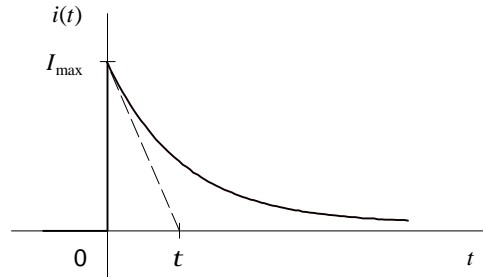


ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

r 1.57. Určete mohutnost a energii impulsu

$$i(t) = I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} 1(t), \quad I_{\max} = 1\text{mA}, \quad \tau = 1\text{ms}.$$



Obr.1.34. Analyzovaný impuls.

p Řešení:

Mohutnost impulsu

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) dt = \int_0^{\infty} I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau I_{\max} = 1\mu\text{As} = 1\mu\text{C} \quad (\text{mikrocoulomb}).$$

Normovaná energie

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} i^2(t) dt = \int_0^{\infty} I_{\max}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = (\text{za předpokladu } \tau > 0) = I_{\max}^2 \frac{\tau}{2} = 5 \cdot 10^{-10} \text{A}^2\text{s}.$$

r 1.58. Vypočítejte spektrální hustotu signálu z př.1.57 a nakreslete modulové a fázové spektrum.

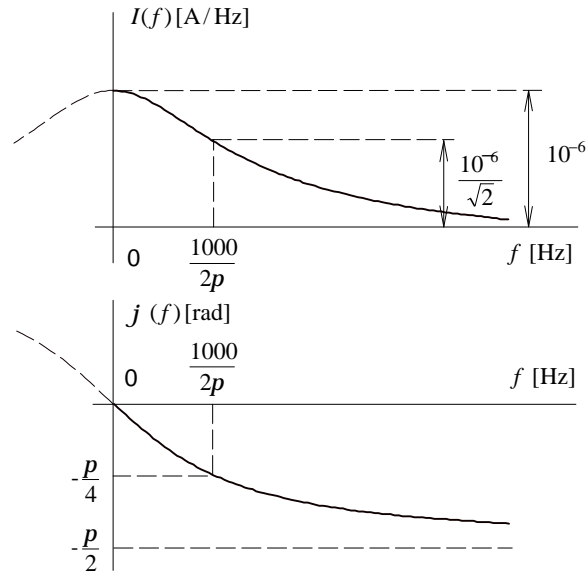
p Řešení:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{i(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt = (\text{za předpokladu } \tau > 0) = \\ &= \frac{I_{\max} \tau}{1 + j\omega \tau} = \frac{I_{\max} \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} e^{-j \arctg \omega \tau} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|\mathcal{F}\{i(t)\}| = I(\omega) = \frac{I_{\max} \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}} \left[\frac{\text{A}}{\text{Hz}} \right],$$

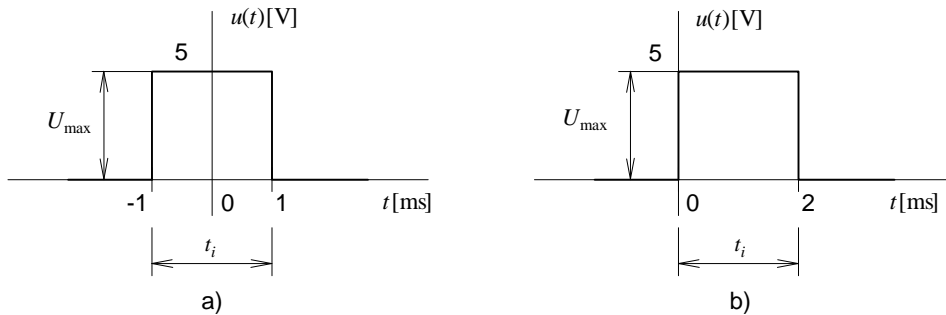
$$j(\omega) = -\arctg(\omega \tau) = -\arctg \frac{\omega}{1000} [\text{rad nebo } ^\circ]$$

(viz obr.1.35).



Obr.1.35. Spektrální funkce signálu z obr.1.34.

r 1.59. Určete spektrální funkce obdélníkových signálů na obr.1.36 pro $U_{\max} = 5V$ a $t_i = 2ms$.



Obr.1.36. Analyzované signály.

p Řešení:

$$a) \mathcal{U}(w) = \int_{-t_i/2}^{+t_i/2} U_{\max} e^{-jw t} dt = U_{\max} \operatorname{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) = 0,02 \operatorname{sinc}\left(\frac{w}{1000}\right) \left[\frac{V}{\text{Hz}} \right] \text{ (viz obr.1.37a),}$$

$$b) \mathcal{U}(w) = \int_0^{t_i} U_{\max} e^{-jw t} dt = U_{\max} \operatorname{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) e^{-jw \frac{t_i}{2}} = 0,02 \operatorname{sinc}\left(\frac{w}{1000}\right) e^{-j \frac{w}{1000}} \left[\frac{V}{\text{Hz}} \right] \text{ (viz obr.1.37b).}$$

r 1.60. Pomocí výsledku z př.1.59 určete 3.harmonickou složku periodického signálu, vzniklého opakováním obdélníkového impulsu z obr.1.36a) s opakovací periodou 4ms.

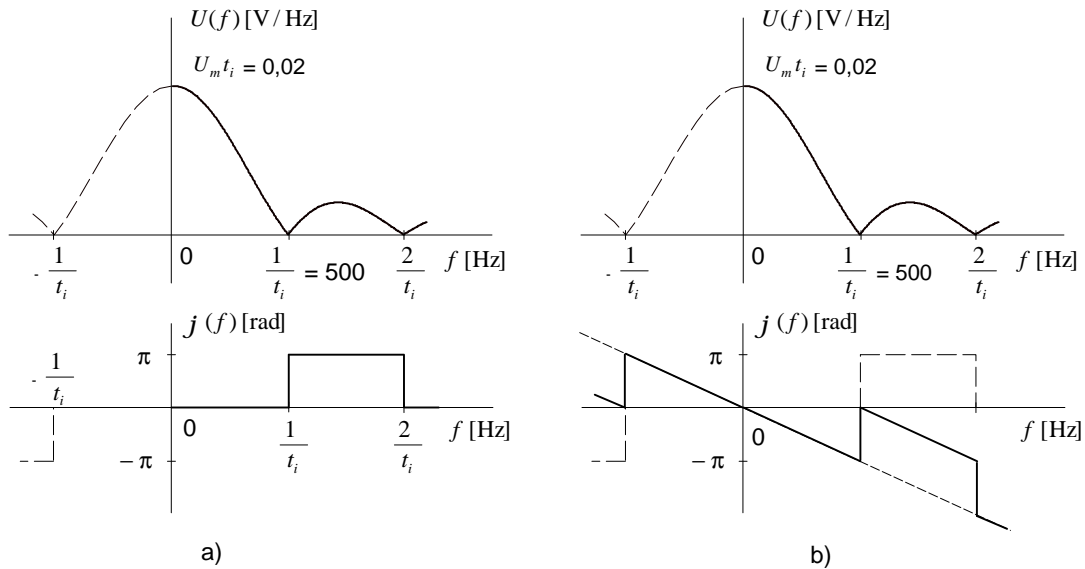
p Řešení:

(viz vzorec (1.49))

$$\mathcal{X}_k = \frac{1}{T_1} \mathcal{U}(w) \Big|_{w=kW_1} = \frac{1}{T_1} U_{\max} t_i \operatorname{sinc}\left(k W_1 \frac{t_i}{2}\right) = 2,5 \operatorname{sinc}\left(k \frac{p}{2}\right);$$

$$\mathcal{U}_3 = 2,5 \operatorname{sinc}\left(3\frac{P}{2}\right) \approx -0,531 \text{V} \Rightarrow$$

amplituda 3.harmonické $U_3 = 2c_3 \approx 1,06 \text{V}$, počáteční fáze $j_3 = 180^\circ$.



Obr.1.37. Spektrální funkce signálů z obr.1.36.

r 1.61. Určete spektrální funkci Diracova impulsu.

p Řešení:

Filtrační účinek Diracova impulsu (vzorec (1.80))

$$\mathcal{D}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) e^{-jw t} dt = 1.$$

& Poznátka z příkladu:

a) Diracův impuls má rovnoměrnou spektrální hustotu na všech kmitočtech. Je to nekonečně úzký impuls, má tedy nekonečně široké spektrum.

b) Platí inverzní Fourierova transformace (1.44):

$$d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{jw t} dw.$$

Tento integrál neexistuje v klasickém matematickém smyslu v důsledku nekonvergence integrálu, existuje však ve smyslu distribučním. Vzhledem k sudosti integrandu a možnosti záměny proměnných w a t platí rovněž vzorec, který použijeme v dalším příkladu:

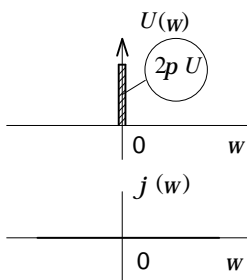
$$d(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm jw t} dt. \quad (1.82)$$

r 1.62. Určete spektrální funkci konstantního signálu $u(t) = U$.

p Řešení:

Signál není absolutně integrovatelný, neboť nespĺňuje podmínku (1.45). Nemá tedy spektrální funkci v klasickém smyslu, ve smyslu distribučním však ano:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = (\text{viz rovnice (1.82)}) = 2\pi U \delta(\omega).$$



Obr.1.38. Spektrální funkce konstantního signálu.

& Poznátka z příkladu:

Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál neohraničený vede na objevení se Diracova impulsu na kmitočtu 0Hz. Srovnajte se spektrem konstantního signálu jakožto speciálního případu periodického signálu: zde je jediná spektrální čára na kmitočtu 0Hz.

r 1.63. Určete spektrální funkci harmonického signálu

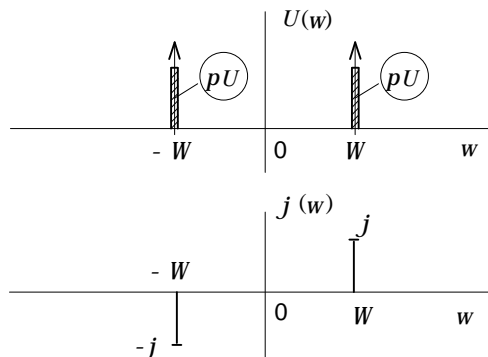
$$u(t) = U \cos(Wt + j) = \frac{U}{2} e^{jWt} + \frac{U}{2} e^{-jWt}, \quad \frac{U}{2} = U e^{ij}.$$

p Řešení:

Signál není absolutně integrovatelný, neboť nespĺňuje podmínku (1.45) - jeho mohutnost není v důsledku periodicity signálu definována. Nemá tedy spektrální funkci v klasickém smyslu, ve smyslu distribučním však ano:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{U}{2} e^{jWt} + \frac{U}{2} e^{-jWt} \right) e^{-j\omega t} dt = (\text{viz rovnice (1.82)}) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{U}{2} \delta(\omega - W) + \frac{U}{2} \delta(\omega + W) \right] = \pi U e^{ij} \delta(\omega - W) + \pi U e^{-ij} \delta(\omega + W).$$



Obr.1.39. Spektrální funkce harmonického signálu.

& Poznátka z příkladu:

Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál harmonický vede na objevení se Diracových impulsů na kmitočtech $+W$ a $-W$. Srovnajte s Fourierovými koeficienty harmonického signálu jakožto speciálního případu periodického signálu: existují pouze dva nenulové & koeficienty odpovídající kmitočtům $+W$ a $-W$.

Výsledek lze odvodit i na základě poučky (1.54) o posunu spektra.

r 1.64. Určete spektrální funkci periodického signálu daného komplexní Fourierovou řadou

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \&_k e^{jkW_1 t}.$$

p Řešení:

Periodický signál není absolutně integrovatelný, skládá se však ze stejnosměrné složky a harmonických složek, u nichž existuje spektrální funkce v distribučním smyslu:

$$\&_p(\omega) = F \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \&_k e^{jkW_1 t} \right\} = (\text{vlastnost linearity}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \&_k F \{ e^{jkW_1 t} \} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \&_k d(\omega - kW_1).$$

& Poznátka z příkladu:

Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál periodický vede na objevení se Diracových impulsů na kmitočtech $+kW_1$ a $-kW_1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Srovnajte s Fourierovými koeficienty periodického signálu.

