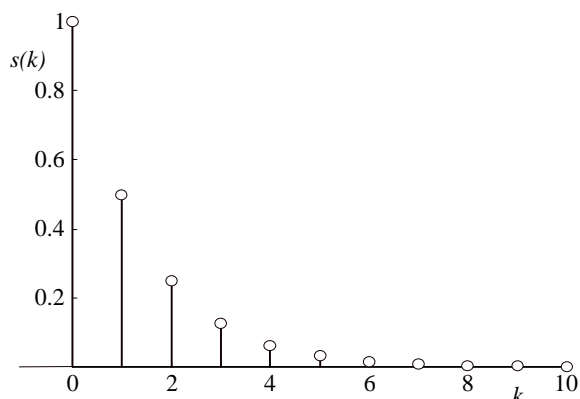


ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

r 6.42 Určete mohutnost a energii impulsu

$$s(k) = Ab^k \underline{1}(k), \quad A = 1, \quad b = 0,5.$$



Obr.6.12. Analyzovaný diskretní signál.

p Řešení:

Mohutnost impulsu

$$M = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) = A \sum_{k=0}^{+\infty} b^k = \|b\| < 1 \Big| = \frac{A}{1-b} = \frac{1}{1-0,5} = 2.$$

Normovaná energie

$$W = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^2(k) = A^2 \sum_{k=0}^{+\infty} b^{2k} = \|b\| < 1 \Big| = \frac{A^2}{1-b^2} = \frac{1}{1-0,25} = 1,3\bar{3}.$$

r 6.43. Pomocí DTFT vypočítejte spektrální hustotu signálu z př.6.42 a nakreslete modulové a fázové spektrum.

p Řešení:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{\omega}) &= DTFT\{s(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)e^{-jk\bar{\omega}} = A \sum_{k=0}^{+\infty} b^k e^{-jk\bar{\omega}} = \|b\| < 1 \Big| = \frac{A}{1-be^{-j\bar{\omega}}} = \\ &= \frac{A}{1-b\cos\bar{\omega} + jb\sin\bar{\omega}} = \frac{A}{\sqrt{(1-b\cos\bar{\omega})^2 + (b\sin\bar{\omega})^2}} e^{j\bar{\omega}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+b^2-2b\cos\bar{\omega}}} e^{j\bar{\omega}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|\mathcal{S}(\bar{\omega})| = S(\bar{\omega}) = \frac{A}{\sqrt{1+b^2-2b\cos\bar{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{1,25-\cos\bar{\omega}}},$$

$$j(\bar{\omega}) = -\arctg \frac{b\sin\bar{\omega}}{1-b\cos\bar{\omega}} + \begin{matrix} 0 & ..1-b\cos\bar{\omega} \geq 0 \\ p & ..1-b\cos\bar{\omega} < 0 \end{matrix} = -\arctg \frac{0,5\sin\bar{\omega}}{1-0,5\cos\bar{\omega}} + \begin{matrix} 0 & ..1-0,5\cos\bar{\omega} \geq 0 \\ p & ..1-0,5\cos\bar{\omega} < 0 \end{matrix}$$

Odvozené vzorce můžeme naprogramovat a vykreslit na počítači amplitudové a fázové spektrum. Tyto činnosti za nás vykoná MATLAB.

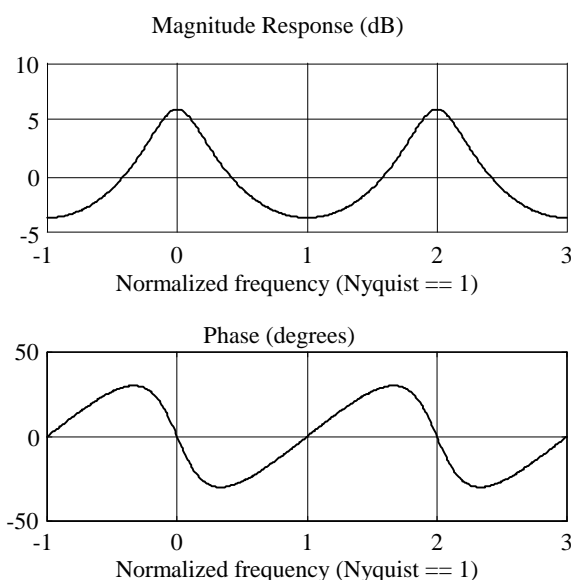
• Ukázka programu v MATLABu:

```
B=[1 0];A=[1 -0.5]; % zadání koeficientů čitatele a jmenovatele spektrální funkce;
                    % spektrální funkce se předpokládá ve tvaru
```

