

2.4. Časově - frekvenční předzpracování obvodových rovnic.

V této části provedeme analytické předzpracování obvodových rovnic (5) s cílem odvození výpočtových vztahů pro zobecněné přenosové funkce v uzavřeném tvaru. V další části se pak budeme věnovat otázkám numerických výpočtů souvisejících s danými vztahy.

Rovnice (5) mohou být formálně řešeny takto:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1(s) &= (\mathbf{Y}_1^M)^{-1} \mathbf{D}_1 W_1(s) + (\mathbf{Y}_1^M)^{-1} \mathbf{C}_{12}^M \mathbf{v}_2(kT^-), \\ \mathbf{V}_2(s) &= (\mathbf{Y}_2^M)^{-1} \mathbf{D}_2 W_2(s) + (\mathbf{Y}_2^M)^{-1} \mathbf{C}_{21}^M \mathbf{v}_1(kT + T_1^-)\end{aligned}$$

Po aplikaci zpětné Laplaceovy transformace dostáváme:

Konec fáze 1: $t = kT + T_1^-$

$$\mathbf{v}_1(kT + T_1^-) = \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) w_1(kT + T_1 - \xi) d\xi + \mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{v}_2(kT^-) \quad (8)$$

Konec fáze 2: $t = kT + T^-$

$$\mathbf{v}_2(kT + T^-) = \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) w_2(kT + T - \xi) d\xi + \mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{v}_1(kT + T_1^-) \quad (9)$$

Z hlediska numerického řešení je podstatná skutečnost, že matice, resp. vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(t) &= L^{-1} \left\{ (\mathbf{Y}_1^M)^{-1} \right\} \mathbf{D}_1, \mathbf{g}_1^*(t) = L^{-1} \left\{ (\mathbf{Y}_1^M)^{-1} \right\} \mathbf{C}_{12}^M \\ \mathbf{g}_2(t) &= L^{-1} \left\{ (\mathbf{Y}_2^M)^{-1} \right\} \mathbf{D}_2, \mathbf{g}_2^*(t) = L^{-1} \left\{ (\mathbf{Y}_2^M)^{-1} \right\} \mathbf{C}_{21}^M\end{aligned} \quad (9a)$$

mohou být získány pomocí algoritmu inverzní Laplaceovy transformace $L^{-1}\{\cdot\}$ [1],[7].

Úpravou rovnic (8) a (9) získáme rekurentní vztahy pro vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(kT + T_1^-) &= \\ &= \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) w_1(kT + T_1 - \xi) d\xi + \mathbf{g}_1^*(T_1) \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) w_2(kT - \xi) d\xi + \mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{v}_1(kT + T_1^- - T),\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2(kT^-) &= \\ &= \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) w_2(kT - \xi) d\xi + \mathbf{g}_2^*(T_2) \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) w_1(kT + T_1 - T - \xi) d\xi + \mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{v}_2(kT - T^-)\end{aligned} \quad (11)$$

Rovnice (10) a (11) mohou být řešeny v kmitočtové oblasti pomocí metody zobecněných přenosových funkcí [15]. Posloupnosti $\mathbf{v}_1(kT + T_1^-)$, resp. $\mathbf{v}_2(kT^-)$ nahradíme ekvivalentními analogovými signály $\mathbf{v}_1(t)$, resp. $\mathbf{v}_2(t)$ náhradou diskrétního času časem spojitým:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^e(t) &= \mathbf{v}_1(kT + T_1^-) \Big|_{kT+T_1=t} \quad \triangleq \mathbf{V}_1^e(s), \\ \mathbf{v}_2^e(t) &= \mathbf{v}_2(kT^-) \Big|_{kT=t} \quad \triangleq \mathbf{V}_2^e(s).\end{aligned}$$

Symboly $\mathbf{V}_1^e(s)$ a $\mathbf{V}_2^e(s)$ označují Laplaceovy obrazy těchto ekvivalentních signálů.

Obdobně je možno přiřadit ekvivalentní signály k signálům budícím, např.

