



Grantová agentura České republiky

DC STABILITA

studie druhé etapy řešení projektu

GA ČR č. 102/98/0782

VARIAČNÍ METODY V TEORII OBVODŮ A JEJICH VYUŽITÍ K TESTOVÁNÍ STABILITY

Autor:

Ing. Zdeněk Biolek

FEI VUT BRNO, Ústav telekomunikací

Brno, leden 2000

Obsah

VÝCHODISKA STUDIE A NOVÉ VÝSLEDKY	3
VÝCHODISKA	3
NOVÉ VÝSLEDKY	3
ZPŘESNĚNÍ DEFINIC A ZÁKLADNÍCH POJMŮ	4
KLASICKÉ DEFINICE.....	4
TERMODYNAMICKÉ DEFINICE.....	5
ZJIŠŤOVÁNÍ OBLASTÍ DC STABILITY A ODHALOVÁNÍ DC NESTABILITY	6
VSTUPNÍ ÚVAHY.....	6
OBLASTI DC STABILITY.....	7
DC NESTABILITA	8
VÝZKUM DC OBVODŮ S ALGEBRAICKÝMI VAZBAMI.....	9
ZÁKLADNÍ POJMY	9
MATEMATICKÁ FORMULACE	10
PODMÍNKY DC STABILITY	11
PERSPEKTIVY METODY	12
DC STABILITA NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ	13
OBECNÉ PŘEDPOKLADY	13
POČÍTAČOVÉ SIMULACE	13
<i>Výpočet rovnovážných stavů.....</i>	<i>13</i>
<i>Časová analýza.....</i>	<i>14</i>
<i>Frekvenční analýza.....</i>	<i>15</i>
ANALYTICKÉ METODY.....	16
<i>DC analogie první Ljapunovovy metody.....</i>	<i>16</i>
<i>DC analogie druhé Ljapunovovy metody.....</i>	<i>17</i>
<i>DC analogie Lurjeho metody</i>	<i>18</i>
VÝCHODISKA A ÚKOLY PRO POSLEDNÍ ETAPU VÝZKUMU.....	20
LITERATURA	20

Východiska studie a nové výsledky

Východiska

Východiska této studie je možno nalézt v předchozí studii [1] a dají se shrnout do těchto bodů:

I. Definice a základní pojmy

Byl proveden rozbor různých definičních pojmů týkajících se stability DC obvodů. Pro potřeby dalšího výzkumu jsme zvolili takové pojetí DC (ne)stability, které vyhovuje jak klasickému pojetí stability dynamických systémů, tak termodynamickému pohledu na ryze stejnosměrné obvody.

II. Metody testování DC stability

Byly navrženy v zásadě dvě metody pro testování DC stability: metoda záporných odporů a metoda virtuálních trajektorií.

III. DC obvody s algebraickými vazbami

Byl odvozen postup, jak aplikovat variační princip minimální produkce entropie na DC obvody s algebraickými vazbami. Algebraickou vazbou se rozumí algebraická vazební podmínka, která je udržována mezi obvodovými veličinami makroobvodem. Příkladem může být napěťový zesilovač. Metoda vede k získání výkonové funkce obvodu, která vypovídá svým průběhem v okolí rovnovážného bodu o stabilitě tohoto bodu.

IV. Relace mezi DC a obecnou stabilitou

Bylo uvedeno tzv. imitanční kritérium stability, které sjednocuje pohledy na DC a obecnou stabilitu obvodu.

Nové výsledky

Tato studie obsahuje stručný přehled výsledků výzkumu za rok 1999, který vycházel z bodů I. až IV. a rozvinul je do nových výsledků takto:

1) Zpřesnění definic a základních pojmů

Na základě dalšího výzkumu byly upřesněny náhledy na některé základní pojmy a definice okolo DC obvodů a jejich stability.

2) Zjišťování oblastí DC stability a odhalování DC nestability

Při rozvíjení metody virtuálních trajektorií jsme se snažili snižovat počet zdrojů odchylek, neboť to mělo za následek snižování řádu virtuální matice. Ukázalo se, že tato procedura sice nemá vliv na odhalení DC nestabilního bodu, ale má vliv na stanovení oblasti DC stability. Bylo potřeba věnovat se tomuto problému.

3) Výzkum DC obvodů s algebraickými vazbami

Variační princip byl zobecněn tak, aby mohl být makroobvod testován nejen napěťovými, ale i proudovými zdroji odchylek. To vede na realizaci makroobvodu zajišťujícího danou algebraickou podmínku pomocí řízených zdrojů proudu i napětí.

Bylo dokázáno, že DC nestabilitu nezpůsobuje typ algebraické vazby, ale způsob její realizace. Nestabilitu může způsobit pouze nereciprocitní realizace vazby.

Byl nalezen způsob návrhu nových obvodových struktur, které realizují danou algebraickou podmínku.

4) DC stabilita nelineárních systémů

DC stabilita je zjišťována u nelineárních obvodů imitančním kritériem stability za pomoci simulačních programů.

Byly učiněny první pokusy, jak stanovit výkonovou funkci nelineárního DC obvodu.

Byl učiněn pokus o vytvoření analogie Ljapunovovy funkce pro DC obvody.

Zpřesnění definic a základních pojmů

Většina autorů, kteří se věnují problematice stejnosměrné stability, vychází z „klasické“ definice DC obvodu, který se chápe jako limitní případ reálného obvodu pro vektor reaktančních parametrů blížící se nule. V [1] jsme navrhli vlastní variantu klasické definice. Navrhli jsme také „termodynamickou“ definici DC obvodu.

Klasické definice

- ✓ *DC obvod je limitním případem reálného obvodu s reaktančními prvky, ve kterém přechází vektor reaktančních parametrů k nule.*

Výhodou tohoto pojetí je to, že vyjadřuje přesně to, co si intuitivně pod DC obvodem představujeme. V rovnovážném stavu se skutečně reaktanční prvky neuplatňují. Všechny klidové stavy jsou řešením algebraických rovnic obvodu, ve kterém zkratujeme všechny indukory a rozpojíme všechny kapacitory. Fyzikálně to znamená, že DC stabilita je schopnost obvodu eliminovat *pomalé* fluktuace kolem rovnovážného stavu způsobené např. kolísáním napájecího napětí, teploty, postupnou změnou parametrů součástek apod., jak je uvedeno v [1].

Z „klasického“ pojetí DC obvodu vyplývá „klasické“ pojetí DC stability:

- ✓ *Obvod je DC stabilní, je-li obecně stabilní pro libovolný infinitesimální vektor reaktančních parametrů.*
- ✓ *Obvod je DC potenciálně stabilní, jestliže pro některé infinitesimální vektory reaktančních parametrů je obvod obecně stabilní a pro jiné je obecně nestabilní.*
- ✓ *Obvod je DC nestabilní, je-li obecně nestabilní pro libovolný infinitesimální vektor reaktančních parametrů.*

Je zřejmé, že tyto definice jsou důležité pro pochopení podstaty DC stability a jejího vztahu k obecné stabilitě dynamického systému. Vyplývá z nich např. to, že DC stabilita je nutnou, nikoliv však postačující podmínkou stability přidruženého dynamického systému. Naopak obvod DC nestabilní nelze stabilizovat rozšířením o další reaktanční prvky, tj. nelze jej kmitočtově kompenzovat. Zároveň to znamená, že tento druh nestability není způsoben dynamickými, ale stejnosměrnými zpětnými vazbami. Informace o DC nestabilitě je tedy obsažena v samotné topologii obvodu a jeho parametrech. K získání této informace tudíž v zásadě nepotřebujeme ani časový faktor ani žádnou z klasických metod testování stability. Když půjdeme v těchto úvahách dále, zjistíme, že nám nebude k ničemu ani klasická definice DC stability. Navíc žádná z těchto definic nám nedává rozumný nástroj pro test stability. Co nám vlastně „klasické“ definice nabízejí v oblasti metod?