$$\frac{B[1] + B[2]z^{-1} + B[3]z^{-2} + \dots}{1 + A[2]z^{-1} + A[3]z^{-2} + \dots}, z = e^{j\bar{w}}$$

```
w=-pi:4*pi/500:3*pi; % zadání rozsahu normovaného kmitočtu  $\bar{w}$  a výpočetního kroku
```

```
freqz(b,a,w); % výpočet a vykreslení modulového a fázového spektra
```



Obr.6.13. Výstup z MATLABu - amplitudové a fázové spektrum impulsu z obr.6.12.

& Poznátky z příkladu:

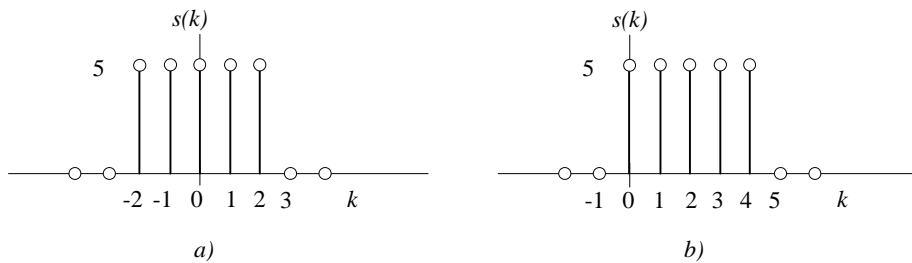
Spektrální funkce diskrétních signálů se periodicky opakují s periodou 2π radiánů normovaného kmitočtu \bar{w} . Frekvenční osa je někdy cejchována poměrem skutečné a vzorkovací frekvence nebo poměrem skutečné a tzv. Nyquistovy frekvence. Nyquistova frekvence je polovinou vzorkovací frekvence, je to mezní hodnota ohraničující podmínku rekonstrukce signálu z jeho vzorků (viz vzorkovací poučka).

Srovnajte výsledné charakteristiky se spektrální funkcí obdobného impulsu souvislého času v příkladu 1.57 a přesvědčte se o správnosti pravidla (6.111).

r 6.44. Určete spektrální funkci obdélníkových signálů na obr.6.14:

a) $s(k) = \begin{cases} 5 & \text{pro } k = -2, -1, 0, 1, 2, \\ 0 & \text{pro ostatní } k. \end{cases}$

b) $s(k) = \begin{cases} 5 & \text{pro } k = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 0 & \text{pro ostatní } k. \end{cases}$



Obr.6.14. Analyzované diskrétní signály.

p Řešení:

$$\begin{aligned}
 a) \mathcal{S}(\bar{w}) &= \sum_{k=-2}^{+2} s(k)e^{-jk\bar{w}} = 5 \sum_{k=-2}^{+2} e^{-jk\bar{w}} = 5e^{-j(-2)\bar{w}} \frac{1 - e^{-j5\bar{w}}}{1 - e^{-j\bar{w}}} = 5e^{j2\bar{w}} \frac{e^{-j2,5\bar{w}}}{e^{-j0,5\bar{w}}} \frac{e^{j2,5\bar{w}} - e^{-j2,5\bar{w}}}{e^{j0,5\bar{w}} - e^{-j0,5\bar{w}}} = \\
 &= 5 \frac{\sin(2,5\bar{w})}{\sin(0,5\bar{w})} = 25 \frac{\text{sinc}(2,5\bar{w})}{\text{sinc}(0,5\bar{w})}.
 \end{aligned}$$

b) Aplikace poučky (6.65) o posunutí vzorků

$$\mathcal{S}(\bar{w}) = 5e^{-j(-2)\bar{w}} \frac{1 - e^{-j5\bar{w}}}{1 - e^{-j\bar{w}}} e^{-j2\bar{w}} = 5 \frac{1 - e^{-j5\bar{w}}}{1 - e^{-j\bar{w}}} = 5 \frac{\sin(2,5\bar{w})}{\sin(0,5\bar{w})} e^{-j2\bar{w}} = 25 \frac{\text{sinc}(2,5\bar{w})}{\text{sinc}(0,5\bar{w})} e^{-j2\bar{w}}.$$

