

5. VZÁJEMNÝ PŘEVOD MEZI SIGNÁLY SOUVISLÉHO A DISKRÉTNÍHO ČASU

V praxi se setkáváme jak se signály souvislého, tak i diskrétního času. Konstruování smíšených analogově-číslicových aplikací a další jiné důvody vedou k nutnosti vzájemně převádět signály souvislého času v signály diskrétního času. Při tomto převodu je třeba dodržovat základní pravidla, vyplývající ze zákonitostí, které působí na rozhraní souvislý čas - diskrétní čas.

Signál souvislého času ® diskrétní signál

Převod se uskutečňuje vzorkováním.

Vzorkování je proces, v němž signál souvislého času je nahrazován jeho částmi - vzorky.

Vzorky jsou od sebe zpravidla rovnoměrně vzdáleny (rovnoměrné vzorkování) o vzorkovací periodu T_V . Rychlost odběru vzorků se ohodnocuje vzorkovacím kmitočtem $f_V = 1/T_V$.

Rovnoměrné vzorkování lze zjednodušeně chápat jako násobení signálu souvislého času s_1 periodickým vzorkovacím signálem s_V . Výsledkem je vzorkovaný signál s_2 :

$$s_2 = s_V s_1. \quad (5.1)$$

Vzorkovací signál je periodickým opakováním vzorkovacího impulsu s_I :

$$s_V(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_I(t - kT_V). \quad (5.2)$$

Vzorkovací impuls by měl být co nejužší, aby byl dobře definován okamžik odběru vzorku. Podle typu vzorkovacího impulsu se vzorkovací techniky dělí na:

- Ideální - vzorkovacím impulsem je Diracův impuls:

$$s_I(t) = d(t). \quad (5.3)$$

- Reálné - odběr vzorku je realizován spínačem, který je po dobu odběru vzorku sepnut a jinak rozepnut, což lze modelovat jako násobení signálu jedničkou nebo nulou. Vzorkovací impuls je obdélníkový s délkou trvání vzorku t_V :

$$s_I(t) = \underline{1}(t) - \underline{1}(t - t_V). \quad (5.4)$$

Po dobu t_V se velikost vzorku mění - vzorek kopíruje vstupní průběh. Hovoříme o vzorkování 1. druhu.

Některé vzorkovací techniky vedou na zarovnané vzorkování - velikost vzorku je po dobu t_V neměnná. Jedná se o vzorkování 2.druhu. Toto vzorkování nelze popsat jednoduchým násobením (5.1).

Zvláštním typem vzorkování 2.druhu je paměťové vzorkování nebo také vzorkování Sample - Hold (S-H), kdy je vzorek prodlužován až k okamžiku odběru dalšího vzorku.

U vzorkování je třeba rozlišovat mezi vzorkovaným signálem s nenulovou dobou trvání vzorku a diskrétním signálem, který je jeho modelovou reprezentací.

Vzorkovací poučka (vzorkovací teorém, Shannonův teorém, Kotelnikovův teorém) objasňuje, za jakých podmínek můžeme namísto celého signálu souvislého času $s(t)$ zpracovávat jen jeho vzorky $s(kT_V) = s_k$ beze ztráty informace o hodnotách signálu mimo vzorkovací okamžiky:

1. Signál $s(t)$ musí mít omezené spektrum do kmitočtu f_{\max} .
2. Vzorkovací kmitočet musí být tak velký, aby platilo

$$f_V > 2f_{\max}. \quad (5.5)$$

Podmínka 1 se v praxi zajišťuje tzv. antialiasingovým filtrem typu dolní propust s mezním kmitočtem do poloviny vzorkovacího kmitočtu, který se zařadí mezi zdroj signálu a vzorkovač.

Spektrum vzorkovaného signálu

Vzorkovací signál $s_V(t)$ je periodický s komplexními koeficienty Fourierovy řady \mathfrak{S}_k . Pak pro spektrální funkci vzorkovaného signálu platí

$$\mathfrak{S}_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}_k \mathfrak{S}_1(\omega - k\omega_V). \quad (5.6)$$

Konkretizace pro různé druhy vzorkování:

Ideální vzorkování (vzorkovací impuls (5.3)):

$$\mathfrak{S}_2(\omega) = \frac{1}{T_V} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}_1(\omega - k\omega_V). \quad (5.7)$$

Reálné vzorkování 1. druhu (vzorkovací impuls (5.4)):

$$\mathfrak{S}_2(\omega) = \frac{t_V}{T_V} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(k\omega_V \frac{t_V}{2}\right) e^{-jk\omega_V t_V/2} \mathfrak{S}_1(\omega - k\omega_V). \quad (5.8)$$

Reálné vzorkování 2. druhu (zarovnané vzorky šířky t_V):

$$\mathfrak{S}_2(\omega) = \frac{t_V}{T_V} \text{sinc}\left(\omega \frac{t_V}{2}\right) e^{-j\omega t_V/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}_1(\omega - k\omega_V). \quad (5.9)$$

Shrnutí:

Při vzorkování dochází k periodizaci spektrálních čar signálu kolem celočíselných násobků vzorkovacího kmitočtu.

Poissonův vztah mezi vzorky signálu a jeho spektrální funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_V) e^{-j\omega kT_V} = \frac{1}{T_V} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}(\omega - k\omega_V). \quad (5.10)$$

Aliasing

Jev, vznikající nedodržením podmínky (5.5) vzorkovací poučky a způsobující, že z vzorků signálu již není možné rekonstruovat původní signál souvislého času. Aliasingu se snažíme předcházet používáním antialiasingových filtrů.

Aliasing má své speciální projevy v časové a kmitočtové oblasti.