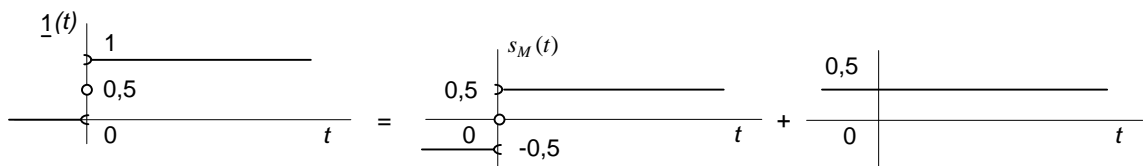
Srovnajte výsledek se vzorcem (1.47).

r 1.65. Určete spektrální funkci jednotkového skoku.

p Řešení:

Jednotkový skok není absolutně integrovatelný a má nekonečnou mohutnost. Lze jej však rozložit podle (1.46) na signál $s_M(t)$ s nulovou mohutností a konstantní signál (viz obr.1.40):

$$1(t) = s_M(t) + 0,5.$$



Obr.1.40. Rozklad jednotkového skoku na signál s nulovou mohutností a konstantní složku.

Signál $s_M(t)$ má nulovou mohutnost a jeho derivací je Diracův impuls:

$$d(t) = \frac{d}{dt} s_M(t).$$

V souladu s poučkou o Fourierově obrazu derivace (1.56) tedy dostáváme

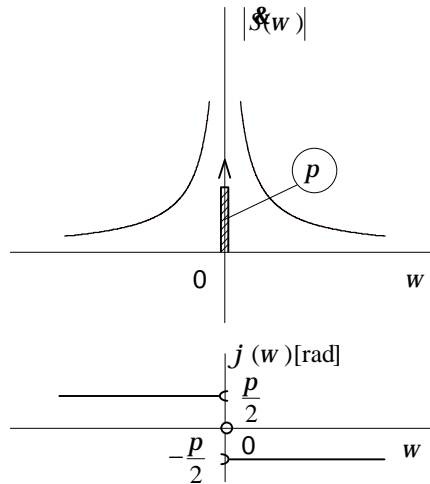
$$F\{d(t)\} = 1 = j\omega F\{s_M(t)\} \Rightarrow F\{s_M(t)\} = \frac{1}{j\omega}.$$

Zároveň platí

$$F\{0,5\} = p d(w).$$

Proto

$$F\left\{\frac{1}{-}\right\} = \frac{1}{jw} + p d(w).$$



Obr.1.41. Spektrální funkce jednotkového skoku.

Pokuste se příklad vyřešit pomocí poučky o integraci - viz vzorec (1.61).

r 1.66. Zapište obdélníkový signál z obr.1.36a) pomocí lineárních operací s jednotkovým skokem.

p Řešení:

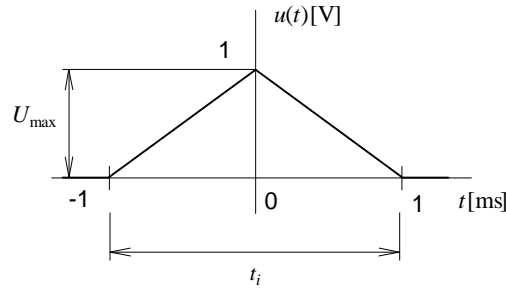
$$u(t) = U_{\max} \left[\frac{1}{-}\left(t + \frac{t_i}{2}\right) - \frac{1}{-}\left(t - \frac{t_i}{2}\right) \right] = 100 \left[\frac{1}{-}\left(t + 10^{-3}\right) - \frac{1}{-}\left(t - 10^{-3}\right) \right] \text{ [V, s]}.$$

r 1.67. Určete spektrální funkci obdélníkového impulsu z obr.1.36a) na základě znalosti spektrální funkce jednotkového skoku a výsledku příkladu 1.66.

p Řešení:

$$\begin{aligned} \&wgrave(w) &= F\{u(t)\} &= F\left\{U_{\max} \left[\frac{1}{-}\left(t + \frac{t_i}{2}\right) - \frac{1}{-}\left(t - \frac{t_i}{2}\right) \right]\right\} &= U_{\max} \left[F\left\{\frac{1}{-}\left(t + \frac{t_i}{2}\right)\right\} - F\left\{\frac{1}{-}\left(t - \frac{t_i}{2}\right)\right\} \right] \\ &= (\text{poučka o posunutí signálu v čase}) &= \\ &= U_{\max} F\left\{\frac{1}{-}(t)\right\} \left[e^{jw t_i/2} - e^{-jw t_i/2} \right] &= U_{\max} \left[\frac{1}{jw} + p d(w) \right] 2j \sin(w t_i/2) = \\ &= \frac{U_{\max}}{jw} 2j \sin(w t_i/2) + U_{\max} p d(w) 2j \sin(w t_i/2) &\Rightarrow U_{\max} t_i \text{sinc}(w t_i/2). \\ & &= 0, \text{ viz vzorec (1.78)} \end{aligned}$$

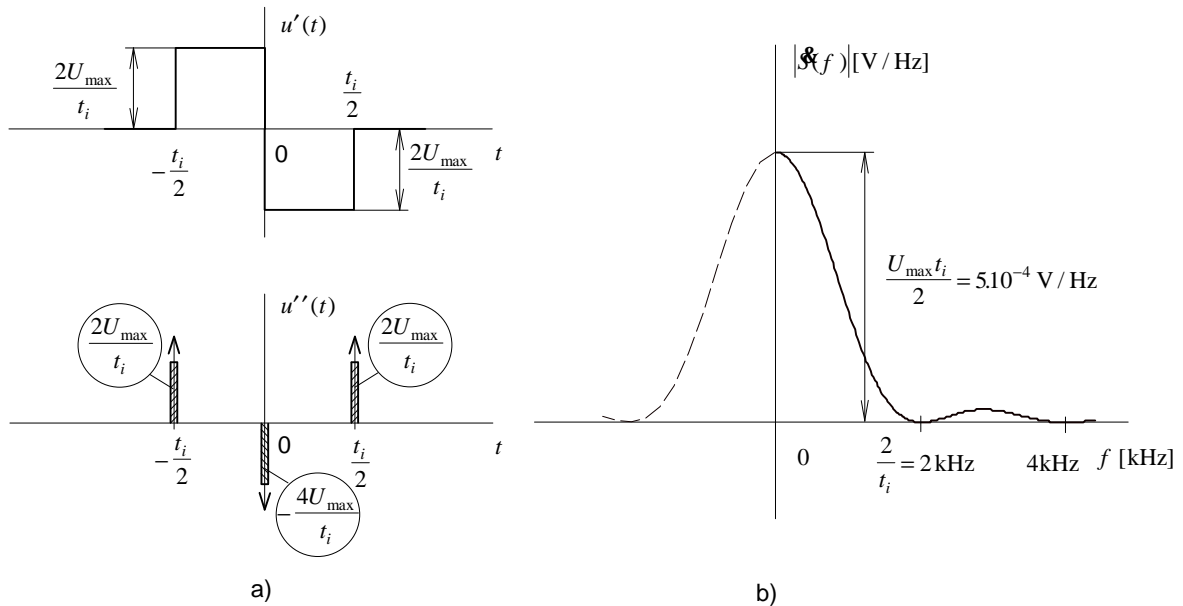
- r 1.68.** Pomocí pravidel o Fourierově transformaci derivace a integrálu signálu určete spektrální funkci trojúhelníkového impulsu $u(t)$ na obr.1.42 pro $U_{\max} = 1\text{V}$ a $t_i = 1\text{ms}$.



