

4. POČÍTAČOVÝ NÁVRH DISKRÉTNÍCH FILTRŮ Z ANALOGOVÝCH PROTOTYPŮ METODOU SIGNÁLOVÝCH INVARIANCÍ

V této kapitole popíšeme využití algoritmu *ILT* k návrhu diskrétních systémů z analogových prototypů metodou signálových invariancí. Jsou uvažovány různé modely analogového prototypu: soustava rovnic modifikované metody uzlových napětí (*MMUN*), stavové rovnice a přenosová funkce v rovině p .

4.1. Úvod

K všeobecně známým metodám návrhu diskrétních systémů z analogových prototypů patří metody signálových invariancí, zejména metoda impulsní invariance (taktéž nazývána metodou invariance impulsní charakteristiky) [1],[28]. Výsledkem návrhu je diskrétní systém, jehož vynucená odezva na předem zadaný signál je ekvivalentní odezvě analogového systému na odpovídající signál souvislého času. V této části se zaměříme na impulsní, přechodnou a lineární invarianci.

Klasický způsob návrhu lze popsat následovně:

1. Výpočet vynucené odezvy analogového systému.
2. Vzorkování odezvy za účelem získání ekvivalentní vynucené odezvy diskrétního systému.
3. Výpočet z -transformace vzorkované odezvy a vzorkovaného vstupního signálu.
4. Výpočet systémové funkce diskrétního systému jako poměr výše uvedených z -obrazů.

Tento postup však není vhodný pro počítačový návrh. Realizace prvního kroku by znamenala nutnost přesné časové analýzy analogového systému. Algoritmizace dalších kroků je problematická, ne-li nemožná zejména při pomalu konvergujících nebo dokonce divergujících odezvách. I v nejpříznivějším případě, kdy odezva relativně rychle konverguje k nule, nepředstavuje uvedený postup vhodnou metodu pro hledání systémové funkce v uzavřeném tvaru.

Účinný počítačový algoritmus je popsán v [26], ovšem za předpokladu, že analogový prototyp je popsán stavovými rovnicemi. Tento přístup může být využit i v případě znalosti přenosové funkce prototypu, protože k této přenosové funkci můžeme přiřadit jeden z možných stavových popisů, jak bylo ukázáno v části 1.

Často je analogový systém popisován soustavou algebraicko-diferenciálních rovnic. Zvláště populární a v *CAD* simulátorech rozšířená je tzv. dvougrafová modifikovaná metoda uzlových napětí *MMUN* [42]. Pro účely využití těchto *CAD* systémů pro návrh diskrétních filtrů je proto výhodné uvažovat popis analogového prototypu pomocí *MMUN*.

V další části ukážeme postup návrhu na základě soustavy rovnic *MMUN* prototypu. Důležitou úlohu zde bude hrát algoritmus *ILT* maticové rovnice. Tuto obecnou metodu pak budeme konkretizovat pro případ, je-li známa přenosová funkce prototypu nebo jeho stavový popis. Získaný algoritmus je pak podstatně jednodušší než algoritmus publikovaný v [26].

4.2. Návrh na základě soustavy rovnic *MMUN*

Uvažujme lineární systém s jedním vstupem w a s jedním výstupem y . Tento systém lze popsat soustavou rovnic modifikované metody uzlových napětí ve tvaru

$$\mathbf{G}\mathbf{v}(t) + \mathbf{C}\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \mathbf{D}w(t), \quad (4.1)$$

$$y(t) = \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \quad (4.2)$$

kde $\mathbf{v}$ ($n \times 1$) je vektor branových proměnných, $\mathbf{G}$, $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice ($n \times n$) a $\mathbf{D}$ a $\mathbf{B}$ jsou vektory ($n \times 1$) a ($1 \times n$). Často bývá alespoň jedna z matic $\mathbf{G}$ nebo $\mathbf{C}$ singulární.