K vykreslení charakteristik můžeme opět využít MATLABu, a to buď přímým naprogramováním výsledných vztahů, nebo pomocí funkce `FREQZ`. Použijeme-li druhou metodu, musíme si uvědomit, že přepis výsledků pomocí operátoru z je následující:

$$a) S(z) = 5z^2 \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}},$$

$$b) S(z) = 5 \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Amplitudové spektrum vyjde v obou případech stejné, protože výrazy se liší násobícím faktorem $z^2 = e^{j2\bar{w}}$, jehož modul je 1. V případě b) proběhne naprogramování snadno. Fázi v případě a) získáme z fáze b) přičtením výrazu $2\bar{w}$.

• Ukázka programu v MATLABu

```

b=[5 0 0 0 0 -5];a=[1 -1 0 0 0 0]; % zadání vektorů čitatele a jmenovatele
[h,w]=freqz(b,a,500); % výpočet vektorů spektrální funkce h a normované
% kruhové frekvence v 500 bodech z intervalu 0 až 2π

f=w/(2*pi); % přepočítání kruhové frekvence na obyčejnou frekvenci
mod=abs(h); % výpočet modulu spektrální funkce
faze=phase(h); % výpočet fáze spektrální funkce
subplot(3,1,1); % obrázky budou umísťovány do matice: 3 řádky, 1
% sloupec; následující obrázek bude umístěn do pozice 1.
% řádek, 1. sloupec

plot(f,mod) % vykreslení amplitudového spektra
subplot(3,1,2); % následující obrázek bude umístěn do pozice 2. řádek, 1.
% sloupec

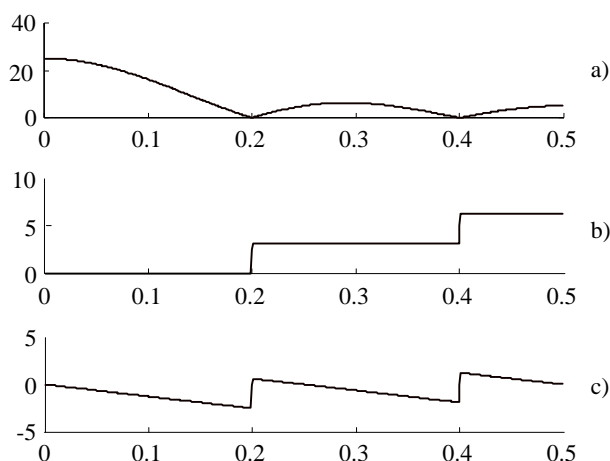
plot(f,faze+2*w) % vykreslení fázového spektra signálu a)
    
```

subplot(3,1,3);

% následující obrázek bude umístěn do pozice 3. řádek, 1. sloupec

plot(f,faze) %

% vykreslení fázového spektra signálu b)



Obr.6.15. a) amplitudové spektrum signálů z obr.6.14, b) fázové spektrum signálu ad a), c) fázové spektrum signálu ad b). Na vodorovnou osu je vynesena normovaná frekvence \bar{f} (frekvence v Hz lomeno vzorkovací frekvence). Fáze je vynášena v radiánech.

Z obr.6.15b) je vidět, že fáze se mění v násobcích p radiánů podle toho, zda je funkce *sinc* kladná nebo záporná.

ř 6.45. Pomocí výsledku z př.6.44 určete 3.harmonickou složku periodického signálu, vzniklého opakovaním obdélníkového impulsu b) z př.6.44 s opakovací periodou $N = 10$.

p Řešení:

Podle vzorce (6.27) bude mít periodický signál stejnosměrnou složku, 4 řádné harmonické a jednu degenerovanou harmonickou. Amplituda a počáteční fáze 3. harmonické se určí z koeficientu $X(3)$ DFT podle (6.27). Tento koeficient určíme přímo ze spektrální funkce impulsu podle vzorce (6.92).