Nejspolehlivější metoda pro zjišťování stability by byla tato: analyzujeme model, který v sobě zahrnuje na úrovni soustředěných parametrů všechny reaktanční prvky, tj. parazitní kapacity a indukčnosti všech součástek a propojovacích vodičů, kapacity mezi všemi uzly, indukčnosti v každé větvi a velké množství vzájemných indukčností. Při modelování makroobvodů jako jsou operační zesilovače (OZ) apod. uvažujeme frekvenčně závislé parametry, omezenou šířku pásma atd. Za těchto podmínek dávají všechny klasické testy stability správné výsledky. Potíž je v tom, že pracovat s takto složitým modelem je prakticky nemožné. Téměř vždy tedy považujeme hodnoty většiny parazitních reaktancí a proiri za nulové. Jinak řečeno startujeme proces limitního přechodu vektoru reaktančních parametrů k nule, a to velice nešťastným způsobem. Zanedbáním parazitní kapacity nebo indukčnosti můžeme totiž hned na počátku vyloučit právě ten jediný podstatný parametr, který zapříčiňuje nestabilitu. Zanedbávání parametrů vede k potížím, které jsou v modelování velmi dobře

známy. Postupně degraduje řád systému a tím se mění skokově jeho vlastnosti. Navíc obecně záleží na směru, ze kterého se vektor parametrů blíží k nule, takže DC obvod jako limita podle klasické definice ani nemusí existovat. „Zanedbání“ parametru s podstatným vlivem na stabilitu navíc způsobuje obtížně vysvětlitelné paradoxy způsobené tím, že nejsou splněny předpoklady pro použití kritéria stability (viz např. [6]).

„Klasické“ definice DC obvodu a DC stability se tedy prozatím ukazují jako neplodné co do metod k testování stability. Museli bychom znát obecný způsob, jak rozšířit libovolný obvod o „podstatné“ reaktance, a pak provést test na obecnou stabilitu. Je otázkou, zda je takové rozšíření řešitelným problémem.

Jak bylo uvedeno výše, informace o DC nestabilitě se skrývá v samotné topologii obvodu a jeho stejnosměrných parametrech. Jde-li nám pouze o testování DC nestability, obejdeme se bez jakéhokoliv rozšiřování obvodů o parazitní reaktance, neboť ty nemají na DC nestabilitu žádný vliv. Navrhli jsme soubor termodynamických definic, které tuto skutečnost respektují.

Termodynamické definice

- ✓ *DC obvod je termodynamický systém popsáný zobecněnými toky I (elektrické proudy) a zobecněnými silami U (elektrická napětí).*

Výhoda tohoto pojetí DC obvodu je v tom, že se zcela obejdeme bez reaktančních prvků a bez klasické dynamiky. Místo ní nastupuje tzv. virtuální dynamika založená na variaci obvodových veličin a energetickém přístupu, který vychází z principu minimální produkce entropie platného pro termodynamické systémy. Definice DC stability rovnovážného bodu založená na tomto principu zní takto:

- ✓ *Rovnovážný bod je DC stabilní, pokud libovolná virtuální odchylka od tohoto bodu zvyšuje energetický stav obvodu, tj.*

$$\delta P(\delta \vec{y}) > 0, \quad (1)$$

kde $\delta \vec{y}$ je virtuální odchylka stavu od rovnováhy a δP je výkon dodaný touto odchylkou do obvodu.

Termodynamické pojetí DC obvodu a stability nám také dává jednoduchou metodu pro testování stability, která je navíc snadno algoritmizovatelná. Obvod se vychýlí z rovnovážného bodu obecným směrem a vypočítá se výkon dodávaný zdroji odchylek. Pro DC stabilitu musí být podle (1) tento výkon vždy kladný. Test spočívá ve zjišťování polohy vlastních čísel virtuální matice v komplexní rovině [1].

Zjišťování oblastí DC stability a odhalování DC nestability

Vstupní úvahy

Nechť $\vec{y}$ je vektor popisující stav obvodu a $\vec{y}_0$ je testovaný rovnovážný bod. Podstatou termodynamického testu DC stability je sledování energetických poměrů při virtuálních změnách stavu z $\vec{y}_0$ do $\vec{y} = \vec{y}_0 + \delta \vec{y}$. Podmínkou DC stability je, aby libovolná virtuální změna stavu oproti rovnovážnému stavu *zvyšovala* energetickou hladinu systému. DC stabilní bod bude ležet v lokálním *minimu* energetické funkce.

Obvod tedy budeme vychylovat z rovnovážného bodu. Pro každou odchylku budeme sledovat výkon δP dodaný do obvodu. Rovnovážný stav je DC stabilní, právě když platí *pro všechny* infinitesimální odchylky $\delta \vec{y}$

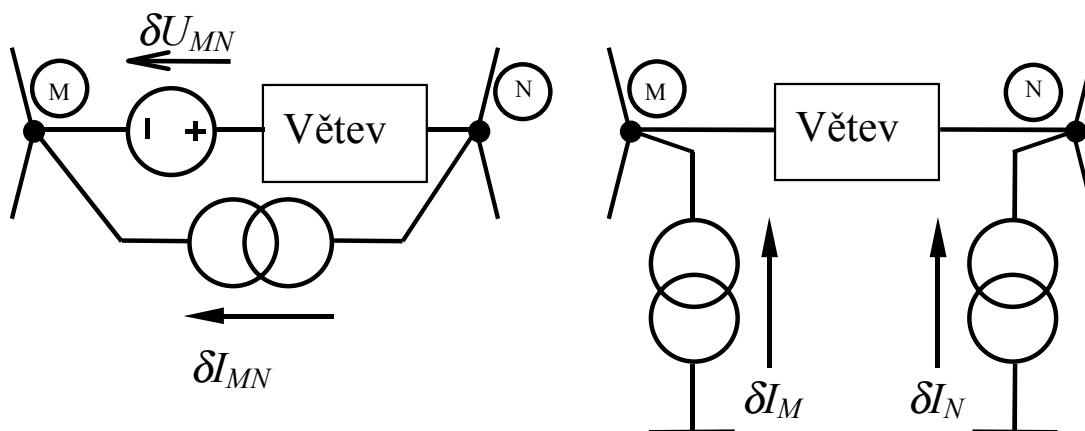
$$\delta P(\delta \vec{y}) > 0. \quad (2)$$

Zbývá vyřešit problém, jak realizovat odchylky $\delta \vec{y}$ od rovnovážného bodu. Musíme umístit do obvodu zdroje fluktuací $\delta \vec{x}$ tak, aby se jejich prostřednictvím prověřilo celé okolí rovnovážného bodu. Budeme mluvit o *úplné soustavě zdrojů odchylek*. Pak bude platit, že nerovnost (1)

$$\delta P(\delta \vec{x}) > 0$$

je nutnou a postačující podmínkou DC stability rovnovážného bodu $\vec{y}_0$. Kdyby byly zdroje $\delta \vec{x}$ vybrány a umístěny tak, že by neprověřily celé okolí rovnovážného bodu $\vec{y}_0$, pak by platnost podmínky (1) byla pouze nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro DC stabilitu.