Obr.1.42. Analyzovaný impuls.

p Řešení:

(Viz též obr.1.43).



Obr.1.43. Způsob odvození spektrální funkce a výsledný průběh.

$$u'(t) = \frac{2U_{\max}}{t_i} \mathbb{1}\left(t + \frac{t_i}{2}\right) - \frac{4U_{\max}}{t_i} \mathbb{1}(t) + \frac{2U_{\max}}{t_i} \mathbb{1}\left(t - \frac{t_i}{2}\right),$$

$$u''(t) = \frac{2U_{\max}}{t_i} d\left(t + \frac{t_i}{2}\right) - \frac{4U_{\max}}{t_i} d(t) + \frac{2U_{\max}}{t_i} d\left(t - \frac{t_i}{2}\right).$$

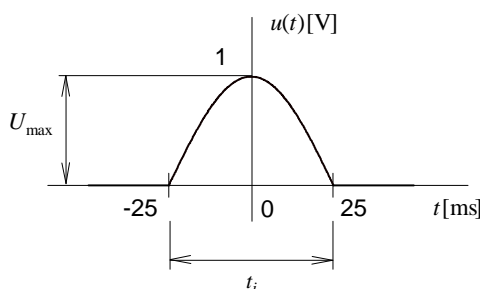
$$\begin{aligned} F\{u''(t)\} &= (\text{pravidlo o časovém posuvu signálu}) = \frac{2U_{\max}}{t_i} \left[e^{j\omega t_i/2} - 2 + e^{-j\omega t_i/2} \right] = \\ &= -\frac{8U_{\max}}{t_i} \sin^2(\omega t_i/4). \end{aligned}$$

$$F\{u'(t)\} = (\text{pravidlo o integrálu signálu}) = \frac{1}{j\omega} F\{u''(t)\} = -\frac{8U_{\max}}{j\omega t_i} \sin^2(\omega t_i/4).$$

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} F\{u'(t)\} = \frac{8U_{\max}}{\omega^2 t_i} \sin^2(\omega t_i/4) = \frac{U_{\max} t_i}{2} \operatorname{sinc}^2(\omega t_i/4) =$$

$$= 5.10^{-4} \operatorname{sinc}^2\left(2.5.10^{-4} \omega\right) \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}}\right].$$

r 1.69. Na základě poučky o spektrální funkci součinu dvou signálů (1.62) určete spektrální funkci impulsu na obr.1.44 pro $U_{\max} = 1\text{V}$ a $t_i = 50\text{ms}$.



Obr.1.44. Analyzovaný impuls.

p Řešení:

Signál je součinem kosinového signálu a obdélníkového impulsu $u_{obd}(t)$ o šířce t_i a výšce 1V:

$$u(t) = U_{\max} \cos(\omega t) \cdot u_{obd}(t).$$

Jednotlivé spektrální funkce:

$$F\{U_{\max} \cos(\omega t)\} = (\text{viz příklad 1.63}) = U_{\max} p d(\omega - \omega) + U_{\max} p d(\omega + \omega),$$

$$F\{u_{obd}(t)\} = (\text{viz příklad 1.59}) = t_i \operatorname{sinc}(\omega t_i/2),$$

$$F\{U_{\max} \cos(\omega t) u_{obd}(t)\} = (\text{pravidlo součinu}) =$$

$$= \frac{U_{\max} t_i}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(x t_i/2) p [d(\omega - x - \omega) + d(\omega + x + \omega)] dx =$$

$$= (\text{filtrační účinek Diracova impulsu}) = \frac{U_{\max} t_i}{2} \left\{ \operatorname{sinc}\left[\left(\omega + \omega\right) \frac{t_i}{2}\right] + \operatorname{sinc}\left[\left(\omega - \omega\right) \frac{t_i}{2}\right] \right\}.$$

S přihlédnutím k tomu, že platí

$$\omega t_i = \frac{2p}{T} t_i = p,$$

lze výsledný vzorec podstatně zjednodušit:

$$U(\omega) = \frac{2U_{\max} \omega}{\omega^2 - \omega^2} \cos\left(\omega \frac{t_i}{2}\right) = \frac{40p}{(20p)^2 - \omega^2} \cos\left(2.5.10^{-2} \omega\right) \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}}\right].$$

r 1.70. Zakreslete kmitočtovou závislost jednostranné spektrální hustoty energie obdélníkového impulsu z obr.1.36a) pro $U_{\max} = 1\text{V}$ a $t_i = 1\text{ms}$. Vypočítejte energii, obsaženou v impulsu v kmitočtových pásmech $(0 \div 1)\text{kHz}$, $(1 \div 2)\text{kHz}$ a $(2 \div 3)\text{kHz}$.

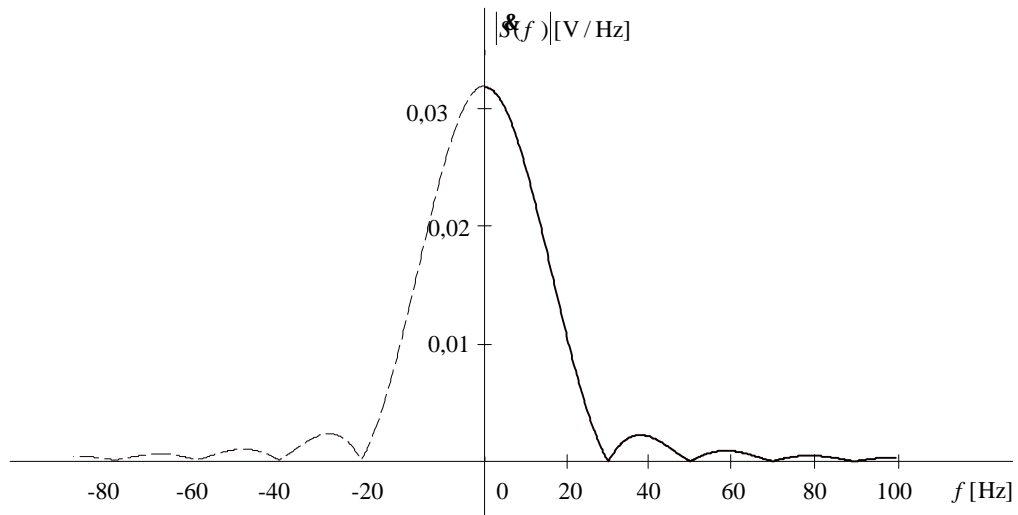
p Řešení:

Spektrální hustota signálu

$$U(\omega) = U_{\max} t_i \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{t_i}{2}\right) = 10^{-3} \operatorname{sinc}\left(5.10^{-4} \omega\right) \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}}\right].$$

Jednostranná spektrální hustota energie

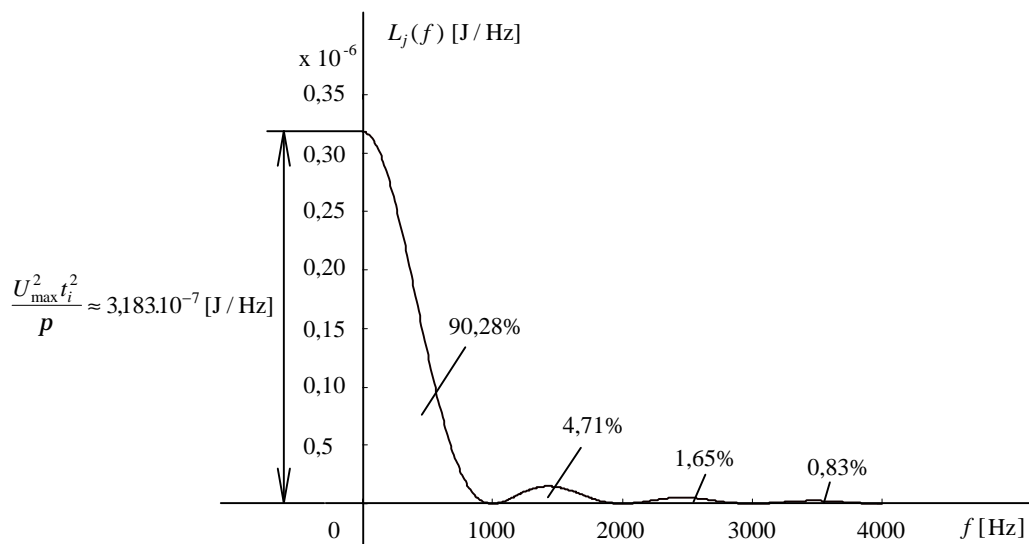
$$L_j(\omega) = \frac{1}{P} |U(\omega)|^2 = \frac{U_{\max}^2 t_i^2}{P} \operatorname{sinc}^2\left(\omega \frac{t_i}{2}\right) = 3,183.10^{-7} \operatorname{sinc}^2\left(5.10^{-4} \omega\right) \left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}}\right].$$

**Obr.1.45.** Modul spektrální funkce impulsu z obr.1.44.

Celková energie impulsu (nejprve přes spektrální hustotu, pak jednodušší výpočet z definice energie; viz Parsevalův teorém)

$$W = \int_0^{\infty} L_j(\omega) d\omega = \frac{U_{\max}^2 t_i^2}{P} \int_0^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\omega \frac{t_i}{2}\right) d\omega = \left| \int_0^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x) dx = \frac{P}{2} \right| = U_{\max}^2 t_i = 1 \text{ mJ}.$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \int_{-t_i/2}^{+t_i/2} U_{\max}^2 dt = U_{\max}^2 t_i = 1 \text{ mJ}.$$

**Obr.1.46.** Jednostranná spektrální hustota energie impulsu z obr.1.36a).

Energie obsažená v spektrálních pásmech:

$$W_{(0-1)kHz} = \int_0^{2p.1000} L_j(w)dw \approx 3,183 \cdot 10^{-7} \int_0^{2p.1000} \text{sinc}^2(5 \cdot 10^{-4} w)dw \approx 0,9028 \text{mJ},$$

$$W_{(1-2)kHz} = \int_{2p.1000}^{4p.1000} L_j(w)dw \approx 3,183 \cdot 10^{-7} \int_{2p.1000}^{4p.1000} \text{sinc}^2(5 \cdot 10^{-4} w)dw \approx 0,0471 \text{mJ},$$

$$W_{(2-3)kHz} = \int_{4p.1000}^{6p.1000} L_j(w)dw \approx 3,183 \cdot 10^{-7} \int_{4p.1000}^{6p.1000} \text{sinc}^2(5 \cdot 10^{-4} w)dw \approx 0,0165 \text{mJ}.$$

Integrály byly vyčísleny v MATLABu za použití příkazu

`quad('lj',a,b)`

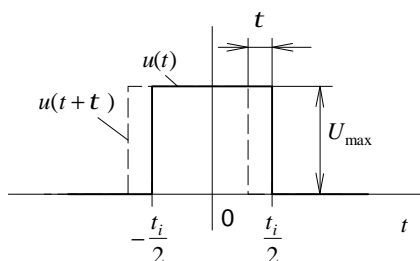
kde *lj* je název funkce jednostranné spektrální hustoty energie definované v M-souboru a *a* a *b* jsou dolní a horní integrační mez.

& Poznatek z příkladu:

V prvním spektrálním laloku obdélníkového impulsu v kmitočtovém pásmu (0÷1/šířka impulsu) [Hz] je soustředěno více než 90% veškeré energie impulsu.

r 1.71. Určete autokorelační funkci obdélníkového impulsu z obr.1.36a) na základě definičního vztahu autokorelační funkce (1.70).

p Řešení:



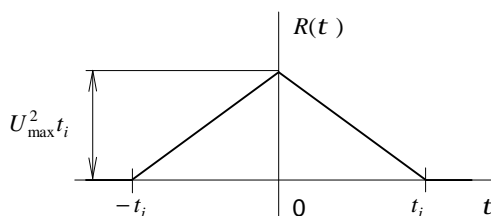
Obr.1.47. K výpočtu autokorelační funkce obdélníkového impulsu.

Autokorelační funkce: $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u(t+t)dt$.

Z obr.1.47 vyplývá, že pro posunutí $t \notin \langle -t_i, +t_i \rangle$ se impulsy nebudou překrývat a tudíž $R(t) = 0$.