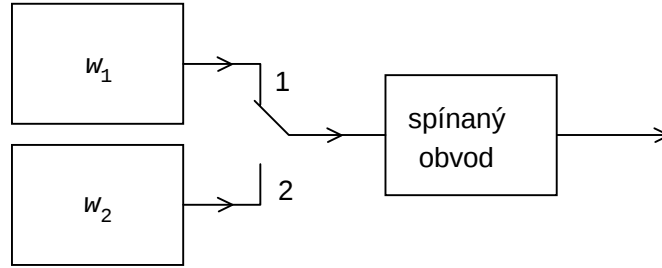
$$w_1^e(t) = w_1(kT + T_1^-) \Big|_{kT+T_1=t} \triangleq W_1^e(s),$$

$$w_2^e(t) = w_2(kT^-) \Big|_{kT=t} \triangleq W_2^e(s).$$

Obecné řešení je ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^e &= \mathbf{K}_{11} W_1^e(s) + \mathbf{K}_{12} W_2^e(s), \\ \mathbf{V}_2^e &= \mathbf{K}_{21} W_1^e(s) + \mathbf{K}_{22} W_2^e(s). \end{aligned} \quad (12)$$

Zobecněné přenosové funkce $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ a $\mathbf{K}_{22}$ závisí na charakteru vstupního signálu. Obecné schéma buzení spínaného obvodu s dvoufázovým spínáním je na obr.9. Pak je možné rozlišit tyto případy:



Obr.9. Obecný způsob buzení dvoufázového spínaného obvodu různými signály v každé fázi.

- a) Signál w_1 , resp. w_2 má takové spektrum, že po jeho vzorkování s kmitočtem $f_v = 1/T = 1/(T_1 + T_2)$ nedojde k překrývání nenulových původních a periodizovaných spektrálních složek. V nejjednodušším případě k tomu dojde při splnění podmínky vzorkovacího teorému $f_{max} < f_v/2$. Pak jsou tyto signály totožné se signály ekvivalentními $w_1 = w_1^e, w_2 = w_2^e$ [11] a platí

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}(s, z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}]^{-1} \mathbf{G}_1(s, z), \\ \mathbf{K}_{12}(s, z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}]^{-1} \mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{G}_2(s, z) z^{-\frac{T_1}{T}}, \\ \mathbf{K}_{21}(s, z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}]^{-1} \mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{G}_1(s, z) z^{-\frac{T_2}{T}}, \\ \mathbf{K}_{22}(s, z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}]^{-1} \mathbf{G}_2(s, z), \end{aligned} \quad (13)$$

kde

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{g}_2^*(T_2), \mathbf{F}_2 = \mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{g}_1^*(T_1), \quad (14)$$

$$\mathbf{G}_1(s, z) = \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) e^{-s\xi} d\xi, \mathbf{G}_2(s, z) = \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi, \quad (15)$$

$$z = e^{sT}. \quad (16)$$

Symbolem $\mathbf{E}$ je označena jednotková matice.

Všimněme si, že přenosové vlastnosti spínaného systému jsou popsány funkcemi obou klasických operátorů s i z . Tím je popsán jak analogový, tak i diskrétní charakter chování spínaného obvodu. Po dvojí substituci $s = j\omega, z = \exp(j\omega T)$ získáme kmitočtové charakteri-

stiky, které v důsledku integrálů $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ nebudou vykazovat periodicitu jako u klasických diskretních systémů.

b) Spínaný obvod je buzen jediným signálem $w_1 = w_2 = w$. Spektrum tohoto signálu musí splňovat podmínku z bodu **a)**. Pak řešení je stejné jako v bodu **a)**, ale rovnice (12) jsou nyní

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^e &= (\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12})\mathbf{W}^e(s), \\ \mathbf{V}_2^e &= (\mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{22})\mathbf{W}^e(s).\end{aligned}\tag{17}$$

c) Signály w_1 a w_2 mají charakter "Sample-Hold":

$$\begin{aligned}w_1(t) &= w_1^e(kT) \text{ pro } t \in \langle kT, kT + T_1 \rangle, \\ w_2(t) &= w_2^e(kT + T_1) \text{ pro } t \in \langle kT + T_1, kT + T \rangle.\end{aligned}$$

Pak vzorec (12) zůstává v platnosti. Pro zobecněné přenosové funkce nyní platí vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11}(z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}]^{-1} \overline{\mathbf{G}}_1 z^{-\frac{T_1}{T}}, \\ \mathbf{K}_{12}(z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}]^{-1} \mathbf{g}_1^*(T_1) \overline{\mathbf{G}}_2 z^{-1}, \\ \mathbf{K}_{21}(z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}]^{-1} \mathbf{g}_2^*(T_2) \overline{\mathbf{G}}_1 z^{-1}, \\ \mathbf{K}_{22}(z) &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}]^{-1} \overline{\mathbf{G}}_2 z^{-\frac{T_2}{T}},\end{aligned}\tag{18}$$

kde

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) d\xi, \overline{\mathbf{G}}_2 = \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) d\xi\tag{19}$$

jsou vektory přechodných charakteristik systému ve fázi 1 a 2 v časech T_1 , resp. T_2 .