- Aliasing v časové oblasti:

Při vzorkování pomalejším než udává podmínka (5.5) vzniká u periodických signálů stroboskopický efekt - z vzorků lze rekonstruovat nikoliv původní signál, nýbrž signál s delší periodou. V závislosti na způsobu vzorkování může být rekonstruovaný signál dokonce invertován v čase (může „běžet pozpátku“).

- Aliasing v kmitočtové oblasti:

Při vzorkování pomalejším než udává podmínka (5.5) dochází k slévání spekter signálu periodizovaných podle rovnice (5.7), takže již není možná rekonstrukce spektra původního signálu v nízkofrekvenční oblasti do poloviny vzorkovacího kmitočtu. Do této spektrální oblasti se vlivem vzorkování překládají „rychlé“ spektrální složky, nesplňující podmínku vzorkovací poučky (5.5).

Vzorkovaný signál @ signál souvislého času (rekonstrukce signálu z jeho vzorků)

Nutnou podmínkou úspěšné rekonstrukce je dodržení podmínky vzorkovacího teorému.

K ideální rekonstrukci by došlo filtrací ideálně vzorkovaného signálu ideální dolní propustí s mezním kmitočtem $f_v/2$.

Nyquistův vztah mezi vzorky signálu souvislého času a jeho rekonstruovaným průběhem:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_v) \operatorname{sinc} \left[(t - kT_v) \frac{w_v}{2} \right]. \quad (5.11)$$

(Odezva ideální dolní propustí s mezním kmitočtem $w_v/2$ na Diracovy impulsy ideálně vzorkovaného signálu). Má-li původní signál spektrum ohraničené do kmitočtu f_{\max} , můžeme k rekonstrukci použít filtr s mezním kmitočtem f_{\max} . Vzorec (5.11) tedy bude správný i po záměně $w_v/2 \leftrightarrow w_{\max}$.

Ve skutečnosti závisí kvalita rekonstrukce jak na vlastnostech rekonstrukčního filtru, tak i na tvaru vzorkovacích impulsů. Např. vzorkování 2.druhu vede na tzv. aperturové zkreslení rekonstruovaného signálu, projevující se útlumem spektrálních složek podle funkce *sinc* (viz vzorec (5.9)).

Vzorkovaný signál @ číslicový signál

Vzorek signálu je kvantován v hodnotách, t.j. vyjádřen na konečný počet cifer, a toto číslo je vyjádřeno vhodným číselným kódem, většinou váhovým dvojkovým. Kvantování a kódování zpravidla probíhá současně v jediném zařízení (analogově-číslcovém převodníku). Číslicový signál je tedy signál diskrétní v čase i hodnotách. Každý vzorek signálu je reprezentován N -bitovým slovem v některém dvojkovém kódu.

Kvantovaný signál se může měnit jen po skocích - nejmenší možný skok se nazývá kvantovací krok D . U analogově-číslcového převodníku hovoříme o rozlišovací schopnosti. Rozlišovací schopnost je spojena s počtem bitů N a s rozsahem převodníku V podle vztahu

$$D = \frac{V}{2^N - 1}. \quad (5.12)$$

Kvantování může probíhat technikou zaokrouhlování nebo usekávání. Například analogově-číslcové převodníky s postupnou aproximací provádějí kvantování signálu usekáváním.

Rozdíl mezi vstupním a výstupním signálem kvantizačního obvodu je kvantizační šum. Okamžité hodnoty kvantizačního šumu se vyskytují přibližně se stejnou pravděpodobností v mezích, které jsou pro techniku zaokrouhlování $< -D/2, +D/2 >$ a pro usekávání $< 0, +D >$.

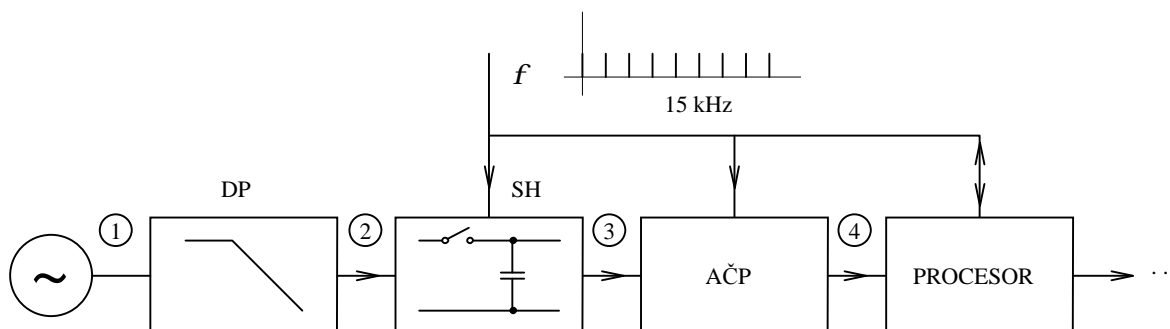
	zaokrouhlování	usekávání	
rozsah hodnot šumu	$< -\Delta/2, +\Delta/2 >$	$< 0, +\Delta >$	
střední hodnota	0	$\Delta/2$	(5.13)
disperze (rozptyl)	$D^2/12$	$D^2/12$	(5.14)
efektivní hodnota	$D/\sqrt{12}$	$D/\sqrt{3}$	(5.15)
výkon šumu [dB]	$V_{dB} - 6N - 10,8$	$V_{dB} - 6N - 4,8$	(5.16)
poměr signál - kvantizační šum, signál je harmonický o amplitudě $A \leq V$	$[A/V]_{dB} + 6N + 7,78$	$[A/V]_{dB} + 6N + 1,76$	(5.17)

Z tabulky plyne, že výkon kvantizačního šumu snížíme o 6dB zvětšením počtu bitů o jedničku. Při daném počtu bitů produkuje zaokrouhlovací metoda šum o 6dB nižší než usekávací metoda.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

- r 5.1.** Hudební signál má spektrum v kmitočtovém pásmu 100Hz - 10kHz. Požadujeme jeho zpracování číslicovým procesorem. Vzhledem k omezené rychlosti procesoru nemůže být vzorkovací kmitočet vyšší než 15kHz. Navrhněte způsob napojení zdroje hudebního signálu na procesor.

p Řešení:
Viz obr.5.1.