Navzdory této případné singularitě lze nalézt algoritmické řešení diferenciální rovnice (4.1). Nejprve provedme diskretizaci časové osy na intervaly $(kT, kT+T>$, $k = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$, $T > 0$. Pro k -tý interval zapíšeme řešení v operátorové oblasti:

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\mathbf{V}(p) &= \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}W(p) \Rightarrow \\ \mathbf{V}(p) &= (\mathbf{G} + p\mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + (\mathbf{G} + p\mathbf{C})^{-1} \mathbf{D}W(p), \end{aligned} \quad (4.3)$$

a v časové oblasti

$$\mathbf{v}(kT + T) = \mathbf{g}^*(T)\mathbf{v}(kT) + \int_0^T \mathbf{g}(\xi)w(kT + T - \xi)d\xi \quad (4.4)$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{g}^*(T) = \mathbf{L}^{-1} \{(\mathbf{G} + p\mathbf{C})^{-1}\} \mathbf{C} \Big|_{t=T} \quad (4.5)$$

je matice (nxn) přirozené odezvy pro čas $t=T$ a

$$\mathbf{g}(\xi) = \mathbf{L}^{-1} \{(\mathbf{G} + p\mathbf{C})^{-1}\} \mathbf{D} \Big|_{t=\xi} \quad (4.6)$$

je vektor $(nx1)$ impulsní odezvy.

Jak vyplývá z rovnic (4.5) a (4.6), uvedené maticové charakteristiky mohou být získány pomocí algoritmu *ILT*.

Aproximujeme-li vstupní signál $w(t)$ nad daným časovým intervalem různými výrazy, rovnice (4.4) může být převedena na diferenční rovnici ekvivalentního diskrétního systému. Pro níže uvažované aproximace bude diferenční rovnice vždy ve tvaru

$$\mathbf{v}(kT + T) = \mathbf{g}^*(T)\mathbf{v}(kT) + \mathbf{G}w(kT) + \mathbf{H}w(kT + T) \quad (4.7)$$

Jedná se o stavovou rovnici diskrétního systému. Jak známo, nahradíme-li signál $w(t)$, $t \in (kT, kT+T>$ Diracovým impulsem, resp. konstantním signálem, resp. lineárním průběhem v souladu s Tab. 4.1, odpovídající diferenční rovnice (4.7) pak bude popisovat diskrétní systém, navržený z analogového prototypu (4.1) pomocí impulsní, resp. skokové, resp. lineární invariance. Tvary vektorů $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ pro uvedené invariance jsou shrnuty v Tab. 4.1.

invariance	impulsní	skoková	lineární
aproximace $w(t)$, $t \in (kT, kT+T>$	$Tw(kT + T)\delta(t - kT - T)$	$w(kT)$	$w(kT) + a \cdot (t - kT)$ $a = [w(kT + T) - w(kT)] / T$
vektor $\mathbf{G}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{h}(T) = \int_0^T \mathbf{g}(\xi)d\xi$	$\mathbf{h}(T) - \mathbf{q}(T)$
vektor $\mathbf{H}$	$\mathbf{g}(0^+)T$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{q}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{h}(\xi)d\xi$

Tab. 4.1. Různé typy invariancí a odpovídající vektory $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$.

Numerický výpočet těchto vektorů může být uskutečněn pomocí algoritmu *ILT*: $\mathbf{g}(0^+)$ pomocí *dvoukrokové metody* integrace vpřed a vzad, $\mathbf{h}(T)$ a $\mathbf{q}(T)$ pomocí pravidla o Laplaceově transformaci integrálu signálu (viz Tab. 1.1).

Aplikujeme-li transformaci z na diferenční rovnici (4.7), dostaneme

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{g}^*(T)]\mathbf{V}(z) = (\mathbf{G} + \mathbf{H}z)W(z), \quad (4.8)$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice

Je zřejmé, že póly navrhovaných diskrétních systémů jsou nezávislé na typu signálové invariance a jsou totožné s vlastními čísly matice $\mathbf{g}^*(T)$. Vezmeme-li v úvahu výstupní rovnici (4.2), pak koeficienty systémové funkce navrhovaného systému $K(z) = y(z)/w(z)$, resp. příslušné nulové body a póly můžeme určit Faddějevovým algoritmem, *QR* algoritmem nebo jinými známými způsoby.

Je zřejmé, že uvedený postup povede k správným výsledkům i za předpokladu, že analogový prototyp je popsán nikoliv soustavou rovnic *MMUN* (4.1), nýbrž stavovými rovnicemi, protože stavový popis je speciálním případem rovnic (4.1) za podmínky $\mathbf{C} = \mathbf{E}$. Totéž platí pro popis prototypu přenosovou funkcí. Ukážeme však, že v těchto případech je možné výpočet vektorů $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ podstatně zefektivnit.

