

GENEROVÁNÍ MARCUMOVÝCH FUNKCÍ PRO VÝPOČET CHYBOVOSTI KOMUNIKAČNÍHO SPOJE

Dalibor Biolek, Viera Biolková

Anotace:

V příspěvku jsou diskutovány možnosti numerického výpočtu *Marcumových* funkcí, které popisují chybovost komunikačních spojů v podmínkách působení úzkopásmového šumu.

Při přenosu dat amplitudovým klíčováním a v četných aplikacích radiolokační techniky závisí pravděpodobnost chyby přijímače na výkonu působícího úzkopásmového šumu σ^2 a na statistickém rozložení amplitudy signálu A na vstupu přijímače. Hustota pravděpodobnosti amplitudy součtu úzkopásmového šumu a harmonické nosné o amplitudě A_0 je popsána *Riceovým* rozložením

$$p_{Rice}(A, A_0) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{A^2+A_0^2}{2\sigma^2}} & \dots A \geq 0, \\ 0 & \dots A < 0 \end{cases}, \quad (1)$$

kde I_0 je modifikovaná Besselova funkce imaginárního argumentu. V případě příjmu úzkopásmového šumu bez harmonické nosné ($A_0 = 0$) přechází *Riceovo* rozložení v *Rayleighovo*:

$$p_{Rayleigh}(A) = p_{Rice}(A, 0) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} & \dots A \geq 0, \\ 0 & \dots A < 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Distribuční funkce *Rayleighova* rozložení je dána analytickým vztahem

$$F_{Rayleigh}(A) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} & \dots A \geq 0, \\ 0 & \dots A < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

V případě *Riceova* rozložení nelze distribuční funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Platí

$$F_{Rice}(A, A_0) = \begin{cases} 1 - Q\left(\frac{A_0}{\sigma}, \frac{A}{\sigma}\right) & \dots A \geq 0, \\ 0 & \dots A < 0 \end{cases}, \quad (4)$$

kde

$$Q(a, b) = \int_b^\infty x I_0(ax) e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} dx \quad (5)$$

je tzv. *Marcumova* funkce. Z porovnání (3) a (4) plyne jednoduchý výpočet *Marcumovy* funkce pro speciální případ $a = 0$:

$$Q(0, b) = e^{-\frac{b^2}{2}}. \quad (6)$$

Pro obecný případ je však výpočet *Marcumovy* funkce poměrně složitý numerický problém, a to zejména pro relativně velké argumenty b , konkrétně $b > a + 6$, $a \geq 0$. Dostupné tabulky *Marcumových* funkcí [1] jsou přitom často málo podrobné, neúplné a mnohdy i nepřesné.

Pokusme se například vypočítat funkci $Q(1, 6.5)$ pomocí MATLABu. Přesná hodnota zaokrouhlená na 4 desetinná místa je

$$Q(1, 6.5) = 5,0058 \cdot 10^{-8}.$$

V MATLABu jsou k integraci určeny 2 základní funkce: QUAD (adaptivní rekurzivní *Simpsonovo* pravidlo) a QUAD8 (adaptivní rekurzivní *Newton-Cotesova* formule). Pro numerickou integraci je nevýhodná nevlastní horní integrační mez v (5). Pro *Marcumovu* funkci našťestí platí

$$Q(a, b) = \int_b^{\infty} x I_0(ax) e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} dx = 1 - \int_0^b x I_0(ax) e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} dx = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^b x I_0(ax) e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (7)$$

Vytvoříme proto M-soubor INTE.M, v němž definujeme integrand v (7) pro $a = 1$:

```
function y=INTE(x)
a=1;
y=x.*besseli(0,x*a).*exp(-x.^2/2);
```

Příkaz

```
1-quad('inte',0,6.5)*exp(-1/2)
```

(viz rovnice 7) vygeneruje zcela nesprávný výsledek

```
-3.7680 .10-7,
```

příkazem

```
1-quad8('inte',0,6.5)*exp(-1/2)
```

dostaneme

```
6.4669 .10-9.
```

Implicitně probíhá integrace s relativní chybou 10^{-3} . Nastavíme-li relativní chybu například na 10^{-8} , použijeme příkaz

```
1-quad8('inte',0,6.5,1e-8)*exp(-1/2)
```

se správným výsledkem

```
5.0058 .10-8.
```

Tím jsme se však přiblížili k samotné hranici praktické použitelnosti dané integrační metody. Zkusíme-li totiž například určit funkci

$$Q(1, 10) = 3,635 \cdot 10^{-19},$$

příkazem

```
1-quad8('inte',0,10,1e-13)*exp(-1/2)
```

získáme nesprávný výsledek

```
1,1102 . 10-16.
```

Výpočet trvá asi 20s na Pentiu 60 MHz, protože je zadána nízká relativní chyba 10^{-13} . Při dalším snižování chybového kritéria se však již výsledek nemění.

Novou kvalitu do přesnosti numerických metod přinášejí symbolické výpočetní metody. Symbolický toolbox MATLABu v.1.0 však není příliš výkonný, což se projeví v selhání algoritmů při převodu integrálu (7) do numerického tvaru. Výhodnější je použití programu MAPLE. Příkaz

```
evalf(1-exp(-1^2/2)*Int(x*BesselI(0,1*x)*exp(-  
x^2/2),x=0..10),23);
```

poskytne přesný výsledek

$0,36352 \cdot 10^{-18}$

za 16 sekund výpočtu. Parametr 23 na konci příkazu znamená 23 platných cifer numerického výsledku. Uvedeným způsobem získáme přesné hodnoty *Marcumových* funkcí i pro argumenty, při nichž běžně používané numerické metody integrace selhávají.

V současné době připravujeme přibližné vzorce *Marcumových* funkcí, sestavené z funkcí elementárních, pro výpočty těchto funkcí s přesností na 4 desetinná místa až do funkčních hodnot 10^{-9} . Tím zpřístupníme tyto funkce i pro uživatele běžných kalkulaček bez nutnosti používání nedokonalých tabulek.

Literatura:

- [1] ŠEBESTA,V.-VRBA,K.: Teorie přenosu zpráv. Sbírka příkladů. FE VUT Brno, 1980. 120 s.
- [2] STEJN,S.-DŽONS,J.J.: Principy sovremennoj teorii svjazi i ich primenenije k peredači diskretnych soobščeníj. Moskva, Svjaz 1971. 376 s.