Pro $t \in \langle -t_i, +t_i \rangle$ bude překryvná plocha nezávislá na směru posunutí (nezávisí na znaménku *t*) a bude

$$R(t) = \int_{t_i-t}^{t_i} U_{\max}^2 dt = U_{\max}^2 (t_i - t), \quad t \in \langle -t_i, +t_i \rangle.$$



Obr.1.48. Autokorelační funkce impulsu z obr.1.36a).

& Poznatek z příkladu:

Autokorelační funkce impulsu konečného trvání má také konečné „trvání“ (dvakrát delší než u impulsu).

r 1.72. Z autokorelační funkce impulsu z př.1.71 určete jeho modulové spektrum.

p Řešení:

Kvadrát modulu spektrální hustoty signálu je Fourierovou transformací jeho autokorelační funkce (viz vztah (1.73)).

Fourierův obraz $R(t)$ trojúhelníkového tvaru: využijeme výsledku z př.1.68:

$$F\{R(t)\} = U_{\max}^2 t_i^2 \operatorname{sinc}^2\left(w \frac{t_i}{2}\right).$$

Proto

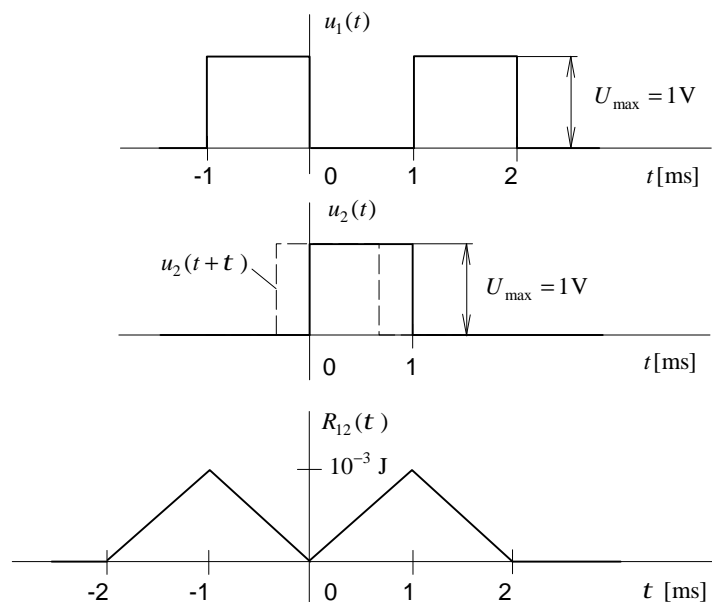
$$|U(w)| = \sqrt{F\{R(t)\}} = U_{\max} t_i \left| \operatorname{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) \right|,$$

což je známý vztah odvozený již v př.1.59.

r 1.73. Určete vzájemnou korelační funkci $R_{12}(t)$ impulsů $u_1(t)$ a $u_2(t)$ na obr. 1.49.

p Řešení:

Viz obr.1.49.



Obr.1.49. K určení vzájemné korelační funkce signálů u_1 a u_2 .

r 1.74. Určete vzájemnou korelační funkci $R_{12}(t)$ impulsu $u_2(t)$ z obr.1.49 a periodického rušivého napětí

$$u_1(t) = U_1 \cos(Wt), \quad U_1 = 10\text{mV}, \quad F = W/2\pi = 100\text{kHz}.$$

p Řešení:

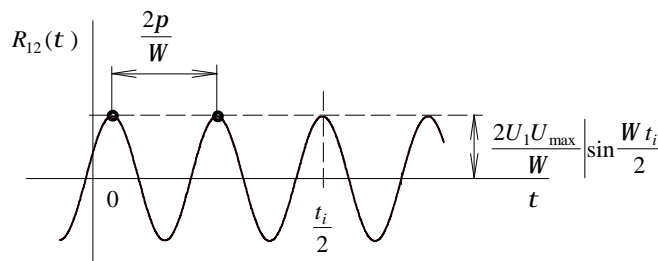
Impuls $u_2(t)$ překrývá vždy právě časový interval 1ms, v němž se nachází přesně 100 period rušivého harmonického signálu. Integrál ze součinu obou signálů bude proto nula nezávisle na velikosti posunutí t :

$$R_{12}(t) = 0.$$

r 1.75. Řešte příklad 1.74 pro obecné hodnoty šířky impulsu a kmitočtu rušivého signálu.

p Řešení:

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)u_2(t+t)dt = \int_{-t}^{t_i-t} U_1 \cos(Wt)U_{\max} dt = \frac{2U_1U_{\max}}{W} \sin\left(W\frac{t_i}{2}\right) \cos\left[W\left(t - \frac{t_i}{2}\right)\right].$$



Obr.1.50. Vzájemná korelační funkce impulsu u_2 z obr.1.49 a harmonického rušení.

& Poznátka z příkladu:

Vzájemná korelační funkce jednorázového impulsu a periodického signálu je periodická. Opakovací periody periodického signálu a korelační funkce jsou stejné. V případě obdélníkového impulsu závisí rozkmit korelační funkce na relacích mezi opakovací periodou a šířkou impulsu. Je-li perioda celistvým násobkem šířky impulsu, je vzájemná korelační funkce identicky rovna nule.

r 1.76. Pomocí DFT vypočtete spektrální funkci impulsu z obr.1.51a) na kmitočtech (0, 100, 200, ..., 1000) Hz.

p Řešení:

Doporučujeme prostudovat teoretický souhrn na začátku kapitoly, položku „Vztah Fourierovy transformace a DFT“.

