

Makroobvody

Rovnovážný stav DC obvodu je udržován určitým udržovacím příkonem z napájecích zdrojů. Fluktuace z rovnovážného stavu $\delta \vec{u}$ změni tento výkon o

$$\delta P = \int_{\Gamma} \delta \vec{i}^T \cdot d\vec{v} = \int_{\Gamma} (\underline{G} \cdot \delta \vec{v})^T \cdot \delta \vec{v},$$

kde Γ je trajektorie výchylky. Pro DC obvod bez řízených zdrojů je matice $\underline{G}$ symetrická a platí

$$\delta P = \frac{I}{2} \cdot \delta \vec{u}^T \cdot \underline{G} \cdot \delta \vec{u},$$

což je výraz známý jako Rayleighova disipační funkce (disipační potenciál).

Podle zákonů nerovnovážné termodynamiky má systém tendenci přejít do stavu s minimální produkcí energie. O to se snaží reakční proud, který působí ve směru gradientu disipačního potenciálu, tedy

$$\delta \vec{i} = \frac{\partial(\delta P)}{\partial \vec{u}} = \underline{G} \cdot \delta \vec{u}.$$

Pracovní bod je lokálním minimem Rayleighovy funkce, což zaručují vlastní čísla matice $\underline{G}$ v kladné polorovině. Je-li rovnovážný stav nestabilní, disipační potenciál v něm nebude nabývat lokálního minima.

Rovnice pro virtuální odchylky je tedy přímým důsledkem termodynamických zákonů, přesněji řečeno zákona minimální produkce entropie. Dá se také interpretovat tak, že virtuální trajektorie minimalizuje okamžitý virtuální výkon. Virtuální trajektorie si „volí“ takovou cestu, která minimalizuje celkový výkon rozptýlený na rezistorech.

Předpokládejme, že součástí zapojení je makroobvod s r vývody, který svazuje uzlová napětí a proudy podmínkou $f(\vec{u}_M, \vec{i}_M) = 0$. Indexem M je znázorněno, že jde o uzly, ke kterým je makro připojeno. Vzhledem k tomu, že pracujeme s infinitesimálními výchylkami a linearizovanými modely, můžeme vazební podmínku přepsat na tvar

$$f(\vec{u}_M, \vec{i}_M) = f_1 u_1^M + \dots + f_r u_r^M = \vec{f}^T \cdot \vec{u}^M = 0.$$

Tak např. OZ zanáší do odporové sítě vztah mezi dvěma vstupními uzly a uzlem, ke kterému je připojen výstup

$$f(u_{out}, u_+, u_-) = u_{out} - A \cdot (u_+ - u_-) = 0, A \text{ je stejnosměrné zesílení.}$$

Zbytek obvodu popsany vodivostní maticí $\underline{G}$ má tendenci reagovat ve směru gradientu disipačního potenciálu, avšak nyní je vázán podmínkou f . Obvodové rovnice se dají opět získat hledáním lokálního extrému potenciálové funkce, tentokrát však extrému vázaného. Použijeme známou metodu Lagrangeových multiplikátorů a budeme řešit extrémální úlohu pro modifikovanou Rayleighovu funkci

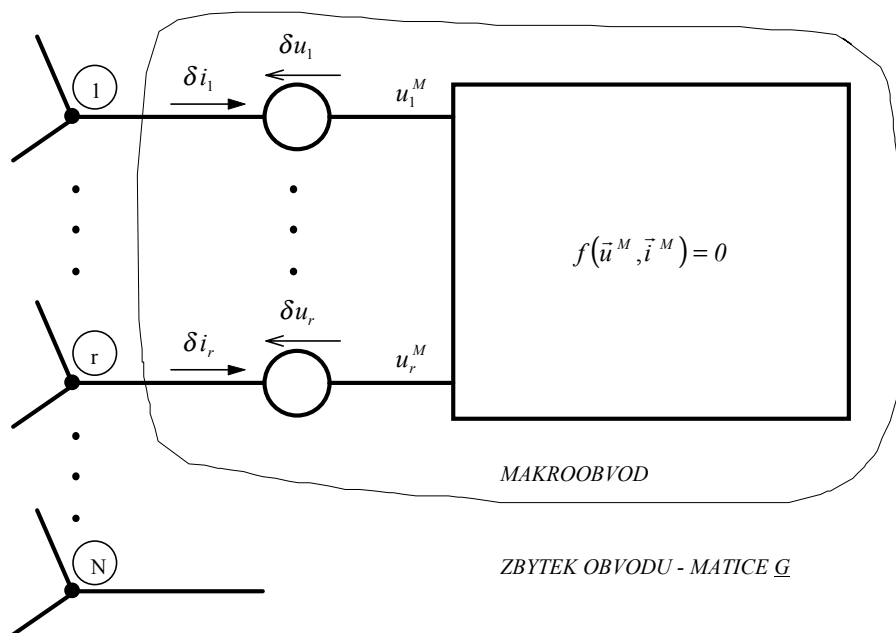
$$\tilde{R}(\vec{u}) = \frac{I}{2} \cdot \vec{u}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot f, \quad (3)$$