$$X(3) = X(\bar{w}) \Big|_{\bar{w}=3\frac{2p}{10}} = 25 \frac{\text{sinc}(2,5\bar{w})}{\text{sinc}(0,5\bar{w})} e^{-j2\bar{w}} \Big|_{\bar{w}=0,6p} = 6,18 e^{-j0,2p}.$$

Amplituda 3.harmonické:

$$S_3 = \frac{2}{N} X(3) = \frac{2}{10} \cdot 6,18 = 1,236.$$

Fáze 3. harmonické

$$j_3 = \arg(X(3)) = -0,2p \text{ rad} = -36^\circ.$$

• Kontrola MATLABem:

```
s=[5 5 5 5 5];
```

```
% definice obdélníkového impulsu; následující příkaz FFT  
doplní posloupnost 5 nulami
```

```

x=fft(s,10);           % výpočet 10 koeficientů DFT a jejich uložení do vektoru x
abs(x(4))*2/10        % výpočet modulu koeficientu X(3) a jeho převod na
                        amplitudu 3.harmonické; číslování polí v MATLABu je od
                        jedničky, nikoliv od nuly, takže koeficient X(3) je až na 4.
                        pořadí

ans =
.. 1.2361

phase(x(4))          % výpočet fáze 3.harmonické

ans =
-0.6283
    
```

r 6.46. Určete spektrální funkci jednotkového impulsu.

p Řešení:

$$\mathcal{F}\{\bar{w}\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(k) e^{-jk\bar{w}} = 1. \quad (6.145)$$

& Poznátka z příkladu:

a) Jednotkový impuls má rovnoměrnou spektrální hustotu na všech kmitočtech. Tato vlastnost odpovídá obdobné vlastnosti Diracova impulsu souvislého času.

b) Platí inverzní Fourierova transformace diskrétního signálu IDTFT (6.57):

$$d(k) = \frac{1}{2p} \int_{\bar{w} \in 2p} 1 \cdot e^{jk\bar{w}} d\bar{w}. \quad (6.146)$$

Na rozdíl od obdobného vztahu pro Diracův impuls tento integrál a celý výsledek jsou v souladu s klasickým pojetím Riemannova integrálu.

r 6.47. Určete spektrální funkci konstantního signálu $s(k) = A$.

p Řešení:

Signál není absolutně „sumovatelný“, neboť nesplňuje podmínku (6.58). Nemá tedy spektrální funkci v klasickém smyslu, ve smyslu distribučním však ano. Z analogie se signály souvislého času lze předpokládat, že spektrální hustota konstantního signálu bude soustředěna v počátku kmitočtové osy ve formě Diracova impulsu. U signálu souvislého času byla mohutnost Diracova impulsu ve spektru $2p$ -krát velikost signálu. U signálů diskrétních se však navíc spektrální funkce opakuje s periodou $2p$. Předpokládejme tedy výsledek ve tvaru

$$\mathcal{F}\{\bar{w}\} = 2pA \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{w} - 2pm). \quad (6.147)$$

Ověříme, zda zpětnou transformací IDTFT získáme opět konstantní diskrétní signál:

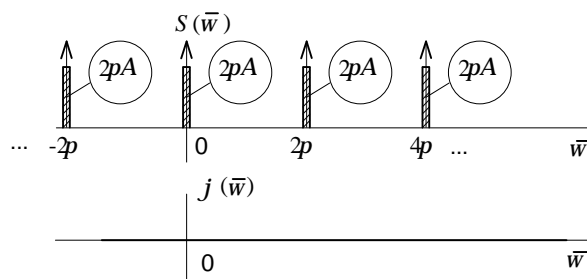
$$s(k) = \frac{1}{2p} 2pA \int_{\bar{w} \in 2p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{w} - 2pm) e^{jk\bar{w}} d\bar{w}.$$

Probíhá-li integrace jen v jednom z konkrétních intervalů $\bar{w} \in 2p$, např. $\bar{w} \in \langle 0, 2p \rangle$, pak bude integraci podléhat jen jeden z nekonečně mnoha Diracových impulsů v sumě. S uvážením filtračního

účinku Diracova impulsu dostaneme

$$s(k) = A.$$

Vzorec (6.147) je tedy spektrální funkcí konstantního diskretního signálu.