4.3. Návrh na základě stavového popisu, resp. přenosové funkce

Uvažujme lineární systém o stavové rovnici časové oblasti (1.5a), resp. operátorové oblasti (1.5b). Tyto rovnice mohou současně popisovat i systém vyjádřený přenosovou funkcí (3.1). Pak matice v stavové rovnici lze sestavit z koeficientů přenosové funkce podle rovnic (3.4).

Řešíme-li opět metodou diskretizace časové osy stavovou rovnici pro k -tý interval, dostaneme řešení ve formě rovnice (4.4), kde ovšem

$$\mathbf{g}^*(T) = e^{AT} \quad (4.9)$$

a

$$\mathbf{g}(\xi) = e^{A\xi} \mathbf{B}. \quad (4.10)$$

Aproximujeme-li nyní vstupní signál nad k -tým intervalem výrazy uvedenými v Tab. 4.1, získáme opět stavovou rovnici (4.7) ekvivalentního diskrétního systému. Vektory $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ však nyní budou dány jednoduššími výrazy podle Tab. 4.2.

invariance	impulsní	skoková	lineární
vektor $\mathbf{G}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{h}(T) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{AT} - \mathbf{E})\mathbf{B}$	$\mathbf{h}(T) - \mathbf{q}(T)$
vektor $\mathbf{H}$	$\mathbf{B}T$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{q}(T) = \mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\mathbf{h}(T)}{T} - \mathbf{B}\right)$

Tab. 4.2. Různé typy invariancí a odpovídající vektory $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$.

Matici e^{AT} lze určit sečtením konečného počtu členů jejího Taylorova rozvoje nebo jinými známými metodami. Numerický výpočet vektorů $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ je pak snadný.

4.4. Výsledky simulace

Na základě výše popsané metody jsme vyvinuli počítačový program *INVAR* pro návrh diskretních filtrů z analogových prototypů pomocí impulsní, přechodné a lineární invariance.

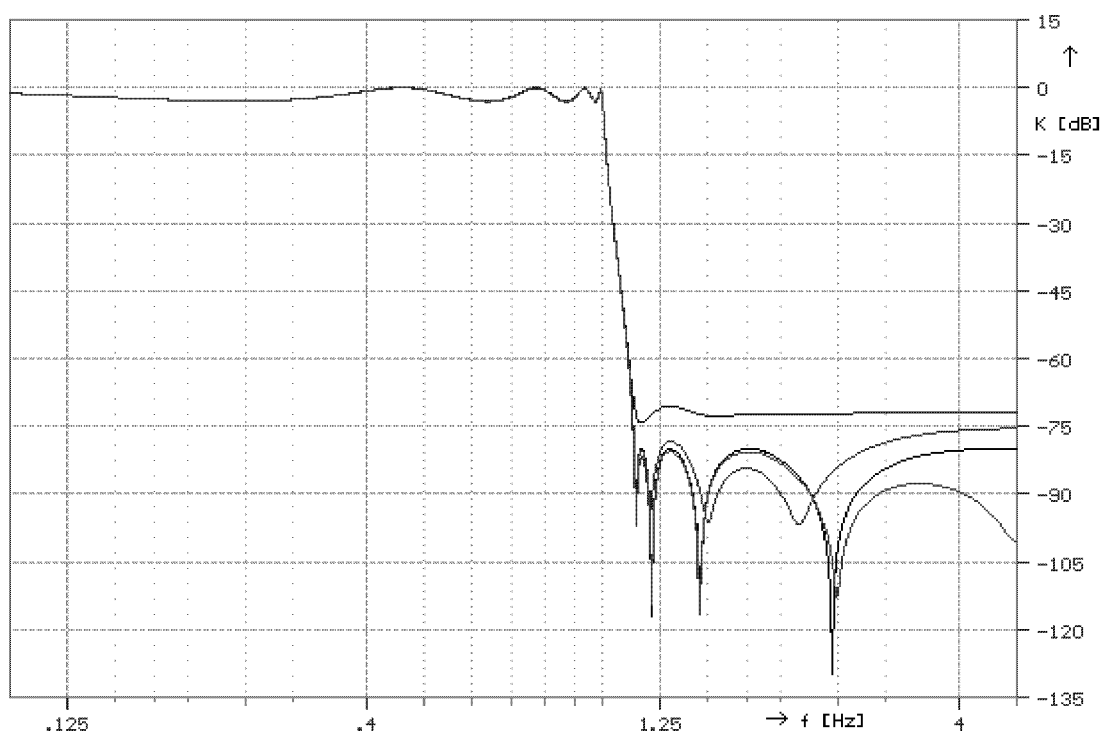
$K(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$		
i	a_i	b_i
0	2.63595E5	2.63595E5
1	0	3.53177E5
2	1.39877E4	1.16327E5
3	0	6.97929E4
4	2.59884E2	1.04413E4
5	0	4.39004E3
6	1.93506E0	3.33814E2
7	0	1.11657E2
8	4.50853E-3	3.54216E0
9	0	1.00000E0