kde λ je tzv. Lagrangeův neurčitý multiplikátor. Obvodové rovnice získáme derivováním rovnice (3) podle jednotlivých uzlových napětí

$$\underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \underline{G} \cdot \vec{u} + \vec{i}_r = \vec{0}, \quad (4)$$

$\vec{i}_r$ je proudová reakce udržující v platnosti podmínku f . Tato reakce je kromě uzlových napětí další neznámou a. znamená proud, který dodává makroobvod do sítě svými přívody. Úvahou o derivaci ve vztahu (4) snadno dospějeme k závěru, že makromodel vyšel jako reciprocitní součástka, která přispívá ke splnění podmínky f všemi svými vývody. Je to způsobeno tím, že řešíme extrémální úlohu, která historicky vznikla v analytické mechanice, kde platí princip rovnosti akce a reakce. Nereciprocitní prvky jako např. OZ se snaží splnit danou vazbu pouze některými svými vývody, např. výstupem OZ. Tuto skutečnost zohledníme váhovými koeficienty $0 \leq K_i \leq 1$, které přiřadíme každému vývodu makra:

$$\underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} f_1 K_1 \\ \vdots \\ f_r K_r \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (5)$$



Obr. 5. Zařazení makra do obvodu.

Pro přehlednost jsou uzlová napětí číslována tak, že prvních r uzlů je rezervováno pro vývody makroobvodu. Proto je zbytek vektoru proudových reakcí doplněn nulami. Vztah (5) spolu s vazební podmínkou umožňuje vypočítat všechna uzlová napětí a neurčitý člen λ , ze kterého zjistíme všechny proudy mezi makrem a zbytkem obvodu.

Nyní zapojíme do každého přívodu makra zdroj napěťové fluktuace podle obr.5. Jsou to jediné vnější zdroje, budeme tedy sledovat stabilitu nuly. Výsledný systém virtuálních rovnic lze zapsat maticově jako

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \underline{G} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -f_1 & \dots & -f_r & \bar{\theta}^T \end{array} \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} f_1 \cdot K_1 \\ \vdots \\ f_r \cdot K_r \\ \bar{\theta} \end{array} \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|} \hline \vec{u} \\ \hline \lambda \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \bar{\theta} \\ \hline \delta_u f \end{array}$$

$\underline{G}^*$

Platí, že

$$\delta_u f = f_1 \cdot \delta u_1 + \dots + f_r \cdot \delta u_r = \vec{f}^T \cdot \delta \vec{u} \neq 0. \quad (6)$$

Považujeme-li fluktuace za vnitřní problém makroobvodu, dojdeme k důležitému závěru: díky fluktuacím nedokáže makroobvod přesně splnit vazební podmínku. Výraz (6) udává mikroskopickou chybu vazby.

Obrácená rovnice dá

$$\begin{array}{|c|} \hline \vec{u} \\ \hline \lambda \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & c \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|} \hline \bar{\theta} \\ \hline \delta_u f \end{array}$$

$\underline{G}^{*-1}$

Z této rovnice můžeme získat důležitý vztah

$$\lambda = c \cdot \delta_u f. \quad (7)$$

Rovnice (7) udává jedinou podstatnou závislost mezi fluktuací a jejím následkem. Říká, že reakce na nerovnováhu vzniklou fluktuací *libovolné* veličiny uvnitř makroobvodu je přímo úměrná míře porušení vazební podmínky. O stabilitě rozhoduje konstanta úměrnosti c .

Doplníme za λ a $\delta_u f$ a dostaneme

$$\delta \vec{i} = c \cdot \begin{bmatrix} f_1 \cdot K_1 \\ \vdots \\ f_r \cdot K_r \end{bmatrix} \cdot [f_1 \quad \dots \quad f_r] \cdot \delta \vec{u} = \underline{g} \cdot \delta \vec{u}.$$

Jelikož matice $\underline{g}$ obsahuje pouze jednu podstatnou korelaci mezi $\delta \vec{u}$ a $\delta \vec{i}$, bude mít pouze jedno nenulové vlastní číslo. Pro DC stabilitu musí toto číslo ležet v pravé polorovině komplexní roviny.