Obr.5.1. Způsob napojení zdroje signálu na procesor.

Poznámky:

- Zvolíme-li vzorkovací kmitočet 15kHz, pak hudební signál musí být ještě před vzorkováním uměle „ochuzen“ o spektrální složky od 7,5kHz výše, které by jinak způsobily aliasingový efekt. Tuto práci vykonává antialiasingový filtr DP.
- Mezi dvěma vzorkovacími okamžiky dochází k převodu vzorku signálu na číslo v analogově-číslíkovém převodníku. Aby měl převodník dostatek času na převod, vzorek signálu je prodlužován obvodem SH až do příchodu následujícího vzorkovacího impulsu.
- V praxi bývá antialiasingový filtr typu DP kombinován s horní propustí, aby se do celého řetězce nepřenášelo případné rušení na nízkých kmitočtech.
- Mezi zdroj signálu a převodník bývá vkládán zesilovač/zeslabovač k přizpůsobení signálových úrovní. Někdy se to řeší proměnným ziskem vstupního filtru.

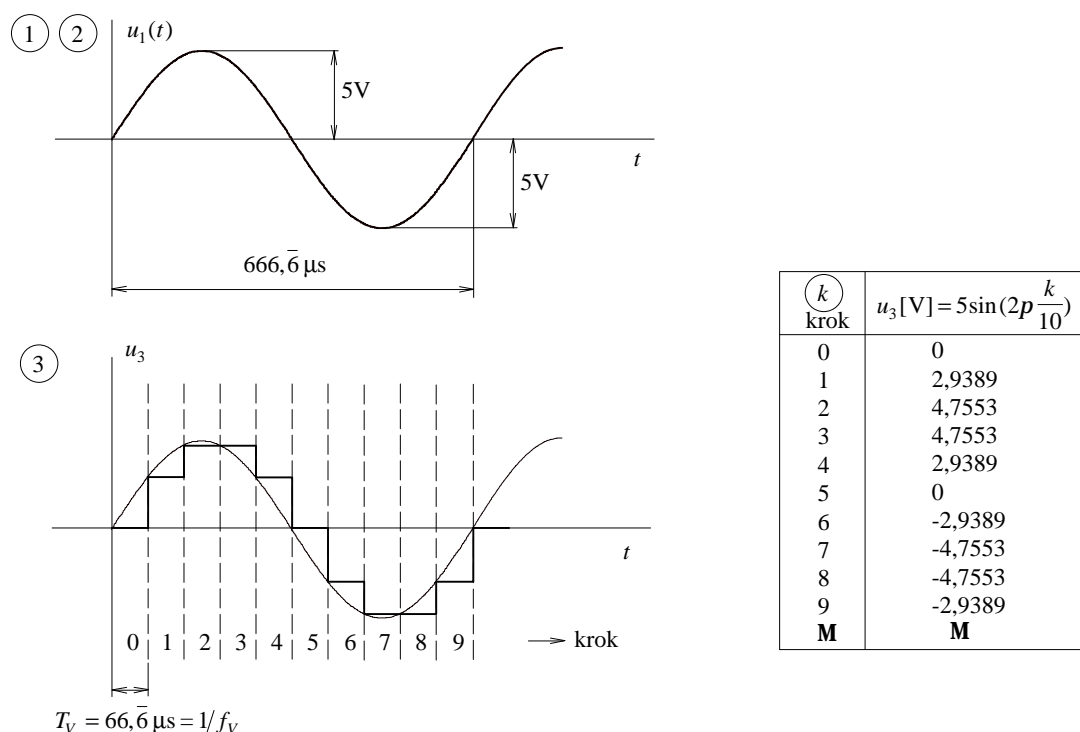
- r 5.2.** Načrtněte časové průběhy v bodech 1, 2 a 3 řetězce z př.5.1 za předpokladu, že vstupní signál je harmonický o rovnici

$$u_1(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 1500t) [\text{V}].$$
 Předpokládejte, že antialiasingová dolní propust má na nízkých kmitočtech přenos 1.

p Řešení:
Viz obr.5.2.

Poznámka:

- V době, kdy na výstupu SH obvodu je neměnné napětí, může probíhat analogově-číslíkový převod vzorku bez dynamických chyb. Doba převodu musí být ve skutečnosti kratší než 66ns, protože určitou dobu trvá odběr správné hodnoty vzorku a ustálení výstupu SH obvodu.



Obr.5.2. Časové průběhy v bodech 1, 2 a 3 řetězce na obr.5.1.

- r 5.3.** Určete rozlišovací schopnost AČ převodníku z př.5.2. Jedná se o osmibitový převodník (7 datových bitů a jeden znaménkový bit), jmenovitý rozsah vstupního napětí převodníku je od -5V do +5V. Převod probíhá na principu usekávání.

p Řešení:

$$D = \frac{2,5}{2^8 - 1} \approx 39,2 \text{ mV.}$$

- r 5.4.** Vypočítejte poměr výkonu harmonického signálu z př.5.2 a kvantizačního šumu.

p Řešení:

(Normovaný) výkon harmonického signálu: $U_{ef}^2 = \frac{U_{\max}^2}{2} = \frac{5^2}{2} = 12,5 \text{ W.}$

(Normovaný) výkon kvantizačního šumu (usekávání): $\frac{D^2}{3} \approx \frac{(39,2 \cdot 10^{-3})^2}{3} \approx 0,512 \text{ mW.}$

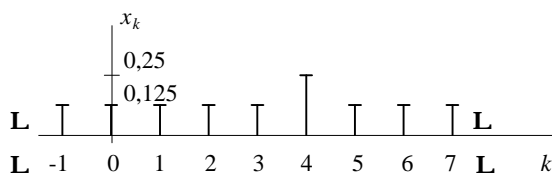
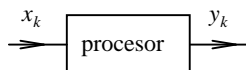
Poměr výkonu signál - šum: 24404, t.j. asi $10 \log(24404) \approx 43,9 \text{ dB.}$

Poznámka:

Proveďte výpočet pomocí rovnice (5.17).