Tab. 4.3. Koeficienty přenosové funkce analogového prototypu.

Pro ilustraci uvádíme výsledky návrhu vycházející z Caueroва filtru typu dolní propust 9. řádu. Analogový prototyp byl navržen z tolerančního schématu amplitudové kmitočtové charakteristiky pomocí systému *NAF* [21]. Odpovídající koeficienty přenosové funkce v rovině *p* jsou uvedeny v Tab. 4.3. Mezní kmitočet filtru je normován na 1 Hz. Koeficienty systémových funkcí navržených diskretních filtrů v rovině *z* jsou pak v Tab. 4.4. Výsledky návrhu platí pro vzorkovací kmitočet 10 Hz. Na obr. 4.1 jsou pak ukázány průběhy kmitočtových charakteristik jak analogového prototypu, tak i navržených diskretních filtrů.

$K(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}}{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_n z^{-n}}$				
<i>i</i>	<i>d_i</i>	<i>c_i</i>		
	všechny invariance	impulsní	skoková	lineární
0	1.00000E0	4.50853E-4	0	2.57951E-4
1	7.64235E0	-2.45543E-3	6.05935E-4	8.60420E-4
2	2.68660E1	7.55786E-3	2.76956E-3	1.62277E-3
3	5.68713E1	1.49644E-2	6.90209E-3	1.80437E-3
4	7.97642E1	2.04909E-2	-1.11666E-2	1.24580E-3
5	7.67971E1	-1.93964E-2	1.29592E-2	-8.98293E-5
6	5.07384E1	1.25155E-2	-1.08675E-2	-8.11868E-4
7	2.21836E1	-5.03554E-3	6.56876E-3	1.09261E-3
8	5.82769E0	1.03876E-3	-2.59705E-3	-6.74716E-4
9	7.01723E-1	0	5.66967E-4	2.24277E-4

Tab. 4.4. Koeficienty systémových funkcí navržených diskretních filtrů.



Obr.4.1. Kmitočtové charakteristiky **1**: analogového prototypu, **2,3,4**: diskretního filtru, navrženého metodou impulsní (2), skokové (3) a lineární (4) invariance.

Další příklad ukazuje návrh filtru 4. řádu podle Besselovy aproximace. V [1] je uvedena přenosová funkce analogového prototypu

$$H(p) = \frac{105}{105 + 105p + 45p^2 + 10p^3 + p^4}.$$

Požadované vzorkovací frekvence diskretního systému jsou 8 a 16 rad/s. Antoniou popisuje v [1] klasický postup návrhu metodou impulsní invariance. Výsledky návrhu jsou shrnuty v Tab. 4.5 a 4.6 spolu s výstupy programu *INVAR*. Z tabulek je zřejmá dobrá shoda výsledků.

$H(z) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3}{d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + z^4}$		
	Antoniou	INVAR
c_1	1.4864215566E-2	1.4864213537E-2
c_2	3.2370129187E-1	3.2370127612E-1
c_3	7.2249231396E-1	7.2249235117E-1
d_0	3.8820300061E-4	3.8820320392E-4
d_1	-3.8651370378E-3	-3.8651352789E-3
d_2	1.7060001861E-2	1.70599868556E-2
d_3	2.9420700000E-2	2.9420552873E-2

Tab. 4.5. Výsledky návrhu: Vzorkovací frekvence je 8 rad/s.