Obr.6.16. Spektrální funkce konstantního diskretního signálu.

& Poznátky z příkladu:

Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál neohraničený vede na objevení se Diracova impulsu na normovaném kmitočtu $\bar{\omega} = 0$ a všech celočíselných násobcích $2p$. Srovnajte s koeficienty Fourierovy řady konstantního signálu jakožto speciálního případu periodického diskretního signálu.

Aplikujeme-li na konstantní signál definiční vztah DTFT (6.56) a srovnáme-li tento zápis s výsledkem (6.147), zjistíme zajímavou rovnost:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\bar{\omega}} = 2p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm). \quad (6.148)$$

r 6.48. Určete spektrální funkci diskretního harmonického signálu

$$s(k) = C \cos(k\bar{\omega} + j) = \mathfrak{E}^{jk\bar{\omega}} + \mathfrak{E}^* e^{-jk\bar{\omega}}, \quad \mathfrak{E} = \frac{C}{2} e^{ij}.$$

p Řešení:

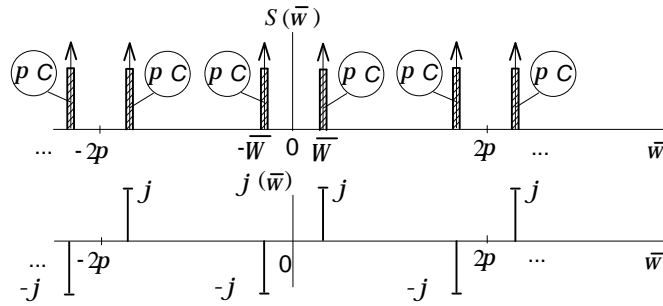
Signál není absolutně „sumovatelný“, neboť nesplňuje podmínku (6.58) - jeho mohutnost není v důsledku periodicity signálu definována. Nemá tedy spektrální funkci v klasickém smyslu, ve smyslu distribučním však ano. Při výpočtu nám pomůže rovnost (6.148).

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\bar{\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) e^{-jk\bar{\omega}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\mathfrak{E}^{jk\bar{\omega}} + \mathfrak{E}^* e^{-jk\bar{\omega}} \right) e^{-jk\bar{\omega}} = \mathfrak{E} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk(\bar{\omega}-\bar{\omega})} + \mathfrak{E}^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk(\bar{\omega}+\bar{\omega})} = \\ &= (\text{viz vzorec 6.148}) = 2p \left[\mathfrak{E} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - \bar{\omega} - 2pm) + \mathfrak{E}^* \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} + \bar{\omega} - 2pm) \right] = \\ &= p C e^{+ij} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - \bar{\omega} - 2pm) + p C e^{-ij} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} + \bar{\omega} - 2pm). \end{aligned} \quad (6.149)$$

& Poznátky z příkladu:

Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál harmonický vede na objevení se Diracových impulsů na kmitočtech $2pm \pm \bar{\omega}$ pro všechna celá m . Srovnajte s Fourierovými koeficienty diskretního harmonického signálu jakožto speciálního případu periodického signálu.

Výsledek lze odvodit na základě poučky o posunu spektra (6.66).



Obr.6.17. Spektrální funkce diskrétního harmonického signálu.

r 6.49. Určete spektrální funkci diskrétního periodického signálu daného komplexní Fourierovou řadou

$$s_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n \in N} \mathfrak{X}(n) e^{jkn \frac{2p}{N}}.$$

p Řešení:

Periodický signál není absolutně integrovatelný, skládá se však ze stejnosměrné složky a harmonických složek, u nichž existuje spektrální funkce v distribučním smyslu:

$$\mathfrak{X}_p(\bar{w}) = DTFT\{s_p(k)\} = DTFT\left\{\frac{1}{N} \sum_{n \in N} \mathfrak{X}(n) e^{jkn \frac{2p}{N}}\right\} = \frac{2p}{N} \sum_{n \in N} \mathfrak{X}(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d\left(\bar{w} - n \frac{2p}{N} - 2pm\right).$$

Srovnajte tento výsledek se vzorcem (6.60).