Kdybychom chtěli opravdu spolehlivě prověřit chování systému v okolí rovnovážného stavu, asi bychom vložili do zkoumaného obvodu všechny myslitelné zdroje fluktuací. Předpokládejme, že obvod má konečný počet uzlů a tedy i větví. Vložme do každé větve zdroj napět'ové fluktuace a mezi každé dva uzly zdroj proudové fluktuace, jak to ukazuje levá část obr. 1. Při počtu n nezávislých uzlů bude celkový počet P_u napět'ových a P_i proudových zdrojů odchylek $P_u = P_i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.



Obr. 1. Ekvivalentní způsoby vložení zdrojů odchylek do obvodu.

Je zřejmé, že buzení téhož obvodu n různými zdroji odchylek na pravé straně obr. 1 bude ekvivalentní za předpokladu, že

$$\delta I_M = \sum_N (\delta I_{MN} + \delta U_{MN} \cdot g_{MN}), \quad (3a)$$

$$\delta I_N = \sum_M (\delta I_{MN} + \delta U_{MN} \cdot g_{MN}), \quad (3b)$$

kde g_{MN} je diferenciální vodivost větve M-N. Sumace se uskutečňují přes všechny zbývající uzly a formálně platí, že $\delta I_{MN} = -\delta I_{NM}$ a $\delta U_{MN} = -\delta U_{NM}$.

Z obr. 1 a vztahů (3a) a (3b) plyne důležitý závěr: stav obvodu reprezentovaný vektorem uzlových napětí $\vec{U}$ může být spolehlivě rozmitán v celém okolí rovnovážného bodu $\vec{U}_0$ vektorem odchylek $\vec{I}$ tekoucích do nezávislých uzlů. Tento soubor zdrojů odchylek je tedy úplný. Zároveň platí, že menší počet zdrojů proudových fluktuací než n neprovede celé okolí rovnovážného bodu $\vec{U}_0$.

Pokud obvod linearizujeme kolem rovnovážného bodu, sledujeme stabilitu nuly. Uzlová napětí budou zároveň odchylkami od rovnovážného stavu neboli $\vec{U} = \delta \vec{U}$ a budou záviset na zdrojích odchylek podle zákona

$$\underline{G} \cdot \delta \vec{U} = \delta \vec{I}, \quad (4)$$

kde $\underline{G}$ je vodivostní matice obvodu. V tomto případě je matice $\underline{G}$ také virtuální maticí, která ukazuje napěťovou reakci obvodu na virtuální proudovou odchylku. Tato matice v sobě obsahuje informaci o topologii i parametrech obvodu a tím i informaci o DC stabilitě.

Ze vztahu (4) pak vyplývá, že výkon dodaný do obvodu libovolnou výchylkou z nuly je

$$\delta P = \delta \vec{U}^T \cdot \delta \vec{I} = \delta \vec{U}^T \cdot \underline{G} \cdot \delta \vec{U},$$

což je kvadratická forma, která musí být v případě DC stabilní nuly pozitivně definitní. K tomu dochází právě v případě, když má obecně nesymetrická virtuální matice všechna vlastní čísla λ_i v pravé komplexní polorovině.

Oblasti DC stability

Často potřebujeme stanovit hodnoty obvodových parametrů, pro které je daný stav DC stabilní nebo nestabilní. Jinak řečeno zjišťujeme hranice stability v prostoru parametrů.

V [1] je ukázáno, že vložíme-li do obvodu vždy jen jeden zdroj odchylky, redukuje se termodynamický test stability na metodu záporných odporů. Virtuální matice je jednorozměrná a její vlastní číslo je zároveň imitancí, do které pracuje zdroj odchylky. Uvažujeme-li současné působení všech zdrojů odchylek, pracujeme s virtuální maticí, jejíž diagonální prvky jsou pracovními imitancemi *individuálně* působících zdrojů odchylek. Pracovními imitancemi *současně* působících zdrojů odchylek jsou vlastní čísla matice, která se od prvků v hlavní diagonále přirozeně liší. Z toho vyplývá, že velikost konkrétní pracovní imitance se mění s připojením nebo odpojením jiných zdrojů odchylek. V praxi může nastat extrémní situace, kdy všechny prvky hlavní diagonály virtuální matice jsou kladné a přitom některé z vlastních čísel leží v záporné komplexní polorovině. Znamenalo by to, že individuálně působící zdroje odchylek by nezaznamenaly existující nestabilitu.

Z toho, co bylo dosud uvedeno, jednoznačně vyplývá následující poučka:

- *Pro bezpečné stanovení oblastí stability musíme zvolit úplnou soustavu zdrojů odchylek.*

Je třeba dodat, že ne vždy to musí být zdroje proudu, jak ukazuje pravá strana obr. 1. Mnohdy se nepodaří sestavit použitelnou vodivostní matici vycházející z metody uzlových

napětí. Vždy však stačí vložit do obvodu úplnou soustavu zdrojů fluktuací $\delta \bar{x}$ a určit virtuální matici $\underline{H}$, která je jádrem kvadratické formy dodávaného výkonu

$$\delta P = \delta \bar{y}^T \cdot \underline{H} \cdot \delta \bar{y},$$

kde $\delta \bar{y}$ je napěťová reakce na proudovém zdroji nebo proudová reakce na napěťovém zdroji fluktuace.

DC nestabilita

Velmi často nám nejde o přesné stanovení hranic stability, ale pouze o bezpečné odhalení všech DC nestabilních bodů. V takovém případě není nutné prohledávat fluktuacemi celý stavový prostor v okolí rovnovážného bodu. Stačí se zaměřit na ty nadroviny (řezy) stavového prostoru, kde se DC nestabilita může projevit neexistencí lokálního minima energetické disipační funkce. V praxi to znamená, že soubor zdrojů odchylek nebude úplný. Výhodou je snížení řádu virtuální matice. Nevýhodou je to, že výsledky testu nelze použít pro stanovení oblastí stability.

V [1] je ukázáno, že bezpečný test DC nestability lze provést umístěním zdrojů odchylek do výkonných částí řízených zdrojů. Řád virtuální matice je pak roven počtu řízených zdrojů v obvodu.

Z dosavadních úvah vyplývá, že správný výběr soustavy zdrojů odchylek může být složitým problémem. Tyto zdroje však potřebujeme pouze k tomu, abychom prováděli variaci stavu kolem rovnovážného bodu. Pro test DC stability je podstatná pouze závislost energetického stavu obvodu na odchylce od rovnováhy, tj. $\delta P(\delta \bar{y})$. Proto byl výzkum zaměřen ještě jiným směrem, který by umožnil zcela se oprostit od problému výběru zdrojů fluktuací. Tento směr využívá některých výsledků nerovnovážné termodynamiky a byl naznačen v předcházející studii [1] jako problém DC obvodů s algebraickými vazbami.