$H(z) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3}{d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + z^4}$		
	Antoniou	INVAR
c_1	2.0704126099E-2	2.0704115762E-2
c_2	2.0789952444E-1	2.0789948419E-1
c_3	1.4674496376E-1	1.4674501386E-1
d_0	1.9702866951E-2	1.9702872987E-2
d_1	-1.6112205431E-1	-1.6112205302E-1
d_2	5.6070962114E-1	5.6070961592E-1
d_3	-1.0449874000E0	-1.0449874061E0

Tab. 4.6. Výsledky návrhu: Vzorkovací frekvence je 16 rad/s.

4.5. Shrnutí

Tato kapitola popisuje algoritmus počítačového návrhu diskretních systémů z analogových prototypů metodou signálových invariancí, konkrétně invariance impulsní, skokové a lineární. Analogový prototyp může být popsán buď obecnou soustavou algebraicko-diferenciálních rovnic (např. rovnic *MMUN*), nebo stavovými rovnicemi, nebo přenosovou funkcí. Důležitou roli zde hraje algoritmus *ILT* (zejména v prvním nejobecnějším případě), na jehož přesnosti závisí přesnost celého návrhu.

Na základě popsané metody byl vyvinut počítačový program pro návrh diskretních filtrů, který je využíván na *K301 VA Brno* a *ÚRE AV ČR Praha* k výzkumným a výukovým účelům.

5. VÝPOČET INVERZNÍ TRANSFORMACE D POMOCÍ ALGORITMU ILT

Transformace D (© J. Hekrdla, ÚŘE AV ČR Praha) převádí analogový signál na posloupnost tak, že jsou na rozdíl od klasického vzorkování zachovány přesně relace mezi derivací analogového signálu a diferencí posloupnosti. Tak lze např. převést problém numerického řešení diferenciálních rovnic na jednodušší problém řešení rovnic diferenčních.

Inverzní transformace D je složitý problém, který je v současné době numericky řešen prostřednictvím konečné Laguerrovy řady. V této kapitole je popsána nová metoda výpočtu inverzní transformace D , která je založena na vzájemných souvislostech mezi transformacemi D , z a Laplaceovou. Numerickou přesnost celého výpočtu zajišťuje algoritmus inverzní Laplaceovy transformace (ILT), který pracuje uspokojivě i v případě periodických nebo divergentních signálů.

5.1. Úvod

V [22] je poprvé publikována nová integrální transformace, která převádí funkci reálné proměnné $x_a(t)$ na posloupnost $x(k)$ podle vztahu

$$x(k) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-\frac{t}{T}} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^k}{k!} dt. \quad (5.1)$$

Zde k je nezáporné celé číslo a T je reálná konstanta. Vzorec (1) definuje tzv. D transformaci funkce $x_a(t)$. Zkráceně jej budeme zapisovat pomocí operátoru D :

$$x(k) = D\{x_a(t)\} \quad (5.2)$$

Konstanta T zastává funkci jakési vzorkovací periody. Na rozdíl od klasického vzorkování, diskretní signál $x(k)$ získaný z analogového signálu $x_a(t)$ zachovává řadu jeho důležitých vlastností. Aplikujeme-li transformaci D na impulzní odezvu analogového systému, získáme impulzní odezvu ekvivalentního diskretního systému a diferenční rovnici popisující jeho chování. V [22] je dokázáno, že tuto diferenční rovnici lze jednoznačně určit z diferenciální rovnice analogového systému po náhradě derivace diferencí. Tuto základní vlastnost transformace D , totiž že *obrazem derivace je difference obrazu*, lze vyjádřit vztahem

$$D\left\{\frac{d}{dt} x_a(t)\right\} = \Delta_1 D\{x_a\} = \Delta_1 x(k), \quad (5.3)$$

$$\Delta_1 x(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T}.$$

Korespondence mezi diferenciální a diferenční rovnicí obou systémů je vzájemně jednoznačná, což není možné říci o korespondencích vznikajících použitím známých p - z transformací, kdy náhrada derivace diferencí znamená pouhou aproximaci. V praxi to znamená, že transformace D umožňuje zkoumat *přesně* chování analogových systémů prostřednictvím zkoumání diskretních systémů, ekvivalentních ve smyslu transformace D . K tomu je ovšem potřebné zvládnout i zpětný mechanismus přechodu od diskretního signálu na analogový, tj. inverzní transformaci D .

