali metodu přesného řešení těchto jevů pomocí operátorové metody a numerické inverzní Laplaceovy transformace. Je zde ukázán způsob, jak je možné z modifikovaných admitančních matic obvodu v obou kvazistabilních stavech, které lze algoritmicky sestavit přímo ze schématu, určit Laplaceův obraz vektoru obvodových veličin v časovém intervalu po skokové změně stavu. Aplikujeme-li na tento Laplaceův obraz algoritmus hledání koeficientů MacLaurinovy řady, jsme schopni s vysokou přesností zrekonstruovat přechodný děj vyvolaný změnou stavu spínače.

ZÁVĚR

V příspěvku je popsána metoda výpočtu vyšších derivací signálu v počátku časové osy, je-li znám operátorový popis tohoto signálu nebo popis pomocí soustavy generujících algebraicko-diferenciálních rovnic. Jsou uvedeny tři aplikace tohoto algoritmu, které se osvědčily při řešení některých problémů počítačové simulace elektrických obvodů.

LITERATURA

- [1] LEVINŠTEJN, M.L.: Operátorový počet v elektrotechnice. SNTL Praha, 1977.
- [2] GANTMACHER, F.R.: Teorija matric. Moskva, Nauka 1966.
- [3] DEMIDOVICH, B.P.: Osnovy vychislitelnoy matematiki. Nauka, Moskva 1966.
- [4] STREJC, V.: Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. Academia/Praha 1978.
- [5] MANN, H.: Využití počítače při elektrotechnických návrzích. SNTL/ALFA 1984.
- [6] OPAL, A.-VLACH, J.: Consistent initial conditions of linear networks. IEEE Trans. on CAS, 37, No.3, 1990, pp. 364-372.
- [7] BIOLEK, D.: Počítačová analýza reálných spínaných obvodů. Dílčí výzkumná zpráva úkolu Grantové agentury ČR "Syntetické prvky vyššího řádu", ÚTEL FEI VUT Brno, 1993, 31s.