Výzkum DC obvodů s algebraickými vazbami**Základní pojmy**

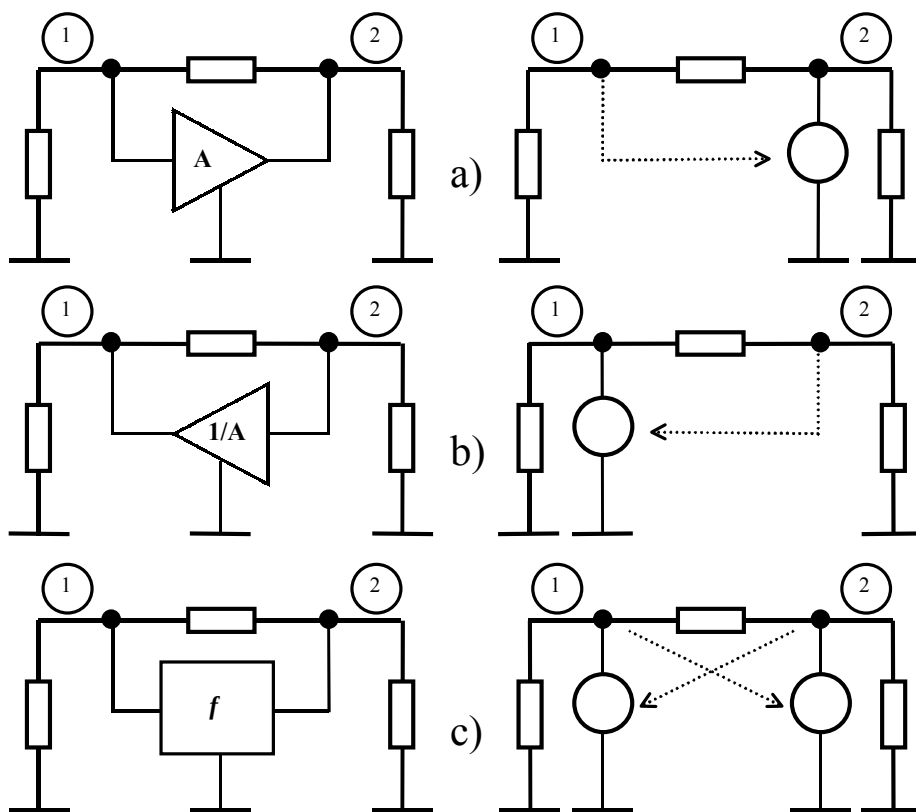
Velmi často se setkáváme s obvodovými prvky, které zanášejí mezi stavové proměnné algebraické vazby typu

$$f(\vec{u}) = 0.$$

Tak např. ideální zesilovač napětí svazuje napětí vstupního a výstupního uzlu podmínkou

$$f = U_2 - A \cdot U_1 = 0.$$

Na obr. 2 je ukázáno, že zajištění této podmínky lze realizovat mnoha způsoby, přičemž je podstatné, kam umístíme výkonný prvek, který splnění podmínky zajišťuje (v našem případě napěťový řízený zdroj). Případy a) a b) jsou triviální, v případě c) je podmínka zajištěna dvěma řízenými zdroji, přičemž každý se může na její realizaci podílet s jinou vahou. První dvě realizace jsou tedy zvláštními případy poslední obecné varianty.



Obr. 2. Různé realizace vazby $f = U_2 - A \cdot U_1 = 0$.

Je možný ještě jeden výklad situace z obr. 2. Splnění vazební podmínky $f = 0$ zajišťují různé makroobvody z levé části obrázku takto: v případě a) pouze proudem do uzlu ②, v případě b) pouze proudem do uzlu ① a v případě c) proudy do obou uzlů ① i ②.

Matematická formulace

Předpokládejme, že obvod je po linearizaci tvořen odporovou sítí popsanou vodivostní maticí $\underline{G}$ rozměru $n \times n$ a že uzlová napětí jsou vázána $\mathbf{r}$ algebraickými podmínkami

$$f^1(\vec{u}) = 0, \dots, f^r(\vec{u}) = 0. \quad (5)$$

Linearizací těchto podmínek dostaneme pro okolí rovnovážného bodu

$$\begin{aligned} f_1^1 u_1 + \dots + f_n^1 u_n &= 0, \\ &\vdots \\ f_1^r u_1 + \dots + f_n^r u_n &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Zajištění každé z podmínek (5) bude mít na starosti jeden makroobvod, přičemž může použít pro tento účel proudové řízení do libovolných uzlů. Rovnice (6) představíme v přijatelnějším maticovém tvaru

$$\underline{F}^T \cdot \vec{u} = \vec{0},$$

kde

$$\underline{F}^T = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdot & \cdot & f_n^1 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ f_1^r & \cdot & \cdot & f_n^r \end{bmatrix}$$

je matice vazebních podmínek. Dále zavedeme matici zohledňující způsob, jakým se každý makroobvod bude podílet na splnění své podmínky proudovými příspěvky do jednotlivých uzlů. Je to matice

$${}^k \underline{F} = \begin{bmatrix} f_1^1 k_1^1 & \cdot & \cdot & f_1^r k_1^r \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ f_n^1 k_n^1 & \cdot & \cdot & f_n^r k_n^r \end{bmatrix},$$

kde k_i^j je váhový koeficient od 0 do 1, který udává váhu, se kterou přispívá makroobvod zajišťující splnění j -té podmínky proudovým řízením do uzlu i .

Dá se ukázat, že výsledná struktura bude popsána maticovou rovnicí

$$\begin{bmatrix} \underline{G} & {}^k \underline{F} \\ \underline{F}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta_u \vec{F} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kde $\vec{\lambda}$ je vektor tzv. Lagrangeových multiplikátorů, jehož fyzikálním významem je vektor proudů, které jsou jednotlivými makroobvody rozdělovány do jednotlivých uzlů podle příslušných vah k_i^j ,

$\delta_u \vec{F} = \underline{F}^T \cdot \delta \vec{u}$ je tzv. mikroskopická chyba vazeb, která udává míru nesplnění zadaných podmínek vlivem fluktuací uvnitř makroobvodů. Je přitom zcela podružné, jakého typu jsou tyto fluktuace a kde přesně v makroobvodu působí.

Podmínky DC stability

Nutná a postačující podmínka DC stability zní takto:

- ✓ Uvažovaná odporová síť s vodivostní maticí $\underline{G}$ a s vazbami danými rovnicemi (6) je DC stabilní, právě když rozšířená matice

$$\underline{G}^* = \begin{bmatrix} \underline{G} & {}^k \underline{F} \\ \underline{F}^T & 0 \end{bmatrix}$$

má všechna vlastní čísla v pravé komplexní polorovině.

Všimněme si, že v rovnici (7) je místo i pro vnější zdroje proudových odchylek do každého napěťového uzlu. Uvnitř makroobvodů navíc působí všechny myslitelné fluktuace, které jsou zastoupeny výslednou chybou vazby $\delta_u \vec{F}$. Proto je splněna podmínka úplného systému zdrojů odchylek, aniž bychom museli věnovat pozornost problému konkrétní volby těchto zdrojů.

Postačující podmínka pro DC nestabilitu zní takto:

- ✓ Pokud platí, že matice

$$\underline{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \underline{F}$$

má alespoň jedno vlastní číslo v levé komplexní polorovině, systém je DC nestabilní.