V práci [23], která je celá věnována inverzní transformaci D , je ukázáno, že neexistuje jádro transformace $g(k, t)$, které by umožňovalo zapsat inverzní transformaci v běžném tvaru

$$x_a(t) = D^{-1}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) g(k, t).$$

V [23] je proto problém inverze D -obrazu převeden na známý problém inverze jiné transformace, konkrétně transformace Laguerrovy.

Větší přesnosti i výpočetní rychlosti lze dosáhnout, využijeme-li souvislosti mezi transformacemi D , z a transformací Laplaceovou.

5.2. Inverze D -obrazu pomocí numerické inverze Laplaceova obrazu

Z definičního vztahu transformace D lze odvodit následující souvislosti mezi transformacemi D , z a Laplaceovou [22]:

$$x(k) = D\{x_a(t)\} \Rightarrow Z\{x(k)\} = \frac{1}{T} L\{x_a(t)\} \quad \left| \quad p = \frac{1-z^{-1}}{T} \right. \quad (5.4)$$

Symbole D , Z a L jsou označeny operátory transformací D , z a Laplaceovy.

Z (5.4) je zřejmé, že problém výpočtu signálu $x_a(t)$ z posloupnosti $x(k)$ může být řešen v následujících krocích:

1. Nalezení z -obrazu posloupnosti $x(k)$.
2. Transformace z -obrazu na Laplaceův obraz signálu $x_a(t)$ substitucí $p = (1-z^{-1})/T$ podle (5.4).
3. Určení signálu $x_a(t)$ z jeho Laplaceova obrazu algoritmem numerické inverzní Laplaceovy transformace (ILT).

Nalezení z -obrazu posloupnosti $x(k)$

Realizace tohoto kroku závisí na typu řešeného problému. Vynechme triviální případ, kdy je znám algoritmus generace posloupnosti $x(k)$ ve formě diferenční rovnice. Častý je případ, kdy máme k dispozici pouze číselné hodnoty této posloupnosti. Pak je třeba určit racionální lomenou funkci operátoru z tak, aby se zadanou posloupností tvořila transformační pár transformace z . Jedná se o dnes již klasický problém identifikace diskrétního systému z impulsní nebo jiné odezvy, který je řešen např. v [25] a [38].

Transformace z -obrazu na Laplaceův obraz

Je dán z -obraz výchozí posloupnosti $x(k)$ ve formě racionální lomené funkce

$$K(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}, m \leq n. \quad (5.5)$$

Aplikací substituce $p = (1-z^{-1})/T$ a po vynásobení vzorkovací periodou dostaneme Laplaceův obraz hledaného analogového signálu (viz vzorec 5.4). Po zdlouhavém odvození lze psát výsledek v uzavřeném tvaru:

$$K(p) = T \frac{\sum_{k=0}^m c_k p^k}{\sum_{k=0}^n d_k p^k}, m \leq n,$$

$$c_k = (-T)^k \sum_{l=k}^m a_l \binom{l}{k} \quad (5.6)$$

$$d_k = (-T)^k \sum_{l=k}^n b_l \binom{l}{k}$$

Určení signálu $x_a(t)$ z jeho Laplaceova obrazu algoritmem numerické inverzní Laplaceovy transformace (ILT)

Algoritmus přesné inverzní Laplaceovy transformace obrazu ve tvaru racionální lomené funkce jsme popsali v kapitole 2. V [7] je ukázáno, že tento postup vede na velmi přesnou inverzní Laplaceovu transformaci i v případě, kdy originál osciluje nebo dokonce diverguje.

5.3. Shrnutí

V této kapitole je naznačen způsob výpočtu analogového signálu, známe-li jeho **D**-obraz. Problém inverzní *D*-transformace je převeden na již dříve vyřešený problém numerické inverzní Laplaceovy transformace. Celý algoritmus je poměrně jednoduchý a výsledky jeho testování ukazují na vysokou přesnost stanovení originálu i v případě jeho oscilace nebo divergence.