& Poznátky z příkladu:

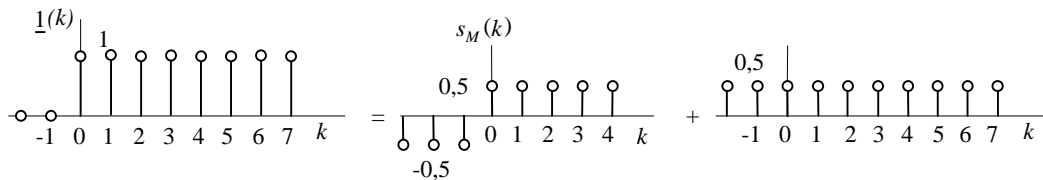
Snaha o aplikaci aparátu spektrální analýzy impulsů na signál periodický vede na objevení se Diracových impulsů na příslušných kmitočtech.

r 6.50. Určete spektrální funkci diskrétního jednotkového skoku.

p Řešení:

Jednotkový skok není absolutně integrovatelný a má nekonečnou mohutnost. Lze jej však rozložit podle (6.59) na signál $s_M(k)$ s nulovou mohutností a na konstantní signál (viz obr.6.18):

$$\underline{1}(k) = s_M(k) + 0,5.$$



Obr.6.18. Rozklad jednotkového skoku na signál s nulovou mohutností a konstantní složku.

Signál $s_M(k)$ má nulovou mohutnost a jeho diferencí je jednotkový impuls:

$$d(k) = D[s_M(k)] = s_M(k) - s_M(k-1).$$

Aplikací poučky (6.68) o DTFT diference signálu dostáváme

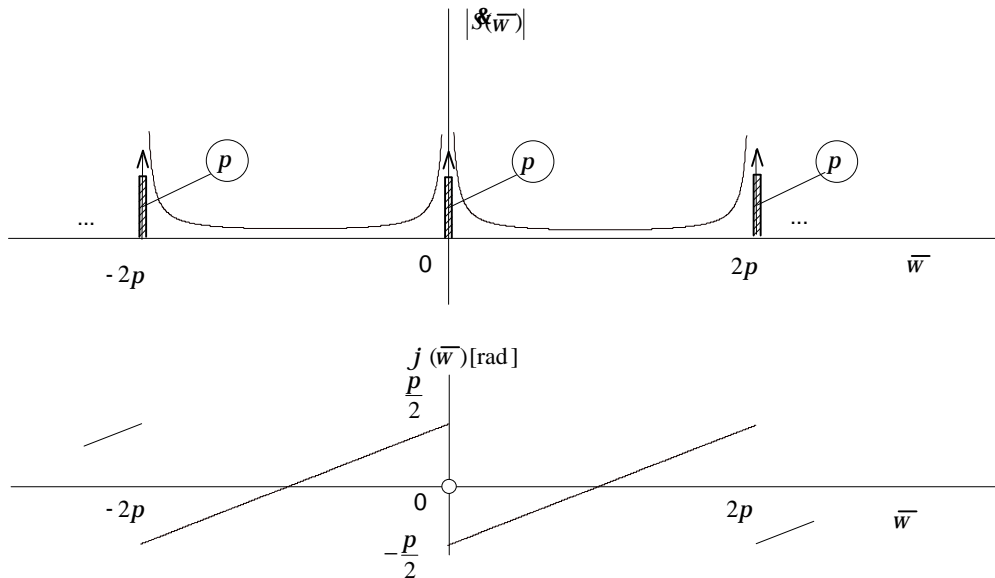
$$DTFT\{d(k)\} = 1 = (1 - e^{-j\bar{\omega}})DTFT\{s_M(k)\} \Rightarrow DTFT\{s_M(k)\} = \frac{1}{1 - e^{-j\bar{\omega}}}.$$

Z příkladu 6.47 již známe spektrální funkci konstantního signálu:

$$DTFT\{0,5\} = p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm).$$

Proto

$$DTFT\{1(k)\} = \frac{1}{1 - e^{-j\bar{\omega}}} + p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm).$$



Obr.6.19. Spektrální funkce diskrétního jednotkového skoku.