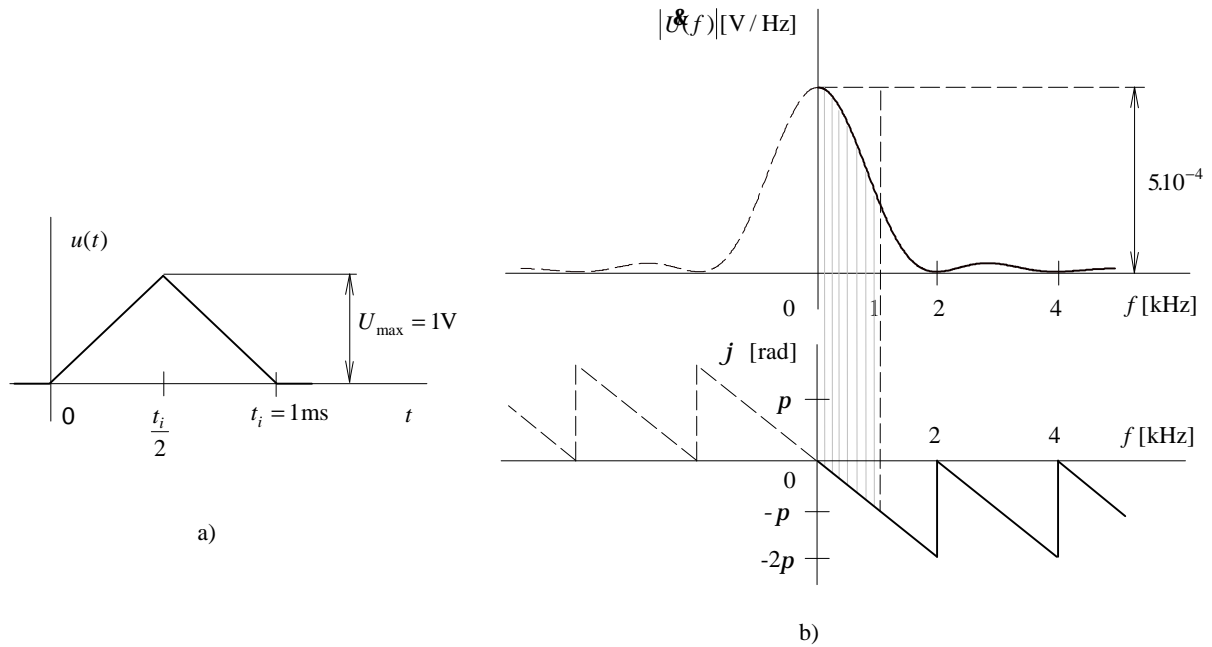
Analytické řešení spektrální funkce převezmeme z příkladu 1.68, kde je proveden výpočet impulsu stejného typu, pouze s časovým posunem:

$$U(w) = \frac{U_{\max}t_i}{2} \text{sinc}^2\left(w\frac{t_i}{4}\right) e^{-jw t_i/2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{sinc}^2\left(2,5 \cdot 10^{-4} w\right) e^{-j5 \cdot 10^{-4} w} \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right].$$

Požadujeme numerický výpočet $U(f)$ pomocí DFT na kmitočtech $k.F_S$, $F_S = 100\text{Hz}$, $k = 0, 1, \dots, 10$. Odvozený vzorec pak použijeme k ověření přesnosti numerického výpočtu.

Kmitočtu F_S odpovídá délka segmentu časového průběhu, která vstoupí do algoritmu DFT:

$$T_S = 1/F_S = 10 \text{ ms}.$$



Obr.1.51. K výpočtu spektrální funkce impulsu pomocí DFT.

Signál musíme na tomto úseku navzorkovat. Získáme N vzorků, z nichž vypočteme N komplexních koeficientů DFT. Čím větší počet vzorků zvolíme, tím přesnějšího výpočtu dosáhneme.

Volba N :

Jestliže existuje kmitočet F_{MAX} takový, že pro všechny kmitočty $f > F_{MAX}$ je spektrální funkce signálu již nulová (zanedbatelná), pak zvolíme-li

$$N > 2 \frac{F_{MAX}}{F_S}, \quad (1.83)$$

výpočet spektrální funkce z DFT bude přesný (zatížený relativně malou chybou). Navíc zvolíme-li N rovno celočíselné mocnině dvou, můžeme k výpočtu koeficientů DFT použít algoritmy rychlé Fourierovy transformace (FFT).

Například pro kmitočet 25kHz vychází z analytického vztahu pro spektrální hustotu impulsu modul

$$U(f = 25\text{kHz}) \approx 3,24 \cdot 10^{-7} \text{ V/Hz},$$

což je asi 0,065% z maximální hodnoty spektrální hustoty

$$U(0) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V/Hz}.$$

Považujeme-li hodnoty spektrální funkce za zanedbatelné pro $f > F_{MAX} = 25\text{kHz}$, pak zvolíme

$$N > 2 \frac{25000}{100} = 500.$$

Zvolíme $N = 512$.

Časový segment signálu $\langle 0, T_S \rangle = \langle 0, 10\text{ms} \rangle$ rozdělíme na 512 stejných dílů a odečteme 512 vzorků signálu:

$$u_k = u(t) \Big|_{t=kT_S/N} = u(t) \Big|_{t=k \cdot 19,5\mu\text{s}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Vzorky jsou tedy číslovány od 0 do $N-1$ a N -tý vzorek se již do souboru nezahrnuje.

Nyní vypočteme $N = 512$ koeficientů DFT podle (1.29)

$$X_k, \quad k = 0, 1, \mathbf{K}, N - 1$$

a z jejich první poloviny (t.j. z koeficientů č. 0, 1, 2, ..., 255) stanovíme 256 vzorků spektrální funkce podle (1.74):

$$U(f) \Big|_{f=nF_s} = \frac{T_s}{N} X_n, \quad n = 0, 1, \mathbf{K}, \left[\frac{N}{2} \right],$$

neboli

$$U(f) \Big|_{f=n.100\text{Hz}} = 19,5 \cdot 10^{-6} X_n, \quad n = 0, 1, \mathbf{K}, 255.$$

Můžeme takto vypočíst vzorky spektrální funkce až do kmitočtu 25,5kHz, i když jsme původně požadovali výpočet jen do 1kHz. Koeficienty DFT vykazují od $n = 256$ do 511 symetrii podle (1.31) a jsou tedy k výpočtu vyšších harmonických nepoužitelné.

- Ukázka řešení pomocí MATLABu:

Rozdělíme-li úsek signálu délky 10ms na 512 výpočetních bodů, pak na vzestupnou část pilovitého signálu v intervalu 0-0,5 ms připadají vzorky č. 0 až 25 a na sestupnou část od 0,5 ms do 1 ms vzorky č. 26 až 51:

$$u(k) = \begin{cases} \frac{5}{128} k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \mathbf{K}, 25; \\ 2 - \frac{5}{128} k & \text{pro } k = 26, 27, 28, \mathbf{K}, 51. \end{cases}$$