6. ALGORITMUS VÝPOČTU ČLENŮ MACLAURINOVY ŘADY SIGNÁLU Z JEHO DIFERENCIÁLNÍHO NEBO OPERÁTOROVÉHO POPISU

V této části popíšeme algoritmus výpočtu vyšších derivací signálu v počátku časové osy za předpokladu, známe-li buď jeho Laplaceův obraz nebo soustavu algebraicko - diferenciálních rovnic pro jeho generování. Dále poukážeme na některé aplikace tohoto algoritmu pro počítačovou simulaci obvodů.

6.1. Popis algoritmu

K všeobecně známým pravidlům Laplaceovy transformace se řadí věty o limitních hodnotách. V [29] se dokazuje, že je-li k -tá derivace funkce $f(t)$ exponenciálního řádu, tj.

$$|f^{(k)}(t)| < Me^{ct}, t > t_0$$

pro určitá čísla M, c, t_0 , pak

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} L\{f^{(k)}(t)\} = 0, \quad (6.1)$$

kde $L\{\}$ je označení operátoru Laplaceovy transformace. Po aplikaci pravidla pro Laplaceův obraz k -té derivace lze rovnici (6.1) přepsat na tvar

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [p^k F(p) - p^{k-1} f(0^+) - p^{k-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+)] = 0, \quad (6.2)$$

kde

$$f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t)$$

Klademe-li postupně v (6.2) za $k = 0, 1, 2, \dots$, dostaneme po krátkém výpočtu

$$0 = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) \quad (6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) \\ f'(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} [p^2 F(p) - pf(0^+)] \\ f''(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} [p^3 F(p) - p^2 f(0^+) - pf'(0^+)] \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0^+) &= \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \left[p^{k+1} F(p) - \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(0^+) p^{k-i} \right] \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Rovnost (6.3) je někdy označována jako matematický zápis 1. limitní věty. Tato rovnost platí vždy s výjimkou Laplaceových obrazů signálů, obsahujících zobecněné impulzy (Diracovy impulzy a jejich derivace). Tyto speciální případy dále vyloučíme ze svých úvah.

Vzorce (6.4) poskytují návod, jak na základě Laplaceova obrazu $F(p)$ postupně určit jednotlivé derivace signálu $f^{(k)}(0^+)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

V zápisech limit (6.4) není informace o imaginárních složkách operátoru p . Při numerickém vyšetřování je proto možné tyto imaginární složky považovat za nulové a s operátorem p pracovat jako s reálným číslem rostoucím nade všechny meze ($p \rightarrow \infty$ namísto $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$). Při počítačovém hledání limit pak není nutná komplexní aritmetika.

Ukážeme způsob hledání derivací pro často se vyskytující Laplaceův obraz ve tvaru racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}, m < n. \quad (6.5)$$

Při nerespektování podmínky $m < n$ by to znamenalo přítomnost zobecněných impulzů v originále $f(t)$.

Jednoduchým výpočtem lze ukázat, že za předpokladu (6.5) je možné (6.4) upravit na tvar

$$f(0^+) = \frac{a_{n-1}}{b_n}, \quad (6.6)$$

$$f^{(k)}(0^+) = \frac{a_{n-k-1} - \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(0^+) b_{i+n-k}}{b_n}, k > 0, a_j = 0, b_j = 0 \text{ pro } j < 0, b_n \neq 0.$$

Předchozí vzorce lze použít k jednoduchému rekurentnímu výpočtu vyšších derivací.

6.2. Příklady využití

Inverzní Laplaceova transformace rozvojem signálu v MacLaurinovu řadu

Z výsledků testování algoritmu je zřejmá jeho spolehlivost při výpočtu derivací značných řádů. Z vzorce (6.6) vyplývá, že doba výpočtu konkrétního počtu derivací nesouvisí se složitostí Laplaceova obrazu $F(p)$, konkrétně s řádem polynomů m a n . Proto je principiálně možné výše uvedeným způsobem určit v relativně krátkém čase značný počet koeficientů MacLaurinovy řady signálu a zrekonstruovat tak s vysokou přesností časový průběh v relativně širokém okolí počátku.