Platí totiž, že

$$\vec{\lambda} = \underline{C} \cdot \delta_u \vec{F} = [\underline{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \underline{F}]^{-1} \cdot \delta_u \vec{F}, \quad (8)$$

takže matice $\underline{C}$ je submaticí matice $\underline{G}^{*-1}$. Odtud plyne, že také matice $\underline{G}^*$ má vlastní čísla v levé komplexní polorovině, čímž je tvrzení dokázáno.

Ze struktury matic $\underline{G}^*$ a $\underline{C}$ plyne tento další poznatek:

- ✓ Pokud jsou libovolné algebraické vazby v rezistorové síti s kladnými odpory realizovány reciprocitním způsobem, tj. $k_i^j = 1$, pak je výsledný obvod vždy DC stabilní.

Důkaz plyne ze vztahu (8) pro ${}^k \underline{F} = \underline{F}$ a využívá toho, že podobnostní transformace reálné a pozitivně definitní matice $\underline{G}^{-1}$ pomocí reálné matice $\underline{F}$ dává pozitivně semidefinitní matici $\underline{C}$.

Existuje-li v odporové síti pouze jedna vazební podmínka, redukuje se matice $\underline{F}^T$ a ${}^k \underline{F}$ na vektory $\vec{F}^T$ a ${}^k \vec{F}$. Pak bude platit vztah mezi chybou vazby a Lagrangeovým členem

$$\lambda = \underline{C} \cdot \delta_u F = [\vec{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \vec{F}]^{-1} \cdot \delta_u F,$$

přičemž koeficient C se dá dopočítat jako

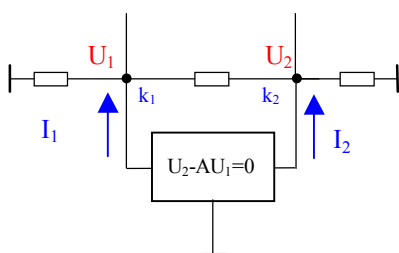
$$C = \frac{\det(\underline{G})}{\det(\underline{G}^*)} = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n+1} \lambda_j^*}, \quad (9)$$

kde λ_i a λ_j^* jsou vlastní čísla matic $\underline{G}$ a $\underline{G}^*$. V případě odporové sítě složené z kladných odporů bude matice $\underline{G}$ symetrická a všechna její vlastní čísla λ_i budou reálná a kladná.

Uvažujeme-li pro jednoduchost pouze reálná vlastní čísla i u matice $\underline{G}^*$, pak záporný koeficient C bude indikovat podle rovnice (9) pouze *lichý počet* záporných vlastních čísel matice $\underline{G}^*$. Bude-li tento počet sudý a různý od nuly, obvod bude DC nestabilní a v koeficientu C se to přitom neprojeví.

Perspektivy metody

Předkládaná metoda je postavena natolik obecně, že dovoluje otestovat velmi široký okruh DC systémů, především však takových, ve kterých se vyskytují prvky zanášející do obvodu vazby typu „vstup – výstupní charakteristika“, „n-branové rovnice“ a vůbec součástky popisované metodami „behavioral modelling“. Dovoluje testovat zapojení s prvky, které se dosud nepodařilo syntetizovat, ale které jsou známy svým požadovaným chováním. Metoda navíc dává návod k realizaci takových prvků. Příkladem může být třísvorkový prvek z obr. 3, který zajišťuje trvalou platnost podmínky $U_2 - A \cdot U_1 = 0$.



Obr. 3. Prvek udržující danou podmínku.

Konstanty K_1 a K_2 jsou váhy od 0 do 1, kterými můžeme ovlivnit míru, s jakou se podílejí oba přívody makroobvodu na splnění podmínky. Pro $K_1=0$ a $K_2 \neq 0$ dostaneme ideální zesilovač napětí se zesílením A se vstupem v uzlu 1 a výstupem v uzlu 2 (viz případ a) na obr. 1). Pro $K_1 \neq 0$ a $K_2=0$ vznikne ideální zesilovač napětí se zesílením A^{-1} a se vstupem v uzlu 2 a výstupem v uzlu 1 (viz případ b) na obr. 1). Jestliže zvolíme $K_1=K_2 \neq 0$, dostaneme prvek, který se chová jako „DC transformátor“. Nezavádí do obvodu žádnou neregiprocitu a nezpůsobuje ani DC nestabilitu. Obvod lze syntetizovat pomocí zdrojů proudu I_1 a I_2 které jsou odvozeny od základního proudového zdroje λ podle předpisu

$$I_1 = -A \cdot \lambda \cdot k_1, \quad I_2 = \lambda \cdot k_2,$$

zdroj proudu λ se nastaví na správnou hodnotu podle konfigurace odporové sítě.

Vypracovali jsme také metodu syntézy pomocí zdrojů napětí. Metoda bude publikována později.

Součástky syntetizované tímto způsobem vykazují řadu zvláštních vlastností, z nichž mnohé jsou DC analogiemi vlastností známých z časové a frekvenční oblasti.

Metoda také ukazuje, že příčinou DC nestability bývá neregiprocitní realizace žádaných vazebních podmínek. Evidentní je to u prvků, které zajišťují danou podmínku jen jedním vývodem, jako je tomu např. u OZ. Základní příčinou DC nestability je pak skutečnost, že systém se stává za daných podmínek neřiditelným (viz [2]).

DC stabilita nelineárních systémů

Obecné předpoklady

Dosavadní metody pro analýzu DC stability vycházely z linearizovaného modelu. Linearizace se provedla kolem zkoumaného rovnovážného bodu. Zapojení s polovodičovými součástkami mohou mít více rovnovážných bodů, z nichž některé jsou DC nestabilní a o jejich existenci nemusíme mít ani tušení. Vždyť v roce 1994 ukázal prof. Green v článku [7], že alespoň polovina ze všech rovnovážných bodů systému jsou DC stabilní body a ostatní jsou DC nestabilní. Etapu linearizace musí proto nutně předcházet etapa analýzy obvodu jako nelineárního systému, ve které se mj. hledají pokud možno všechny rovnovážné body, zvláště DC nestabilní. Zopakujme si některé zvláštnosti těchto bodů:

- Jsou „nepozorovatelné“ neboli skryté a při normální funkci obvodu se nemusí nijak projevit jejich existence.
- Ačkoliv od sebe odpuzují trajektorii, obvykle k nim velmi dobře konvergují numerické algoritmy pro vyhledávání pracovních bodů.
- Nestabilitu nelze kmitočtově vykompenzovat.
- Při nedostatečném rozšíření obvodu o reaktanční prvky mohou selhat klasická kritéria stability založená na metodě pólů.

A zde jsou některé důvody svědčící o užitečnosti vyhledávání DC nestabilních bodů:

- I když jsou „nepozorovatelné“, přesto ovlivňují celkové chování obvodu (náběhy do pracovního bodu, rozhodují o nutnosti použít startovací obvody, urychlují trajektorii do nežádoucího pracovního bodu apod.).
- Některé analýzy prováděné v těchto bodech ztrácejí přímý fyzikální význam (AC analýza).
- Těžko se hledají a identifikují jako DC nestabilní.