Srovnajte se spektrální funkcí jednotkového skoku jako signálu souvislého času a přesvědčte se o správnosti poučky (6.111).

r 6.51. Zapište obdélníkové signály z př.6.44 pomocí lineárních operací s jednotkovým skokem.

p Řešení:

a) $s(k) = 5[1(k+2) - 1(k-3)]$, b) $s(k) = 5[1(k) - 1(k-5)]$.

r 6.52. Určete spektrální funkci obdélníkových impulsů z př.6.44 na základě znalosti spektrální funkce jednotkového skoku a výsledků př.6.51.

p Řešení:

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{\omega}) &= DTFT\{s(k)\} = DTFT\{5[1(k+2) - 1(k-3)]\} = 5[DTFT\{1(k+2)\} - DTFT\{1(k-3)\}] = \\ &= (\text{poučka o posunutí signálu}) = 5DTFT\{1(k)\}[e^{j2\bar{\omega}} - e^{-j3\bar{\omega}}] = 5DTFT\{1(k)\}e^{j2\bar{\omega}}[1 - e^{-j5\bar{\omega}}] = \\ &= 5DTFT\{1(k)\}e^{j2\bar{\omega}}e^{-j2,5\bar{\omega}}[e^{j2,5\bar{\omega}} - e^{-j2,5\bar{\omega}}] = 5DTFT\{1(k)\}e^{-j0,5\bar{\omega}}2j\sin(2,5\bar{\omega}) = \\ &= 10j\sin(2,5\bar{\omega})e^{-j0,5\bar{\omega}}\left[\frac{1}{1 - e^{-j\bar{\omega}}} + p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm)\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{10j \sin(2,5\bar{\omega}) e^{-j0,5\bar{\omega}}}{e^{-j0,5\bar{\omega}} (e^{j0,5\bar{\omega}} - e^{-j0,5\bar{\omega}})} + 10pj \sin(2,5\bar{\omega}) e^{-j0,5\bar{\omega}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm) = \\
 &= 5 \frac{\sin(2,5\bar{\omega})}{\sin(0,5\bar{\omega})}.
 \end{aligned}$$

= 0, viz vzorec (6.115)

b)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(\bar{\omega}) &= DTFT\{s(k)\} = DTFT\{5[\underline{1}(k) - \underline{1}(k-5)]\} = 5[DTFT\{\underline{1}(k)\} - DTFT\{\underline{1}(k-5)\}] = \\
 &= (\text{poučka o posunutí signálu}) = 5DTFT\{\underline{1}(k)\}[1 - e^{-j5\bar{\omega}}] = \\
 &= 5DTFT\{\underline{1}(k)\} e^{-j2,5\bar{\omega}} [e^{j2,5\bar{\omega}} - e^{-j2,5\bar{\omega}}] = 5DTFT\{\underline{1}(k)\} e^{-j2,5\bar{\omega}} 2j \sin(2,5\bar{\omega}) = \\
 &= 10j \sin(2,5\bar{\omega}) e^{-j2,5\bar{\omega}} \left[\frac{1}{1 - e^{-j\bar{\omega}}} + p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{\omega} - 2pm) \right] = 5 \frac{\sin(2,5\bar{\omega})}{\sin(0,5\bar{\omega})} e^{-j2\bar{\omega}}.
 \end{aligned}$$

Srovnajte s výsledky př.6.44.

r 6.53. Zapište obdélníkové signály z př.6.44 pomocí lineárních operací s jednotkovým impulsem.

p Řešení:

a) $s(k) = 5[d(k+2) + d(k+1) + d(k) + d(k-1) + d(k-2)],$

b) $s(k) = 5[d(k) + d(k-1) + d(k-2) + d(k-3) + d(k-4)].$

r 6.54. Určete spektrální funkci obdélníkových impulsů z př.6.44 na základě znalosti spektrální funkce jednotkového impulsu a výsledků př.6.53.

p Řešení:

a)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(\bar{\omega}) &= DTFT\{5[d(k+2) + d(k+1) + d(k) + d(k-1) + d(k-2)]\} = \\
 &= (\text{poučka o posunutí signálu}) = 5DTFT\{d(k)\}[e^{j2\bar{\omega}} + e^{j\bar{\omega}} + 1 + e^{-j\bar{\omega}} + e^{-j2\bar{\omega}}] = \\
 &= 5[1 + 2 \cos \bar{\omega} + 2 \cos 2\bar{\omega}].
 \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme výsledek př.6.44.