Výpočet matematických počátečních podmínek systému z fyzikálních počátečních podmínek

Uvažujme lineární dynamický systém popsany soustavou algebraicko-diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t), \quad (6.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t).$$

Zde $\mathbf{v}$ je vektor obsahující n hledaných obvodových veličin (zobecněných stavových veličin), $\mathbf{w}$ je vektor m vstupních veličin, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové, obecně singulární matice rozměru $(n \times n)$ a $\mathbf{C}$ je incidenční matice rozměru $(n \times m)$. Na systému je definováno l výstupů, které jsou sdruženy do vektoru výstupu $\mathbf{y}$. Matice $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ v algebraické výstupní rovnici mají rozměry $(l \times n)$ a $(l \times m)$. Stav systému je v čase $t = 0^+$ popsán vektorem fyzikálních počátečních podmínek $\mathbf{v}(0^+)$.

Úkolem je určit matematické počáteční podmínky

$$\mathbf{y}(0^+), \mathbf{y}'(0^+), \mathbf{y}''(0^+), \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}(0^+),$$

kde $r < n$ je řád systému, známe-li vektor fyzikálních počátečních podmínek.

Podrobíme-li rovnice (6.7) Laplaceově transformaci, dostaneme

$$(\mathbf{A} + p\mathbf{B})\mathbf{V}(p) = \mathbf{C}\mathbf{W}(p) + \mathbf{B}\mathbf{v}(0^+), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{D}\mathbf{V}(p) + \mathbf{E}\mathbf{W}(p).$$

K dobře známým numerickým úlohám patří algoritmy semisymbolické inverze matice $\mathbf{A} + p\mathbf{B}$ [19], [20], [31], [39]. Řešení je ve tvaru

$$[\mathbf{A} + p\mathbf{B}]^{-1} = \frac{\sum_{k=0}^r \mathbf{M}_k p^k}{\sum_{k=0}^r d_k p^k}, \quad (6.9)$$

kde $\mathbf{M}_k$ jsou jisté čtvercové matice a d_k koeficienty determinantu matice $\mathbf{A} + p\mathbf{B}$. Je zřejmé, že je-li Laplaceův obraz budicího signálu dán racionální lomenou funkcí, vede aplikace (6.9) na (6.8) na vyjádření Laplaceova obrazu složek výstupního vektoru rovněž pomocí racionálních lomených funkcí. Tím je úloha hledání matematických počátečních podmínek převedena na již dříve řešenou úlohu nalezení derivací signálu z jeho Laplaceova obrazu.

Přesná přechodová analýza spínaných obvodů

K zajímavým problémům počítačové simulace patří analýza přechodných jevů, které jsou vyvolávány skokovou změnou stavu analogových spínačů. V některých případech, které jsou typické pro obvody se spínanými kapacitami a některé spínané zdroje nebo měniče, může při modelování dojít k situaci, která vede na skokovou změnu napětí kapacitoru nebo proudu induktorem. V okamžiku sepnutí dochází k zdánlivému porušení Kirchhoffových zákonů. Tento jev se označuje anglickým termínem "*inconsistent initial conditions*" [33]. Analýza těchto obvodů klasickými metodami, např. numerickým řešením diferenciálních rovnic, zde selhává díky nevlastním derivacím obvodových veličin v okamžiku skokové změny stavu obvodu.

V [15] jsme popsali metodu přesného řešení těchto jevů pomocí operátorové metody a numerické inverzní Laplaceovy transformace. Je zde ukázán způsob, jak je možné z modifikovaných admitančních matic obvodu v obou kvazistabilních stavech, které lze algoritmicky sestavit přímo ze schématu, určit Laplaceův obraz vektoru obvodových veličin v časovém intervalu po skokové změně stavu. Aplikujeme-li na tento Laplaceův obraz algoritmus hledání koeficientů MacLaurinovy řady, jsme schopni s vysokou přesností zrekonstruovat přechodný děj vyvolaný změnou stavu spínače.

6.3. Shrnutí

V kapitole 6 je popsána metoda výpočtu vyšších derivací signálu v počátku časové osy, je-li znám operátorový popis tohoto signálu nebo popis pomocí soustavy generujících algebraicko-diferenciálních rovnic. Jsou uvedeny tři aplikace tohoto algoritmu, které se osvědčily při řešení některých problémů počítačové simulace elektrických obvodů.