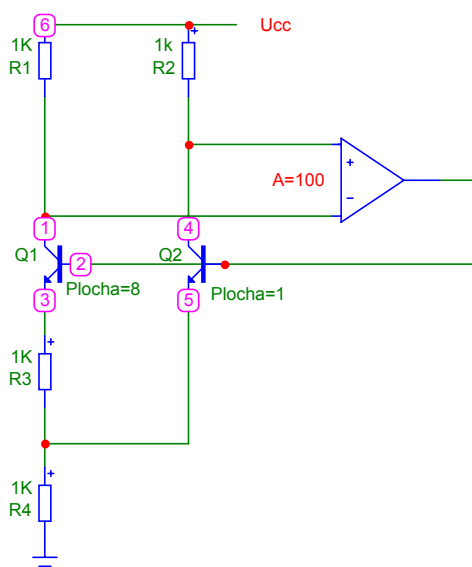
Výzkum nelineárních obvodů jsme prováděli v oblasti simulací za použití imitancií kritéria stability a v oblasti analytické, kde jsme se zaměřili na vybudování DC analogií Ljapunovových metod a Lurjeho metody.

Počítačové simulace

Výpočet rovnovážných stavů

Počítačovými prostředky vyhledáváme pokud možno všechny rovnovážné body obvodu. Na obr. 4 je schéma band-gap buňky podle Brokawa [3] s vyznačenými čísly napěťových uzlů. Rovnovážné body jsou celkem tři a jejich seznam je v tabulce (uzel 6 je napájecí a je na něm +10V proti zemi).

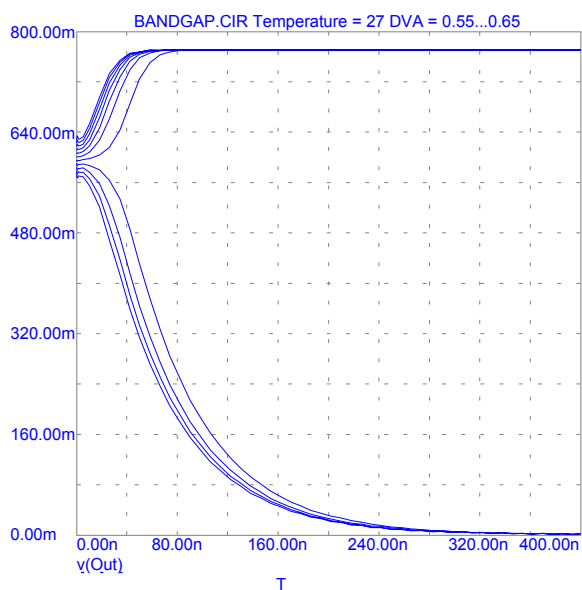
Číslo uzlu	Napětí	Napětí	Napětí
1	9,993V	9,950V	10,0V
2	601,3mV	770,4mV	0,0V
3	22,1mV	142,0mV	0,0V
4	9,999V	9,958V	10,0V
5	11,9mV	92,1mV	0,0V
6	10,0V	10,0V	10,0V



Obr. 4. Band-gap reference.

Časová analýza

Časová analýza ukazuje, že body charakteristické výstupními napětími 770,4mV a 0V jsou stabilní, bod s výstupním napětím 601,3 mV je DC nestabilní. Trajektorie se od tohoto bodu odpuzují, i když je počáteční odchylka od rovnováhy velmi malá a probíhá pomalu.



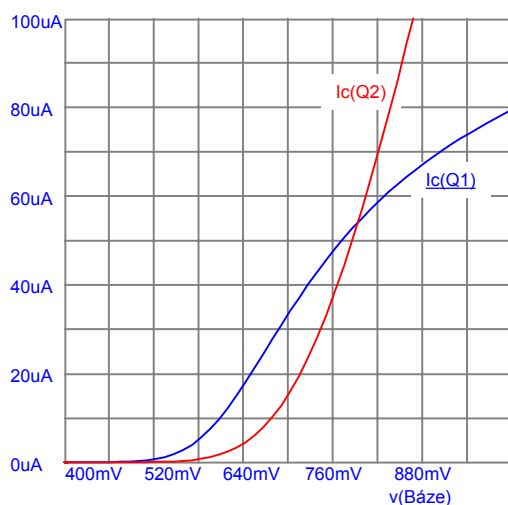
Obr. 5. Výstupní napětí B-G buňky.

Je zajímavé, že při DC analýze pomocí obvodového simulátoru byl spočítán pouze DC *nestabilní* bod, body stabilní musely být zjištěny až časovou analýzou.

Existence DC nestabilního bodu není na první pohled vůbec zřejmá a vyplyne až z detailní analýzy poměrů na bázích tranzistorů podle obr. 6, na kterém jsou představeny závislosti kolektorových proudů obou tranzistorů na společném bázevém napětí.

Tranzistor Q_1 má 8× větší plochu emitoru než tranzistor Q_2 a proto se otevírá „ochotněji“. Tato přednost je vyvážena celkově větším emitorovým odporem, takže obě charakteristiky se setkají při bázevém napětí přibližně 790mV. Bázevé napětí je zároveň výstupním napětím chybového zesilovače, který zesiluje odchylku úměrnou rozdílu kolektorových proudů.

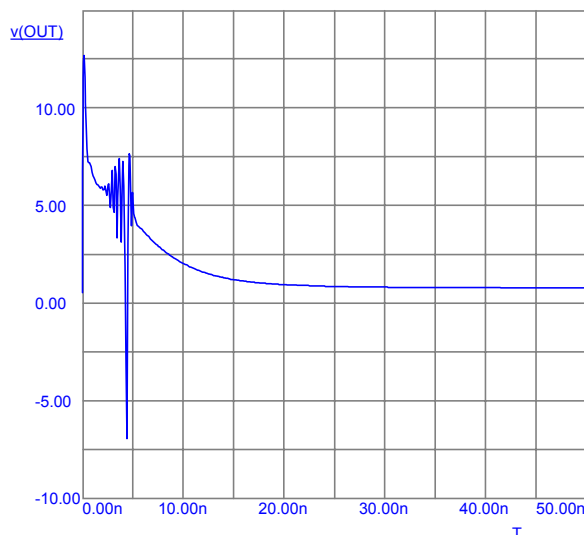
Stabilní bod s výstupním napětím 770,4 mV je stabilizován tak, že fluktuace tohoto napětí směrem nahoru snižuje rozdíl kolektorových proudů a tím klesne napětí na diferenčním vstupu zesilovače. Fluktuace se vyrovná snížením bázevého napětí. Podobně je možno vysledovat funkci zpětnovazebního mechanismu při opačné fluktuaci.



Obr. 6. Nelinearita jako příčina DC nestability.

Z tvaru charakteristik můžeme také odvodit stabilitu bodu s bázevým napětím 0V i nestabilitu bodu s bázevým napětím 601,3 mV. DC nestabilita je způsobena tvarem nelinearity.

DC nestabilní bod má vliv na dynamiku obvodu a projeví se vždy, když se do jeho blízkosti dostane trajektorie např. při zapnutí, jak ukazuje obr. 7.