Při uvažování buzení typu "Sample-Hold" jsou přenosové vlastnosti spínaného obvodu dány pouze funkcemi operátoru z . Kmitočtové charakteristiky budou vykazovat periodicitu.

d) Jediný vstupní signál schodovitěho charakteru:

viz bod **c)**, kde $w_1^e = w_2^e$.

Řešení je stejné jako v bodu **c)**, kde $\mathbf{W}_1^e = \mathbf{W}_2^e$.

e) Jediný vstupní signál charakteru "Sample-Hold" s režimem "Hold" přes obě spínací fáze:

$w(t) = w^e(kT)$ pro $t \in \langle kT, kT + T \rangle$. Pak

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^e &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}]^{-1} \{ \overline{\mathbf{G}}_1 + \mathbf{g}_1^*(T_1) \overline{\mathbf{G}}_2 z^{-1} \} z^{-\frac{T_1}{T}} \mathbf{V}^e, \\ \mathbf{V}_2^e &= [\mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}]^{-1} \{ \overline{\mathbf{G}}_2 + \mathbf{g}_2^*(T_2) \overline{\mathbf{G}}_1 \} z^{-1} \mathbf{V}^e.\end{aligned}\tag{20}$$

2.5. Numerický výpočet maticových složek zobecněných přenosových funkcí

Z předchozí části vyplývá, že k výpočtu přenosových funkcí je zapotřebí nejprve určit matice $\mathbf{g}_1^*(T_1)$, $\mathbf{g}_2^*(T_2)$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ a vektory $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, resp. $\overline{\mathbf{G}}_1$ a $\overline{\mathbf{G}}_2$. Sled výpočtů je následující:

1. Výpočet matic $\mathbf{g}_1^*(T_1)$ a $\mathbf{g}_2^*(T_2)$.

Z vzorce (9a) je zřejmý fyzikální význam těchto matic: jedná se o přirozenou odezvu (t.j. při nepůsobení budících signálů) spínaného obvodu ve fázi 1, resp. 2 na vektor počátečních podmínek $\mathbf{v}_2(kT^-)$, resp. $\mathbf{v}_1(kT + T_1^-)$, a to vždy v okamžiku ukončení dané fáze. Rovnice (5) budou mít při nepůsobení budících signálů tvar

$$\underbrace{(\mathbf{G}_1^M + s\mathbf{C}_1^M)}_{\mathbf{Y}_1^M} \mathbf{V}_1 = \mathbf{C}_{12}^M \mathbf{v}_2(kT^-),$$

$$\underbrace{(\mathbf{G}_2^M + s\mathbf{C}_2^M)}_{\mathbf{Y}_2^M} \mathbf{V}_2 = \mathbf{C}_{21}^M \mathbf{v}_1(kT + T_1^-).$$
(21)

Vzorec (9a) poskytuje návod na výpočet matic $\mathbf{g}_1^*(T_1)$ a $\mathbf{g}_2^*(T_2)$ z rovnice (21):

$$\mathbf{g}_1^*(T_1) \mathbf{v}_2(kT^-) = L^{-1} \left\{ \mathbf{V}_1 \right\} \Big|_{t=T_1} = L^{-1} \left\{ \left(\mathbf{Y}_1^M \right)^{-1} \right\} \Big|_{t=T_1} \mathbf{C}_{12}^M \mathbf{v}_2(kT^-),$$

$$\mathbf{g}_2^*(T_2) \mathbf{v}_1(kT + T_1^-) = L^{-1} \left\{ \mathbf{V}_2 \right\} \Big|_{t=T_2} = L^{-1} \left\{ \left(\mathbf{Y}_2^M \right)^{-1} \right\} \Big|_{t=T_2} \mathbf{C}_{21}^M \mathbf{v}_1(kT + T_1^-)$$
(22)

Z uvedeného vyplývá, že:

- Matice $\mathbf{g}_1^*(T_1)$, resp. $\mathbf{g}_2^*(T_2)$, má rozměr $(n_1 \times n_2)$, resp. $(n_2 \times n_1)$.
- K -tý sloupec matice $\mathbf{g}_1^*(T_1)$ se vypočte z rovnice (21) tak, že do vektoru počátečních podmínek $\mathbf{v}_2(kT^-)$ dosadíme jedničku do k -tého řádku a do ostatních řádků nuly, řešením rovnic určíme Laplaceův obraz $\mathbf{V}_1$ a zpětnou Laplaceovou transformací pro $t=T_1$ dostaneme hledaný k -tý sloupec. Proceduru opakujeme pro $k=1,2,\dots,n_2$.
- K -tý sloupec matice $\mathbf{g}_2^*(T_2)$ se vypočte z rovnice (21) tak, že do vektoru počátečních podmínek $\mathbf{v}_1(kT + T_1^-)$ dosadíme jedničku do k -tého řádku a do ostatních řádků nuly, řešením rovnic určíme Laplaceův obraz $\mathbf{V}_2$ a zpětnou Laplaceovou transformací pro $t=T_2$ dostaneme hledaný k -tý sloupec. Proceduru opakujeme pro $k=1,2,\dots,n_1$.

Ve skutečnosti jsou řešení rovnice (21) a zpětná Laplaceova transformace sdruženy do jediného algoritmu, který je popsán např. v [1],[9],[27],[34]. Algoritmus spočívá v tom, že soustava rovnic (21) se řeší opakovaně pro sadu předem přesně vypočtených komplexních čísel $s=s_i$. Výsledky se pak použijí k velmi přesnému výpočtu časové odezvy v požadovaném čase.

2. Výpočet čtvercových matic $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$.

Dané matice se získají vynásobením matic $\mathbf{g}_1^*(T_1)$ a $\mathbf{g}_2^*(T_2)$ v souladu se vztahy (14).

3. Výpočet vektorů impulsních charakteristik.

Vektory $\mathbf{g}_1(t)$, resp. $\mathbf{g}_2(t)$, které figurují ve vztazích pro výpočet integrálů $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, případně $\overline{\mathbf{G}}_1$ a $\overline{\mathbf{G}}_2$, jsou impulsními charakteristikami spínaného obvodu ve fázi 1, resp. fázi

2. Znamená to tedy, že při výpočtu těchto charakteristik neuvažujeme v rovnicích (5) vektory počátečních podmínek:

$$\underbrace{(\mathbf{G}_1^M + s\mathbf{C}_1^M)}_{\mathbf{Y}_1^M} \mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_1 \mathbf{W}_1(s),$$

$$\underbrace{(\mathbf{G}_2^M + s\mathbf{C}_2^M)}_{\mathbf{Y}_2^M} \mathbf{V}_2 = \mathbf{D}_2 \mathbf{W}_2(s). \quad (23)$$

Protože impulsní charakteristika je vynucená odezva na Diracův impuls, je třeba dosadit za Laplaceovy obrazy vstupních signálů jedničky. Návod na výpočet vektorů $\mathbf{g}_1(t)$ a $\mathbf{g}_2(t)$ z rovnic (23) opět poskytuje vzorec (9a):

$$\mathbf{g}_1(t) = L^{-1}\{\mathbf{V}_1\} = L^{-1}\left\{\left(\mathbf{Y}_1^M\right)^{-1}\right\} \mathbf{D}_1,$$

$$\mathbf{g}_2(t) = L^{-1}\{\mathbf{V}_2\} = L^{-1}\left\{\left(\mathbf{Y}_2^M\right)^{-1}\right\} \mathbf{D}_2. \quad (24)$$

Z uvedeného vyplývá, že:

- Vektor $\mathbf{g}_1(t)$, resp. $\mathbf{g}_2(t)$, má rozměr $(n_1 \times 1)$, resp. $(n_2 \times 1)$.
- Vektor $\mathbf{g}_1(t)$, resp. $\mathbf{g}_2(t)$ se vypočte z rovnice (23) tak, že za předpokladu $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 = 1$ vypočteme Laplaceův obraz $\mathbf{V}_1$, resp. $\mathbf{V}_2$ a zpětnou Laplaceovou transformací pro daný čas t dostaneme hledaný vektor impulsní charakteristiky.

Ve skutečnosti jsou opět řešení rovnice (24) a zpětná Laplaceova transformace sdruženy do jediného algoritmu, který mj. dokáže identifikovat i případný Diracův impuls v impulsní charakteristice pro $t = 0$.