- r 5.5.** Na vstup číslicového procesoru přichází následující posloupnost čísel podle obr.5.3. Jedná se o konstantní číslicový signál, vzorek č.4 je zatížen poruchou. Navrhněte a ověřte jednoduchý algoritmus výpočtu výstupních vzorků procesoru, který by zmírňoval působení této poruchy. K dispozici jsou tyto operace se vstupními vzorky: sčítání a

odečítání, násobení konstantou, časové zpoždění vzorků o celistvý počet vzorkovacích period.

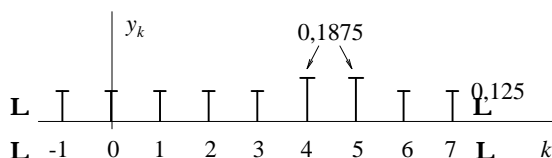


Obr.5.3. Konstantní vstupní posloupnost procesoru s poruchou ve vzorku č.4.

p Řešení:

Výstupní vzorek v k -tém kroku bude počítán jako aritmetický průměr vstupních vzorků v k -tém kroku a $k-1$ kroku:

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$



Obr.5.4. Výstupní posloupnost procesoru s částečně potlačenou poruchou.

Porucha se na výstupu procesoru rozprostře do dvou kroků a zmenší se její velikost.

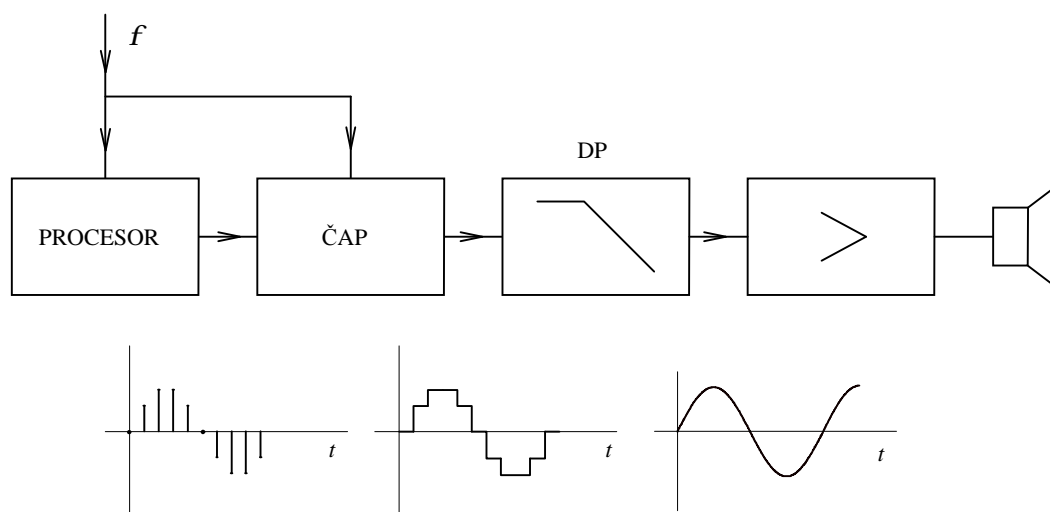
& Poznátky z příkladu:

- Diskrétní signály x_k a y_k jsou modely skutečných číslicových signálů v procesoru. Modely popisují pouze jejich podstatné vlastnosti - vzorkovací okamžiky a velikosti signálů v těchto okamžicích. Vystačíme tedy s popisem signálu pomocí posloupnosti a jejím grafickým vyjádření čarami ve vzorkovacích okamžicích. Srovnajte tento popis s popisem signálu po ideálním vzorkování - dostaneme posloupnost Diracových impulsů, kde informace o hodnotách diskrétního signálu je obsažena v mohutnostech impulsů.
- Procesor s uvedeným algoritmem se chová jako lineární diskrétní systém - filtr typu dolní propust 1.řádu.
- Aplikujeme-li na výstupní vzorky opět uvedený algoritmus, pak po několikerém průchodu získáme podstatné vyhlazení rušivé špičky. Pak totiž realizujeme složitější filtr typu DP s lepšími vyhlazovacími schopnostmi (analogie s filtrem souvislého času - tvorba filtrů vyšších řádů kaskádním řazením jednoduchých obvodů).

r 5.6. Hudební signál z př. 5.1 je potřebné po zpracování číslicovým procesorem reprodukovat (zesilovač, reproduktor). Navrhněte způsob napojení reproduktoru na procesor.

p Řešení:

Viz obr.5.5.



Obr.5.5. Příklad napojení výstupu procesoru na analogové prostředí.