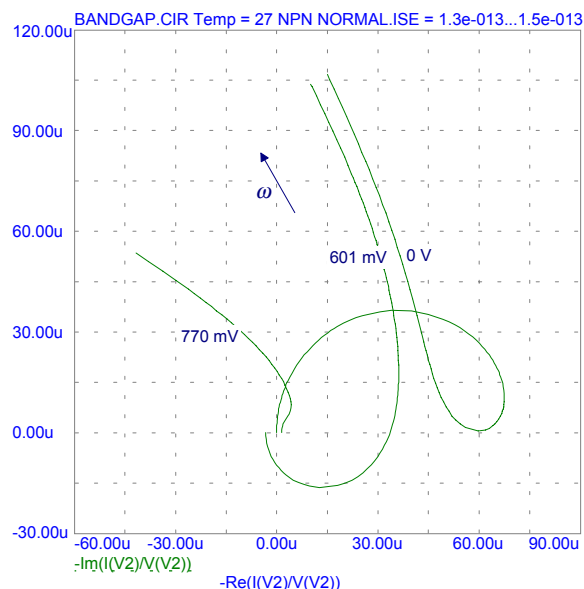
Obr. 7. Skutečný náběh reference na 770,4 mV.

Skrytý DC nestabilní bod se projeví při náběhu, kdy v kombinaci s vlastní dynamikou musí trajektorie překonávat lokální maximum disipační potenciálové funkce. Odpudivá síla tohoto bodu se projeví také při pomalém náběhu, kdy se pozvolna zvyšuje napájecí napětí a systém skončí v opačném stabilním bodě, tj. s nulovým výstupním napětím.

Frekvenční analýza

Na nelineárním obvodu můžeme provést test na stabilitu imitancním kritériem [4] pro každý rovnovážný stav zvlášť.

Na obr. 8 jsou znázorněny frekvenční charakteristiky admitance, do které pracuje zdroj fluktuace umístěný do výstupu chybového zesilovače.



Obr. 8. Charakteristiky výstupní vodivosti zesilovače.

Křivka pro výstupní napětí 601 mV začíná na záporné reálné ose, což indikuje zápornou stejnosměrnou vodivost a tedy DC nestabilitu. Ostatní dva průběhy ukazují na DC i klasickou stabilitu. Křivka pro výstupní napětí 0 V začíná sice v počátku souřadnic, avšak na stabilitu můžeme usoudit z dalšího průběhu pro vyšší frekvence (není uvedeno na obr. 8). Využijeme přitom plného znění imitanciálního kritéria:

- ✓ *Nechť $X(j\omega)$ je imitance, do které pracuje zdroj fluktuace. Rovnovážný stav bude vzhledem k této fluktuaci stabilní, pokud budou současně splněny tyto podmínky:*
 - $\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} > 0$,
 - *hodograf funkce $X(j\omega)$ pro $\omega \in \langle -\infty, \infty \rangle$ obkrouží počátek komplexní roviny ve směru hodinových ručiček právě N - krát, kde N = počet nulových bodů imitance $X(p)$ v pravé komplexní polorovině.*

Všimněme si, že se obecně vyšetřuje stabilita vůči konkrétní fluktuaci. Opět platí, že zvolíme-li zdroj odchylky nevhodně, nemusí se prověřit všechny podstatné části stavového prostoru a kritérium nemusí dávat nutnou a zároveň postačující podmínku stability.

Analytické metody

Výzkum jsme zaměřili na vyhledávání DC analogií Ljapunovových metod testování stability. První Ljapunovova metoda vychází z linearizovaného modelu, druhá počítá s nelineárním modelem a přináší pojem Ljapunovovy funkce. Výzkum se dotkl také některých metod pro generování Ljapunovovy funkce, zvláště pak Lurjeho metody.

DC analogie první Ljapunovovy metody

Věty první Ljapunovovy metody říkají, do jaké míry můžeme ze stability linearizovaného modelu usuzovat na stabilitu skutečného nelineárního systému. Odpovídají na otázku, jaký vliv mají na stabilitu členy, které byly při linearizaci zanedbány [5]. Následují některé zásadní poznatky:

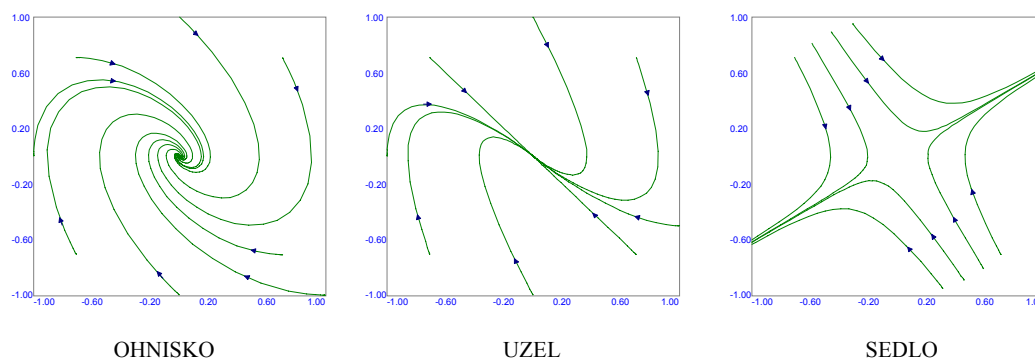
Leží-li všechny kořeny charakteristické rovnice linearizované soustavy v levé komplexní polorovině, je skutečný systém lokálně stabilní.

Leží-li byť i jen jediný kořen charakteristické rovnice v pravé komplexní polorovině, je skutečný systém nestabilní.

Leží-li některý kořen charakteristické rovnice na imaginární ose, nelze o stabilitě skutečného systému rozhodnout na základě linearizovaného modelu.

Stabilita se přitom definuje jako schopnost systému vrátit se do rovnovážného stavu, jestliže skončilo působení poruchy, která jej z tohoto stavu vychýlila. Tvary trajektorií, po kterých se tento návrat uskutečňuje, jsou v těsném okolí rovnovážných stavů přesně dány polohou kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině. Podle typu trajektorie pak dělíme rovnovážné body na ohniska, uzly, středy a sedla.

U ryze DC obvodů nemůžeme sledovat časové trajektorie. Pomocí termodynamického přístupu lze však studovat tzv. virtuální trajektorie, které udávají tendence systému kolem rovnovážného bodu. Tyto trajektorie ukazují, jakým způsobem se likvidují nebo naopak rozvíjejí skutečné fluktuace od rovnováhy. Tvar těchto virtuálních trajektorií je jednoznačně dán polohou vlastních čísel virtuální matice v komplexní rovině. Některé trajektorie skutečných DC systémů jsou uvedeny na obr. 9.



Obr. 9. Různé typy virtuálních trajektorií.

Na základě těchto analogií můžeme stanovit následující definici DC stability:

- ✓ *DC stabilita je schopnost systému likvidovat virtuální odchylky od rovnovážného stavu po virtuální trajektorii.*

Dále můžeme stanovit DC analogii první Ljapunovovy metody:

- ✓ *Leží-li všechna vlastní čísla virtuální matice linearizované soustavy v pravé komplexní polorovině, je skutečný systém lokálně stabilní.*
- ✓ *Leží-li byť i jen jediné vlastní číslo virtuální matice v levé komplexní polorovině, je skutečný systém nestabilní.*
- ✓ *Leží-li některé vlastní číslo virtuální matice na imaginární ose, nelze o stabilitě skutečného systému rozhodnout na základě linearizovaného modelu.*

DC analogie druhé Ljapunovovy metody

Druhá Ljapunovova metoda převádí zkoumání směru trajektorií kolem rovnovážného bodu na zkoumání aktuální hodnoty skalární funkce stavu. Základní myšlenky metody by se daly shrnout takto:

Jestliže lze k danému systému nalézt takovou definitní Ljapunovovu funkci stavu, aby její časová derivace byla při vlastním pohybu také definitní, ale s opačným znaménkem, je daný systém asymptoticky stabilní. Semidefinitní časová derivace znamená pouhou stabilitu.