Ostatní vzorky jsou nulové.

```

k=0:25; % Generování nezávisle proměnné pro
        % 1. úsek signálu
s=5*k/128; % Výpočet vzorků č. 0 až 25 (v MATLABu
           % jsou to vzorky č. 1 až 26)
k=26:51; % Generování nezávisle proměnné pro
        % 2. úsek signálu
s(27:52)=2-5*k/128; % Výpočet vzorků č. 26 až 51 (v MATLABu
                   % jsou to vzorky č. 27 až 52)
x=fft(s,512); % Výpočet 512- bodové FFT signálu
x(1:11) % Zobrazení koeficientů FFT č. 0 až 10
        % (v MATLABu č. 1 až 11)

ans =
Columns 1 through 4
25.5938    24.1414 - 7.8450i    20.0327 -14.5569i    13.9610 -19.2200i
Columns 5 through 8
6.9190 -21.3043i    -0.0032 -20.7477i    -5.8313 -17.9372i    -9.8822 -13.5973i
Columns 9 through 11
-11.8638 - 8.6173i -11.8846 - 3.8605i -10.3758 + 0.0000i
u=10e-3/512*x(1:11) % Výpočet 11 vzorků spektrální funkce
u =

```

```

1.0e-003 *
Columns 1 through 4
0.4999      0.4715 - 0.1532i  0.3913 - 0.2843i  0.2727 - 0.3754i
Columns 5 through 8
0.1351 - 0.4161i -0.0001 - 0.4052i -0.1139 - 0.3503i -0.1930 - 0.2656i
Columns 9 through 11
-0.2317 - 0.1683i -0.2321 - 0.0754i -0.2027 + 0.0000i
abs(u)                                % Výpočet 11 vzorků modulu spektrální
                                       funkce
ans =
1.0e-003 *
Columns 1 through 7
0.4999  0.4958  0.4837  0.4640  0.4375  0.4052  0.3684
Columns 8 through 11
0.3283  0.2864  0.2441  0.2027
phase(u)*180/pi                        % Výpočet 11 vzorků argumentu spektrální
                                       funkce ve stupních
ans =
Columns 1 through 7
0 -18.0022 -36.0043 -54.0062 -72.0077 -90.0087 -108.0091
Columns 8 through 11
-126.0087 -144.0072 -162.0044 -180.0000

```

V tabulce jsou shrnuty výsledky výpočtů na kmitočtech do 1kHz spolu s přesnými hodnotami spektrální funkce.

k	\mathcal{X}_k	$\mathcal{U}(k, F_S)$ [$\mu\text{V} / \text{Hz}$]	$\arg \mathcal{U}(k, F_S)$ [$^\circ$]	$\mathcal{S}(k, F_S)$ [$\mu\text{V} / \text{Hz}$]	$\arg \mathcal{S}(k, F_S)$ [$^\circ$]
0	25,59375 - j0,00000	499,878	0	500	0
1	24,14137 - j7,84505	495,782	-18,00	495,901	-18
2	20,0327 - j14,55694	483,656	-36,00	483,766	-36
3	13,96099- j19,22002	463,972	-54,01	464,068	-54
4	6,91901- j21,30426	437,493	-72,01	437,570	-72
5	-0,00316- j20,74767	405,228	-90,01	405,285	-90
6	-5,83130- j17,93717	368,383	-108,01	368,420	-108
7	-9,88215- j13,59728	328,301	-126,01	328,319	-126
8	-11,86385 - j8,61730	286,390	-144,01	286,393	-144
9	-11,88458 - j3,86052	244,060	-162,00	244,054	-162
10	-10,37581 - j0,00000	202,653	-180	202,642	-180
M	M	M	M	M	M

& Poznátky z příkladu:

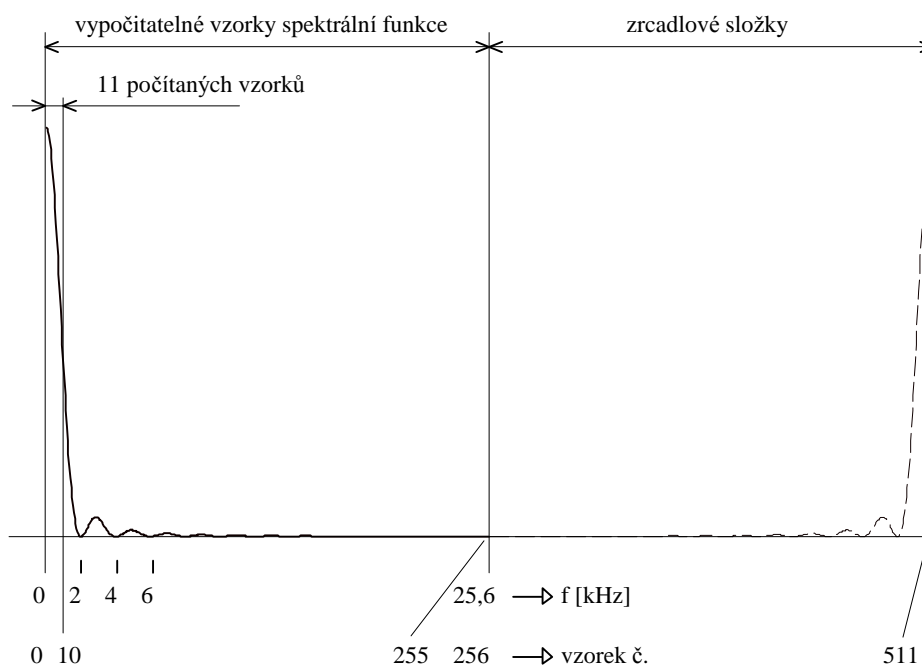
- Počet bodů N -bodové DFT (FFT) nemusí souviset s počtem bodů, v nichž chceme určit vzorky spektrální funkce. Pro volbu N je důležitá podmínka (1.83). Na jejím dodržení je závislá přesnost výpočtu spektra.
- Je-li doba trvání jednorázového impulsu T_i , pak to nemusí být nutně délka segmentu signálu T_S , který je vzorkován pro potřeby DFT. Musí platit

$$T_S \geq T_i, \quad (1.84)$$

což vlastně znamená, že k vzorkům impulsu je možno přidávat před aplikací DFT nulové vzorky.

- Vzorky spektrální funkce vypočtené pomocí DFT leží na kmitočtech

$$n \cdot F_S = \frac{n}{T_S} \leq \frac{n}{T_i}, \quad n = 0, 1, \mathbf{K}, \left[\frac{N}{2} \right].$$



Obr.1.52. Výsledek spektrální analýzy impulsu z obr.1.51a) pomocí 512-bodové FFT.

Znamená to, že s růstem T_S klesá rozestup mezi vzorky vypočteného spektra. Spektrum je podrobněji vykresleno, roste spektrální rozlišení. Doplněním vzorků jednorázových impulsů nulovými vzorky tedy dosáhneme lepšího spektrálního rozlišení. Nejhorší rozlišení je pro $T_S = T_i$.