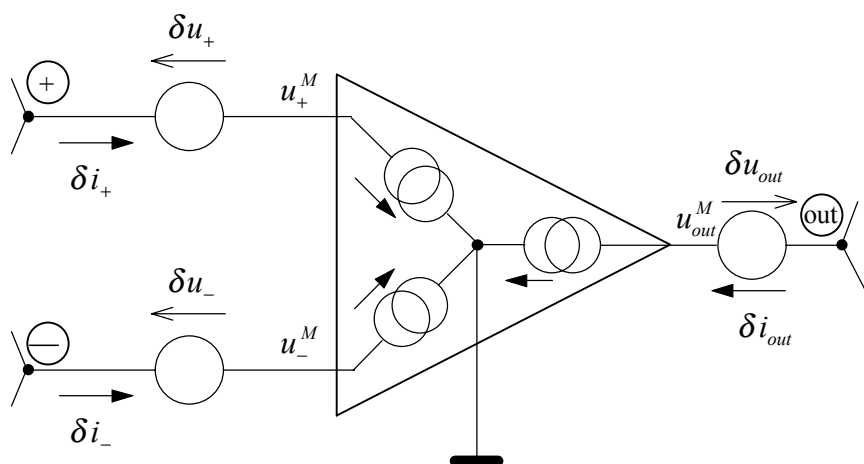
Obecně mohou makroobvody zanašet mezi obvodové veličiny více algebraických vazeb. Každá vazební podmínka si k sobě přibere jeden Lagrangeův multiplikátor. Počet vlastních čísel neboli vlastních imitancí rozhodujících o DC stabilitě bude roven počtu vazeb. Tak např. každý OZ zaneše do obvodu jednu imitanci, dvojbran dvě imitance.

Operační zesilovače

Vyjdeme z jednoduchého makromodelu OZ, který zanaší do obvodu podmínku

$$f(u_{out}^M, u_+^M, u_-^M) = u_{out}^M - A \cdot (u_+^M - u_-^M) = 0, \quad (8)$$

kde A je stejnosměrné zesílení.



Obr. 6. Modelování OZ.

Proudy tekoucí přes vývody OZ budou podle vztahu (5)

$$\begin{bmatrix} \delta \vec{i}_+ \\ \delta \vec{i}_- \\ \delta \vec{i}_{out} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \end{bmatrix},$$

kde K_+, K_-, K_{out} jsou konstanty sloužící k modelování nesymetrického chování OZ. Pro $K_+ = K_- = 0$ dostáváme OZ s nekonečným vstupním odporem, takže součástka se snaží splnit podmínku f pouze dodáváním proudu do výstupního uzlu. Podmínka $K_+ \neq K_-$ umožní modelovat proudovou nesymetrii vstupů.

Je-li OZ připojen k odporové síti s vodivostní maticí $\underline{G}$, můžeme psát soustavu obvodových rovnic rozšířených o vazební podmínku f

$$\begin{bmatrix} \underline{G} & \begin{matrix} -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \\ \vec{\theta} \end{matrix} \\ \hline A & -A & -I & \vec{\theta}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\theta} \\ \delta_u f \end{bmatrix}.$$

$\underline{G}^*$

Pro jednoduchost jsme opět zvolili číslování uzlů počínaje vývody OZ. V obecném případě by došlo pouze k přeskupení posledního sloupce a řádku matice $\underline{G}^*$.

Informaci o DC stabilitě opět obsahuje „levý dolní“ člen matice $\underline{G}^{*-1}$, který jsme výše označili jako konstantu úměrnosti c . Celková virtuální rovnice pro všechny fluktuace bude

$$\begin{bmatrix} \delta \vec{i}_+ \\ \delta \vec{i}_- \\ \delta \vec{i}_{out} \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A & A & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \vec{u}_+ \\ \delta \vec{u}_- \\ \delta \vec{u}_{out} \end{bmatrix} = \underline{g} \cdot \begin{bmatrix} \delta \vec{u}_+ \\ \delta \vec{u}_- \\ \delta \vec{u}_{out} \end{bmatrix}.$$

Matice $\underline{g}$ opět obsahuje pouze jedno nenulové vlastní číslo, které můžeme považovat za dominantní imitanci celého obvodu. DC stabilita vyžaduje, aby ležela v pravé polorovině komplexní roviny.