Číslicový signál z procesoru nejprve převedeme číslicově-analogovým převodníkem na signál souvislého času. Výstupní signál převodníku je kvantován v hodnotách, protože vznikl převodem N -bitových číslicových dat. K vyhlazení schodovitého průběhu slouží dolní propust. Následuje nízkofrekvenční zesilovač a koncové zařízení (reproduktor).

r 5.7. Procesorem z př.5.6 je zpracováván hudební signál z kmitočtového pásma 100Hz - 5kHz, vzorkovací kmitočet je 15kHz. Vyjmenujte požadavky na parametry vyhlazovací dolní propusti.

p Řešení:

Výstupní signál převodníku má charakter S-H, t.j. signál po vzorkování 2.druhu s dobou trvání vzorku rovnou vzorkovací periodě. Pro jeho spektrální funkci tedy platí upravený vzorec (5.9) pro $t_V = T_V$:

$$\mathcal{F}_{CAP}(w) = \text{sinc}\left(w \frac{T_V}{2}\right) e^{-jwT_V/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(w - kw_V),$$

kde \mathcal{F}_1 je spektrální funkce zpracovaného hudebního signálu. Signál vyhovuje podmínce vzorkovacího teorému, takže nedochází k aliasingu a pro kmitočtové pásmo $|w| < w_V/2$ platí:

$$\mathcal{F}_{CAP}(w) = \text{sinc}\left(w \frac{T_V}{2}\right) e^{-jwT_V/2} \mathcal{F}_1(w) \Rightarrow \mathcal{F}_{CAP}(f) = \text{sinc}\left(p \frac{f}{f_V}\right) e^{-jpf/f_V} \mathcal{F}_1(f).$$

Vlivem vzorkování 2.druhu jsou tedy vyšší spektrální složky hudebního signálu na výstupu převodníku tlumeny podle funkce typu *sinc* (aperturové zkreslení).

K rekonstrukci hladkého průběhu je proto zapotřebí:

- odstranit periodizované spektrální složky od kmitočtu 10kHz výše dolní propustí,
- kompenzovat aperturové zkreslení amplitudovou kmitočtovou charakteristikou filtru vytvarovanou v propustném pásmu funkcí typu $1/\text{sinc}$.

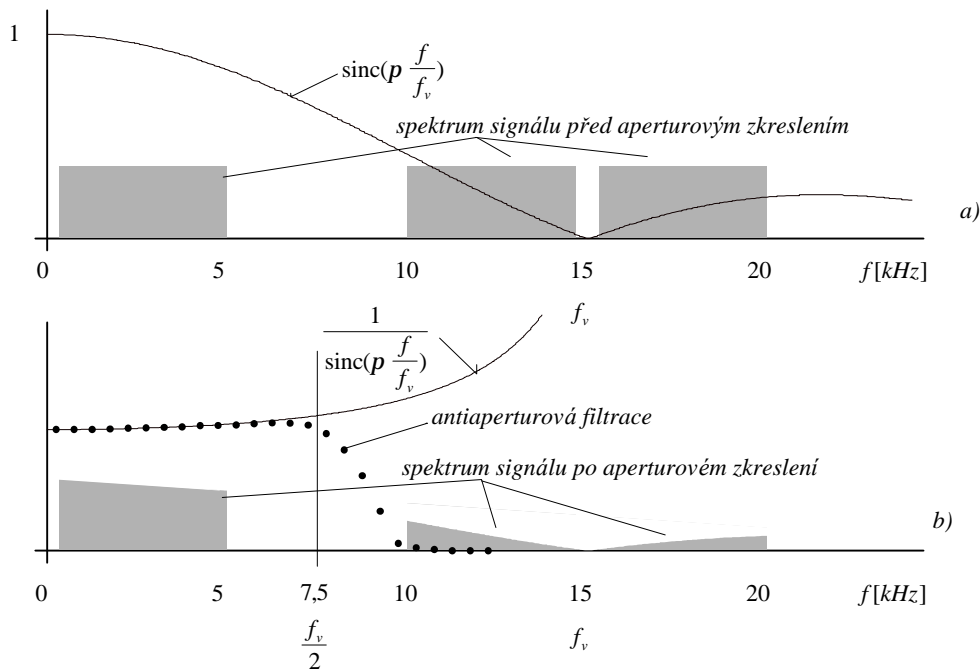
Požadavky na dolní propust (viz obr. 5.6):

- amplitudová kmitočtová charakteristika

$$|K(f)| = \frac{1}{\left| \text{sinc}\left(p \frac{f}{f_v}\right) \right|} = \frac{p \frac{f}{f_v}}{\left| \sin\left(p \frac{f}{f_v}\right) \right|}$$

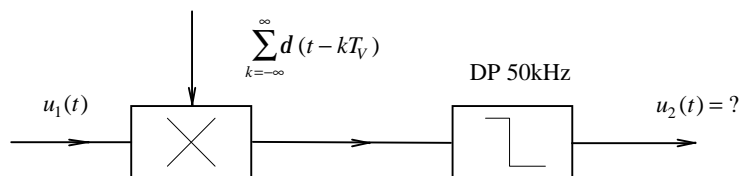
pro propustné pásmo do kmitočtu 5kHz,

- lineární fázová kmitočtová charakteristika v propustném pásmu (pro vyloučení fázového lineárního zkreslení),
- přechodové pásmo od 5kHz do 10kHz nspecifikovaného průběhu,
- útlumové pásmo od 10kHz výše; velikost útlumu závisí na požadovaném potlačení periodizovaných spektrálních složek.



Obr.5.6. a) periodizované spektrum signálu je váhováno funkcí typu *sinc* - vzniká potlačení „výšek“ - - aperturové zkreslení; b) dolní propust svým průběhem kmitočtové charakteristiky koriguje aperturové zkreslení a zbavuje signál periodizovaných spektrálních složek.

- r 5.8.** Harmonický signál $u_1(t) = U \sin(\omega_1 t)$ o kmitočtu f_1 je ideálně vzorkován v okamžicích $\{kT_V\}$, $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, $T_V = 1/f_v$, $f_v = 100\text{kHz}$. Vzorkovaný signál pak prochází ideální dolní propustí o mezním kmitočtu $f_v/2 = 50\text{kHz}$. Určete výstupní signál dolní propustí $u_2(t)$, je-li f_1
- a) 10kHz, b) 50kHz, c) 60kHz, d) 160kHz.