Jestliže časová derivace Ljapunovovy funkce je definitní, přičemž Ljapunovova funkce má v libovolné malé oblasti kolem rovnovážného bodu stejné znaménko jako její časová derivace, je daný systém nestabilní.

Myšlenka je tedy prostá: hodnota funkce, která např. roste s rostoucí vzdáleností od rovnovážného bodu, musí u stabilního systému při skutečném pohybu monotónně klesat. Hodnotou jediné skalární funkce tak můžeme pohodlně sledovat tendence všech možných trajektorií.

U DC obvodů platí princip minimální produkce entropie, který zaručuje, že DC stabilní rovnovážný stav leží na dně disipační jámy, po jejíchž stěnách se likvidují všechny fluktuace. Tvar disipační jámy může být vyjádřen disipačním potenciálem jako funkcí stavu. DC obdoba druhé Ljapunovovy funkce by tedy mohla vypadat takto:

- ✓ *Jestliže lze k danému systému nalézt takovou definitní Ljapunovovu funkci stavu, aby její derivace podle směru virtuální trajektorie byla také definitní, ale s opačným znaménkem, je daný systém asymptoticky DC stabilní. Semidefinitní derivace znamená pouhou DC stabilitu.*
- ✓ *Jestliže je derivace Ljapunovovy funkce podle směru virtuální trajektorie definitní, přičemž Ljapunovova funkce má v libovolné malé oblasti kolem rovnovážného bodu stejné znaménko jako její derivace, je daný systém DC nestabilní.*

U systémů, kde jsme ztratili kontakt s fyzikálním pozadím jevů, bývá obtížné nalézt Ljapunovovu funkci. U DC systémů toto nebezpečí nehrozí. Ze samotného faktu, že k DC obvodu přistupujeme jako k termodynamickému systému, plyne následující tvrzení:

- *Ljapunovovou funkcí DC obvodu je jeho disipační potenciál.*

Hledání disipačního potenciálu jako globální funkce stavu může být velmi obtížnou úlohou, avšak pro posouzení lokální DC stability se bez ní naštěstí obejdeme. Dobrou představu o průběhu potenciálu v okolí rovnovážného stavu dává kvadratická forma, na kterou vede vztah (2) a jejímž jádrem je virtuální matice.

DC analogie Lurjeho metody

Lurje navrhl metodu generování Ljapunovovy funkce pro systémy obsahující jeden nelineární a několik lineárních členů. Funkce se hledá ve tvaru součtu kvadratické formy stavu a integrálu z dané nelinearity. Pomineme-li značnou komplikovanost konkrétního provedení této metody, je možno vidět velkou podobnost mezi tímto přístupem a způsobem, jak nalézt průběh disipačního potenciálu u nelineárního DC obvodu.

Budeme-li zkoumat virtuální pohyb ve stavovém prostoru uzlových napětí, pak bude další směr virtuální trajektorie dán vektorem proudové reakce

$$\delta \vec{i} = -\frac{\partial P}{\partial \vec{u}}, \quad (10)$$

tj. virtuální pohyb se děje proti směru gradientu disipačního potenciálu. Tento potenciál (neboli Ljapunovova funkce) musí být tedy integrální funkcí

$$P(\vec{u}) = \int_{\Gamma} \vec{i}^T(\vec{v}) \cdot d\vec{v}, \quad (11)$$

kde integrační dráhou je křivka začínající v rovnovážném bodě. Nutno poznamenat, že funkce $\vec{i}(\vec{u})$ by měla být v okolí rovnovážného bodu potenciální, jinak by totiž velikost potenciálu (11) závisela na integrační cestě. Tento předpoklad však nebývá splněn ani

v linearizovaném případě u neregiprocitních obvodů, kde relace mezi vektory proudu a napětí je dána nesymetrickou imitancí maticí. Řešení takové situace jsme nastínili v [8].

Předpokládejme nyní lineární DC obvod s jedním nelineárním rezistorem s charakteristikou

$$i_R = i_R(u_R).$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že u_r je zároveň uzlovým napětím. Lineární část obvodu nechť má vodivostní matici $\underline{G}$. Disipační potenciál bude

$$P(\vec{u}) = \int_{\Gamma} (\underline{G} \cdot \vec{v})^T \cdot d\vec{v} + \int_{u_{R0}}^{u_R} i_R(\sigma) \cdot d\sigma,$$

kde integrační cesta končí vektorem $\vec{u}$. V případě potenciálnosti matice $\underline{G}$ dostaneme z lineární části kvadratickou formu, takže

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{u} + \int_{u_{R0}}^{u_R} i_R(\sigma) \cdot d\sigma.$$

Tento tvar Ljapunovovy funkce může být východiskem pro zkoumání tvaru virtuálních trajektorií v okolí rovnovážného stavu.

Východiska a úkoly pro poslední etapu výzkumu

Výsledky dosažené v roce 1999 se stávají východisky pro poslední etapu výzkumu. Zformulujeme dílčí cíle do budoucna:

- Využití metody syntézy obvodů se zadanou algebraickou podmínkou pro
 - navrhování nových obvodových prvků s předem zadanými vlastnostmi,
 - studium jejich dalších vlastností analytickými postupy i pomocí obvodové simulace,
 - studium DC a obecné stability obvodů s dosud známými syntetickými prvky.
- Rigorózní zpracování metody, která by umožňovala konstrukci disipačního potenciálu u neregulárních DC obvodů.
- Vpracování metody vizualizace disipačního potenciálu nelineárních obvodů (plocha v 3D prostoru).
- Postavení vazby mezi virtuální a klasickou dynamikou na rigorózní základ.
- Osvětlení fyzikálního pozadí imitačního kritéria stability.
- Algoritmizace všech výsledků použitelných pro analýzu a syntézu.

Literatura

- [1]BIOLEK,Z., BIOLEK,D.: DC stabilita. Studie úvodní etapy projektu, Brno, leden 1999.
- [2]BIOLEK,Z., BIOLEK,D.: Využití variačních principů v testování stability nesetrvavných obvodů. Přednáška na ÚRE AV, Praha, leden 1999.
- [3]BROKAW,A.P.: A Simple Three-Terminal IC Bandgap Reference. IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol.9, No.6, December 1974, pp. 388-393.
- [4]BIOLEK,Z.: Imitanční kritérium stability. STO-7, VA Brno 1999, str. 17-20.
- [5]KUBÍK,S., KOTEK,Z., ŠALAMON,M.: Teorie regulace. II. Nelineární regulace. SNTL, Praha 1969.
- [6]BIOLEK,Z.: DC (ne)stabilita analogových obvodů. Vyžádaná přednáška pro Design Centrum Motorola, Czech Group, Rožnov p.R. 1999.
- [7]GREEN,M.M.: (Almost) Half of Any Circuit's Operating Points are Unstable. IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. 41, No.4, April 1994, pp. 286-293.
- [8]BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.: Stability of DC Operating Points in the Networks with Controlled Sources. SYS'95, AMSE, July 3-5, 1995, Brno, Vol.4, pp. 26-30.