Pokud modelujeme OZ s nekonečně velkým vstupním odporem, makromodel se zjednoduší na jeden řízený zdroj pracující do výstupu. Zdroj fluktuace postačí také jeden (do série s výstupem) a bude platit $\delta \vec{i}_{out} = \lambda$, $K_{out} = I$. Virtuální rovnice bude jednorozměrná

$$\delta i_{out} = c \cdot \delta u_{out}.$$

Podmínka DC stability zní

$$c > 0.$$

Dvojbrany

Často pracujeme s dvojbrany, které jsou charakterizovány svými konstantami vypočtenými pro aktuální pracovní bod. Také každý dvojbran přináší do obvodu zpětné vazby, které mohou být podle způsobu zapojení pro DC nebo obecnou stabilitu nebezpečné.

Dále uvedený postup ukazuje, jak se dá jeden dvojbran začlenit do obvodových rovnic, ze kterých lze určit virtuální matici.

Uvažujme dvojbran, který zavádí do obvodu dvě vodivostní podmínky

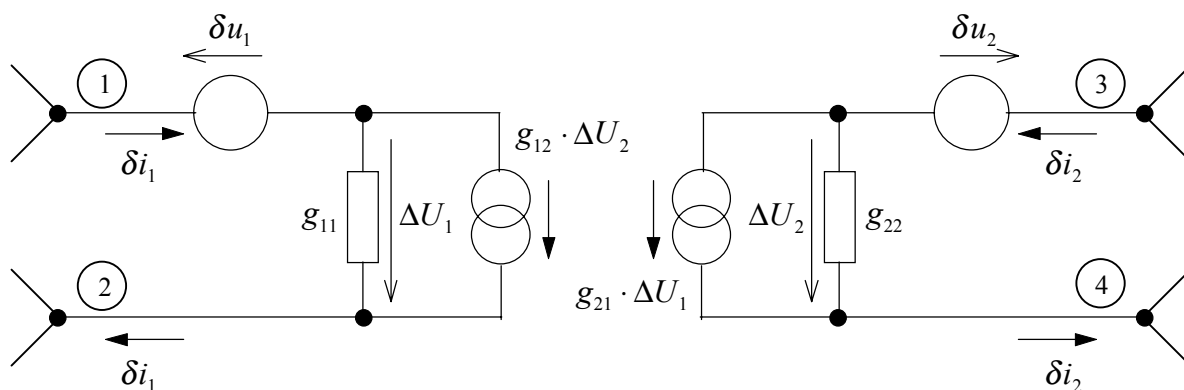
$$f_1 = g_{11} \cdot \Delta U_1 + g_{12} \cdot \Delta U_2 - \delta i_1 = 0,$$

$$f_2 = g_{21} \cdot \Delta U_1 + g_{22} \cdot \Delta U_2 - \delta i_2 = 0$$

nebo maticově

$$\vec{F} = \underline{g} \cdot \Delta \vec{U} - \delta \vec{i} = \vec{0}.$$

Dvojbran vložíme do odporové sítě spolu se zdroji fluktuace podle obr.7.



Obr. 7. Vložení dvojbranu do obvodu.

Obvodové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \underline{G} \\ -g_{11} & g_{11} & -g_{12} & g_{12} & \vec{0}^T \\ -g_{21} & g_{21} & -g_{22} & g_{22} & \vec{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta_u f_1 \\ \delta_u f_2 \end{bmatrix}.$$

V tomto případě jsme opět použili první uzly vektoru pro všechny vývody dvojbranu. Nebudeme dvojbran nijak omezovat konstantami K , proto platí přímo

$$\lambda_1 = \delta \vec{i}_1, \lambda_2 = \delta \vec{i}_2.$$

Inverzní rovnice dá

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \delta i_1 \\ \delta i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^{*-1} \\ \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta_u f_1 \\ \delta_u f_2 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne

$$\begin{bmatrix} \delta i_1 \\ \delta i_2 \end{bmatrix} = \underline{C} \cdot \begin{bmatrix} \delta_u f_1 \\ \delta_u f_2 \end{bmatrix} = \underline{C} \cdot \underline{g} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Z rovnice (9) je vidět, že informaci o DC stabilitě dávají vlastní čísla matice $\underline{C}$, resp. $\underline{Cg}$.

Každý dvojbran tedy přináší dvě vlastní imitance, protože musí být testován dvěmi fluktuacemi. Tento počet jde samozřejmě ve speciálních případech zredukovat, pokud je jeden zdroj fluktuace společný pro více dvojbranů.