Obr.5.7. K příkladu 5.8.

p Řešení:

Viz vzorec (5.7).

$$u_{1v}(w) = \frac{1}{T_v} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1(w - kw_v), \text{ spektrální funkce harmonického signálu}$$

$$u_1(w) = pUe^{-j90^\circ} d(w - w_1) + pUe^{+j90^\circ} d(w + w_1).$$

a) $f_1 = 10\text{kHz}$. Po vzorkování se objeví spektrální složky na těchto kmitočtech (uvedeny jsou pouze kladné kmitočty):

kmitočet [kHz]	spektrální složka	amplituda	fáze [°]
10	f_1	U/T_v	-90
90	$f_v - f_1$		+90
110	$f_v + f_1$		-90
190	$2f_v - f_1$		+90
210	$2f_v + f_1$		-90
...

Po průchodu vzorkovaného signálu rekonstrukční dolní propustí o mezním kmitočtu 50kHz se objeví na výstupu pouze složka na kmitočtu 10kHz:

$$u_2(t) = \frac{U}{T_v} \sin(w_1 t) = 10^4 U \sin(2p \cdot 10 \cdot 10^3 t).$$

Dolní propustí jsme tedy zrekonstruovali původní sinusový signál. Došlo pouze ke změně jeho amplitudy. To je způsobeno tím, že v průběhu ideálního vzorkování byl signál násoben Diracovými impulsy a tím mu byla dodána velká přídavná energie.

b) $f_1 = 50\text{kHz}$. Po vzorkování se objeví spektrální složky na těchto kmitočtech:

kmitočet [kHz]	spektrální složka	amplituda	fáze [°]
50	f_1	U/T_v	-90
50	$f_v - f_1$		+90
150	$f_v + f_1$		-90
150	$2f_v - f_1$		+90
250	$2f_v + f_1$		-90
250	$3f_v - f_1$		+90
...	

Z tabulky je zřejmé, že spektrální složky vzniklé vzorkováním se všechny vzájemně ruší. Proto je výstupní signál za vzorkovačem nulový a na výstupu dolní propusti také:

$$u_2(t) = 0.$$

Sinusový signál o kmitočtu 50kHz již nevyhovuje podmínce vzorkovacího teorému. Vzorkováním tohoto signálu s kmitočtem $f_v = 100\text{kHz}$ odebíráme vzorky každou půlperiodu signálu a v těchto okamžicích sinusový signál vždy prochází nulou.

c) $f_1 = 60\text{kHz}$. Po vzorkování se objeví spektrální složky na těchto kmitočtech:

kmitočet [kHz]	spektrální složka	amplituda	fáze [°]
60	f_1	U/T_v	-90
40	$f_v - f_1$		+90
160	$f_v + f_1$		-90
140	$2f_v - f_1$		+90
260	$2f_v + f_1$		-90
240	$3f_v - f_1$		+90
...	

Vlivem aliasingu došlo k překrytí spektrálních složek f_1 a $f_v - f_1$ na ose kmitočtu. Na výstupu dolní propusti se tedy objeví signál

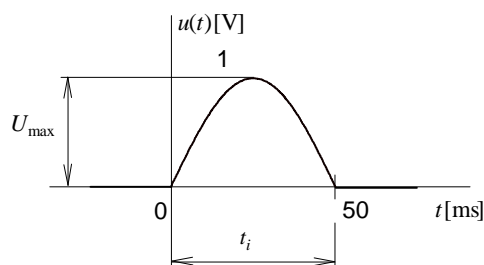
$$u_2(t) = -\frac{U}{T_V} \sin[(w_v - w_1)t] = 10^4 U \sin(2p \cdot 40 \cdot 10^3 t + 180^\circ).$$

V důsledku nesplnění vzorkovací podmínky jsme místo původního signálu rekonstruovali signál o jiném kmitočtu a jiné počáteční fázi.

Shrnutí:

Vzorkujeme-li harmonický signál o kmitočtu f_1 a vzorkovací kmitočet je f_v , pak ve spektru vzorkovaného signálu vznikají složky na kmitočtech $k \cdot f_v \pm f_1$, k celé. Jedna z těchto složek vždy spadá do kmitočtového pásma $\langle 0, f_v/2 \rangle$. Splňuje-li kmitočet f_1 vzorkovací podmínku, pak do daného kmitočtového pásma spadá právě složka na kmitočtu f_1 . Dolní propustí pak rekonstruujeme původní signál.

r 5.9. Experimentálně ověřte Nyquistův vztah (5.11) pro rekonstrukci signálu z jeho vzorků. Pomocí MATLABu rekonstruujte signál na obr.5.8 - sinusový puls - pro vzorkovací kmitočty a) 100Hz, b) 200Hz, c) 1000Hz, d) 10 000Hz.



Obr.5.8. Signál určený k rekonstrukci z jeho vzorků.

p Řešení:

Signál lze přesně rekonstruovat z jeho vzorků jedině tehdy, má-li omezené spektrum do kmitočtu F_{max} a je-li vzorkovací frekvence zvolena dostatečně velká tak, aby přesahovala dvojnásobek F_{max} . Signál na obrázku má sice teoreticky neomezené spektrum, avšak od jistého kmitočtu již lze spektrální funkci považovat za zanedbatelnou. Spektrální funkce tohoto signálu (pouze posunutého v čase) byla řešena v příkladu 1.69, obr.1.45. Významná část spektrální funkce je rozložena do kmitočtů asi 50Hz, avšak je otázka, od jakého kmitočtu považovat spektrum za zanedbatelné. Pomocí MATLABu se pokusíme o rekonstrukci pro různé vzorkovací frekvence: 100Hz až 10kHz.