4. Výpočet vektorů přechodných charakteristik $\bar{\mathbf{G}}_1$ a $\bar{\mathbf{G}}_2$.

Jak vyplývá z rovnic (19), vektory $\bar{\mathbf{G}}_1$ a $\bar{\mathbf{G}}_2$ jsou vlastně přechodnými charakteristikami spínaného obvodu ve fázi 1, resp. 2 v okamžiku $t = T_1$, resp. $t = T_2$. Jejich výpočet lze uskutečnit opět z rovnic (23), ovšem tentokrát za předpokladu Laplaceových obrazů vstupů ve tvaru $1/s$. Použitý algoritmus inverzní Laplaceovy transformace přitom poskytuje velmi přesné výsledky, které nejsou ovlivněny ani případnými Diracovými impulsy v analyzovaných signálech.

5. Výpočet vektorů průběhových Laplaceových obrazů $\mathbf{G}_1(s, z)$ a $\mathbf{G}_2(s, z)$.

Tyto vektory jsou definovány integrály (15)

$$\mathbf{G}_1(s, z) = \int_0^{T_1} \mathbf{g}_1(\xi) e^{-s\xi} d\xi, \mathbf{G}_2(s, z) = \int_0^{T_2} \mathbf{g}_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi.$$

Při výpočtu kmitočtových charakteristik je nutno pod symbolem s v integrandu vidět známou substituci $s = j\omega$. Ukazuje se tedy, že vektory $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ je třeba počítat vždy znovu pro každý kmitočet. Jedná se proto o potenciálně slabé místo celého algoritmu z hlediska rychlosti výpočtu. Z části 2.4 však víme, že v případě buzení spínaného obvodu signály charakteru "Sample-Hold" jsou tyto vektory nahrazeny vektory přechodných charakteristik,

které nejsou funkcí kmitočtu a které lze velmi přesně stanovit algoritmem inverzní Laplaceovy transformace. Pak můžeme celé řešení provést semisymbolicky pomocí operátoru z .

Pokud není splněn předpoklad buzení signály typu "Sample-Hold" a jestliže je tento předpoklad neakceptovatelný z hlediska požadované přesnosti kmitočtové analýzy, je třeba provést výpočet vektorů průběhového spektra. Nejjednodušší, avšak z hlediska numerického řešení nepřilíživý výpočet spočívá v náhradě integrálů (15) integrálními součty. V současné době pracujeme na metodě semisymbolického výpočtu vektorů průběhového spektra jako funkce operátorů s i z .

V aktuální verzi simulačního programu není zahrnut výpočet vektorů $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, takže dosud není možné provádět analýzu ve smyslu bodu **a)** v části 2.4.

2.6. Semisymbolická analýza zobecněných přenosových funkcí

V této části se omezíme na případ buzení spínaných obvodů signály charakteru "Sample - Hold". Problém počítačové semisymbolické analýzy spínaných obvodů s obecným buzením dosud není vyřešen.

Výpočet kmitočtových charakteristik reálných spínaných obvodů provedeme výpočtem vektorů $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ a $\mathbf{K}_{22}$ v (12) pro požadovanou oblast kmitočtů. Tento problém je řešen ve třech krocích, jejichž smyslem je počítat kmitočtové charakteristiky prostřednictvím semisymbolického popisu zobecněných přenosových funkcí v oblasti operátoru z . Použití tohoto popisu je výhodné v tom, že se provede jednou provždy a při opakovaném výpočtu na různých kmitočtech se za operátor z dosazuje komplexní výraz $\exp(j\omega T)$. Další výhodou je možnost výpočtu pólů spínaného systému a získání informací o jeho stabilitě. Semisymbolický rozklad musí být proveden s dostatečnou přesností, na což je nutno dbát zejména při vyšších řádech systému.

a) Semisymbolická inverze matic

$$\mathbf{E} - \mathbf{F}_1 z^{-1}, \quad \mathbf{E} - \mathbf{F}_2 z^{-1}.$$

Inverzi lze provést semisymbolicky vzhledem k operátoru z tak, aby platilo

$$[\mathbf{E} - \mathbf{F}z^{-1}]^{-1} = \frac{\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (25)$$

kde n je řád matice $\mathbf{F}$, jmenovatel je determinant invertované matice a $\mathbf{A}_k$, $k=0,1,2,\dots,n$ jsou čtvercové matice rozměru $n \times n$. Uvedený rozklad lze získat např. Faddějevovou metodou [3],[21] nebo metodou QZ či QR rozkladu [34]. V programu je realizována první alternativa.

b) Semisymbolická analýza dílčích zobecněných přenosových funkcí v závislosti na charakteru budících signálů (viz část 2.4).

c) Výpočet komplexních kmitočtových charakteristik použitím substituce $z = \exp(j\omega T)$.