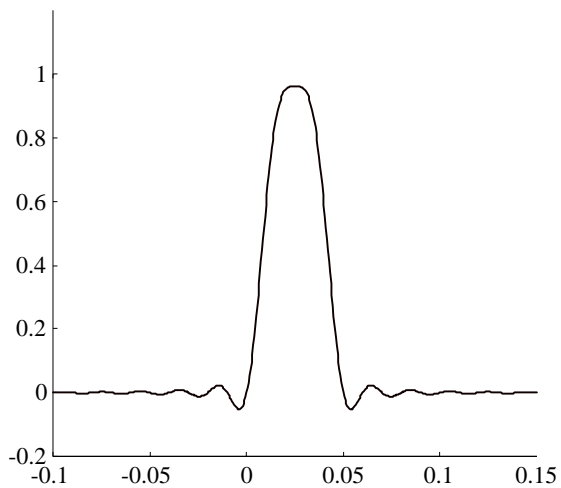
• Ukázka výpisu programu MATLABu:

```
Fv=100; % zadání vzorkovacího kmitočtu
T=1/Fv; % výpočet vzorkovací periody
m=50e-3*Fv; % počet vzorků na časovém intervalu 0-50ms
for k=0:m,
    x(k+1)=sin(20*pi*k*T); % výpočet vzorků signálu
end
t=-100e-3:250e-3/500:150e-3; % zadání časové osy a výpočetního kroku
y=0.*t; % nulování pole výsledků
```

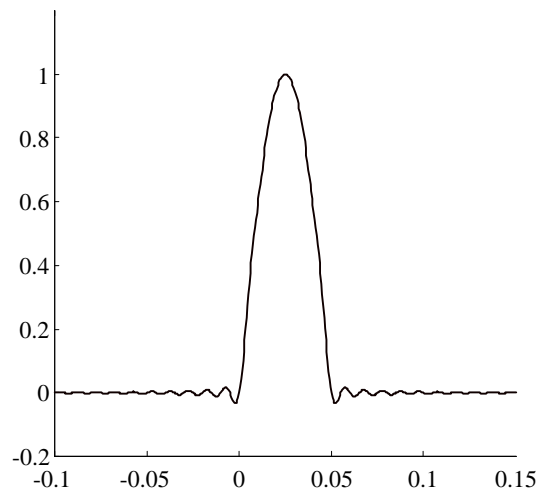
```

for k=0:m,
    y=y+x(k+1).*sinc((t-k*T)*Fv);    % postupná rekonstrukce signálu z funkcí sinc
end
plot(t,y)                            % vykreslení výsledku

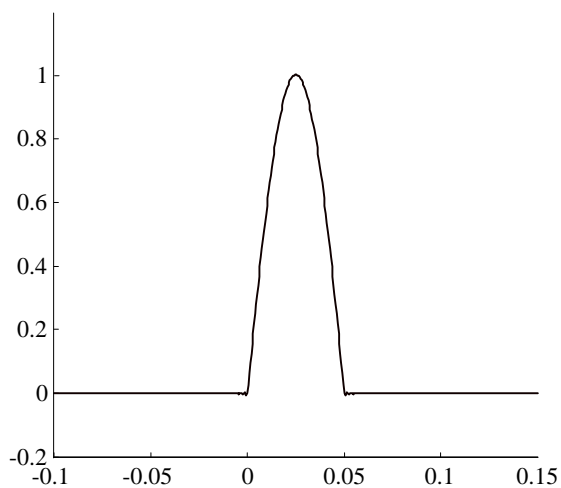
```



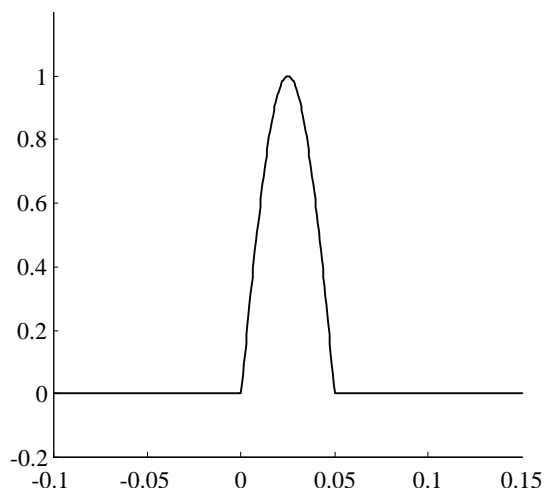
a)



b)



c)



d)

Obr.5.9. Rekonstruovaný impuls, vzorkovací kmitočet [Hz] / počet vzorků v intervalu 0÷50ms:
a) 100 / 6, b) 200 / 11, c) 1000 / 51, d) 10000 / 501.

Z obr.5.9 je zřejmé, že již při $f_v = 1\text{kHz}$ je rekonstrukce poměrně uspokojivá.

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

r 5.10. Jaký musíme použít vzorkovací kmitočet při digitalizaci telefonního signálu, jehož kmitočtové pásmo je omezeno do oblasti 300Hz až 3400Hz?

Ü Výsledek:

$f_V > 6,8\text{kHz}$.

r 5.11. Analogový signál má být přenášen soustavou PCM. Určete podmínku pro vzorkovací periodu pro

a) akustický signál v spektrálním pásmu 20Hz÷20kHz,

b) videosignál v spektrálním pásmu 0Hz÷6,5MHz.

Ü Výsledky:

a) $T_V < 25\mu\text{s}$, b) $T_V < 76,9\text{ns}$.

r 5.12. Rychlost analogově-číslicového převodníku a číslicového procesoru nedovolují zvolit vzorkovací periodu menší než 10 μs . Vypočtete teoretickou mez, k níž může sahát spektrum zpracovávaného signálu souvislého času bez nebezpečí vzniku aliasingu.

Ü Výsledek:

$f < 50\text{kHz}$.

r 5.13. Harmonický signál o amplitudě 10V a kmitočtu 1kHz je podroben vzorkování 1.druhu s šířkou vzorkovacího impulsu 10 μs a vzorkovací frekvencí 10kHz. Určete údaj selektivního voltmetru, je-li naladěn na kmitočet

a) 1kHz, b) 5kHz, c) 9kHz, d) 10kHz, e) 11kHz, f) 15kHz, g) 19kHz,

h) 20kHz, i) 21kHz, j) 25kHz, k) 29kHz, l) 31kHz.

Voltmetr je ocejchován v efektivní hodnotě měřeného signálu.

Ü Výsledky:

a) 0,707V, b) 0V, c) 0,696V, d) 0V, e) 0,696V, f) 0V, g) 0,662V, h) 0V, i) 0,662V,

j) 0V, k) 0,607V, l) 0,607V.

r 5.14. Harmonický signál o amplitudě 10V a kmitočtu 1kHz je podroben vzorkování 2.druhu s šířkou vzorkovacího impulsu 10 μs a vzorkovací frekvencí 10kHz. Určete údaj selektivního voltmetru, je-li naladěn na kmitočet

a) 1kHz, b) 5kHz, c) 9kHz, d) 10kHz, e) 11kHz, f) 15kHz, g) 19kHz, h) 20kHz,

i) 21kHz, j) 25kHz, k) 29kHz, l) 31kHz.

Voltmetr je ocejchován v efektivní hodnotě měřeného signálu.

Ü Výsledky:

a) 0,707V, b) 0V, c) 0,698V, d) 0V, e) 0,693V, f) 0V, g) 0,666V, h) 0V, i) 0,657V,

j) 0V, k) 0,613V, l) 0,601V.

- r 5.15.** Spektrum signálu, který je vzorkován technikou Sample - Hold, je zatíženo aperturovou chybou. Vypočtete útlum spektrální složky na polovině vzorkovacího kmitočtu.

Ü Výsledek:

$$\text{sinc}\left(\frac{p}{2}\right) \approx 0,637 \approx -3,92 \text{ dB}.$$

- r 5.16.** Harmonický signál o kmitočtu F je vzorkován s vzorkovacím kmitočtem 10kHz. Vzorky jsou filtrovány ideální dolní propustí s mezním kmitočtem 5kHz. Na výstupu dolní propustí bude opět harmonický signál. Určete jeho frekvenci, je-li kmitočet vstupního signálu F [kHz]:

a) 4, b) 5, c) 9, d) 9,9, e) 10, f) 11, g) 16, h) 28, i) 31, j) 155, k) 161, l) 777,2.

Ü Výsledky:

a) 4kHz, b) 0kHz, c) 1kHz, d) 0,1kHz, e) 0kHz, f) 1kHz, g) 4kHz, h) 2kHz, i) 1kHz, j) 0kHz, k) 1kHz, l) 2,8kHz.

- r 5.17.** Uvažujme analogově číslicový převodník zaokrouhlovacího typu s rozsahem vstupního napětí $-V/2$ až $+V/2$. Pro účely vyhodnocování harmonických analogových napětí počítačem požadujeme zpracovávat signály s dynamikou A_{\max}/A_{\min} aspoň 60dB, kde $A_{\max} = V/2$, $A_{\min} = \Delta/2$, Δ je rozlišovací schopnost převodníku. Navrhněte, kolikabitový převodník potřebujeme.

Ü Výsledek:

$$\left[A_{\max} / A_{\min} \right]_{\text{dB}} \approx 6N \Rightarrow N \geq 10.$$

- r 5.18.** Pro jakou maximální dynamiku signálu A_{\max}/A_{\min} je určen 16-ti bitový analogově-číslcový převodník?

Ü Výsledek:

96dB.

- r 5.19.** Odhadněte střední a efektivní hodnotu kvantizačního šumu 8-bitového analogově-číslcového převodníku s rozsahem napětí $-5V$ až $+5V$. Převod signálu na číslo se děje usekáváním.

Ü Výsledek:

Střední hodnota = 19,6mV, efektivní hodnota = 22,6mV.

- r 5.20.** Na vstupu převodníku z př.5.19 působí harmonický signál s rozkmitem plně využívající rozsah převodníku. Vypočtete poměr výkonů užitečného signálu a kvantizačního šumu.

Ü Výsledek:

49,8 dB.

r 5.21. Na vstupu analogově-číslicového převodníku se zaokrouhlováním působí harmonický signál s amplitudou rovnou rozlišovací schopnosti převodníku. Vypočtete poměr výkonů užitečného signálu a kvantizačního šumu.

Ü Výsledek:

7,78dB.

r 5.22. Hodnoty analogového napětí se pohybují v rozmezí od 0 do 10V. Určete potřebný počet kvantovacích hladin n tak, aby chyba způsobená kvantováním nepřekročila 1% rozsahu hodnot analogového napětí. Určete nezbytný počet míst m dvojkového kódu pro vyjádření kvantovaných hodnot. Uvažujte kvantování zaokrouhlováním.

Ü Výsledek:

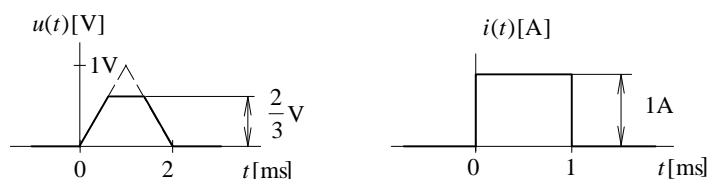
$n > 50, m = 6.$

r 5.23. Úkolem PCM je zachytit dynamiku 60dB vzorkovaného signálu tak, aby kvantovací chyba $\Delta/2$ nepřesahovala 0,05% maximální hodnoty napětí původního signálu. Vypočtete potřebný počet bitů.

Ü Výsledek:

$N = 10.$

r 5.24. Pomocí MATLABu (viz řešený příklad 5.9) ověřte způsob rekonstrukce uvedených signálu z jejich vzorků pomocí Nyquistova vztahu.



Obr.5.10. Signály určené k rekonstrukci z jejich vzorků.