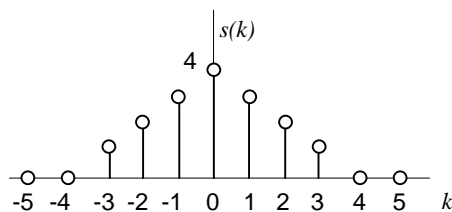
b)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(\bar{\omega}) &= DTFT\{5[d(k) + d(k-1) + d(k-2) + d(k-3) + d(k-4)]\} = \\
 &= (\text{poučka o posunutí signálu}) = 5DTFT\{d(k)\}[1 + e^{-j\bar{\omega}} + e^{-j2\bar{\omega}} + e^{-j3\bar{\omega}} + e^{-j4\bar{\omega}}] = \\
 &= 5e^{-j2\bar{\omega}} [e^{j2\bar{\omega}} + e^{j\bar{\omega}} + 1 + e^{-j\bar{\omega}} + e^{-j2\bar{\omega}}] = 5e^{-j2\bar{\omega}} [1 + 2 \cos \bar{\omega} + 2 \cos 2\bar{\omega}].
 \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme výsledek př.6.44.

r 6.55. Pomocí pravidel o DTFT diference a sumace signálu určete spektrální funkci trojúhelníkového impulsu $s(k)$ na obr.6.20.

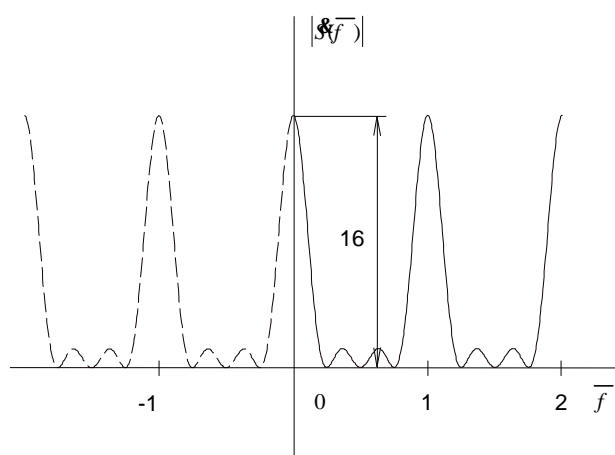
$$s(k) = \begin{cases} 4 - |k| & \text{pro } |k| \leq 4, \\ 0 & \text{pro } |k| > 4. \end{cases}$$



Obr.6.20. Analyzovaný signál.

p Řešení:

(Viz též obr.6. 21):



Obr.6.21. Spektrální hustota signálu z obrázku 6.20.

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|---|---|
| k | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $s(k)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $D[s(k)] = s(k) - s(k-1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $D^2\{s(k)\} = D\{D[s(k)]\}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Z tabulky je zřejmé, že

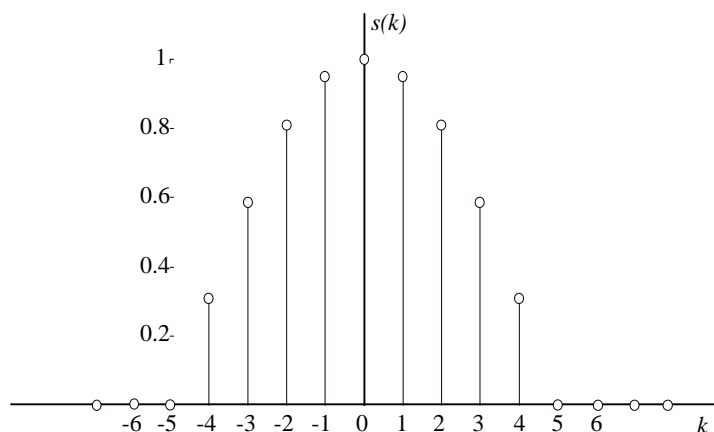
$$\begin{aligned} D^2\{s(k)\} &= d(k+3) - 2d(k-1) + d(k-5) \Rightarrow DTFT\{D^2\{s(k)\}\} = e^{j3\bar{\omega}} - 2e^{-j\bar{\omega}} + e^{-j5\bar{\omega}} = \\ &= e^{-j\bar{\omega}}(e^{j4\bar{\omega}} - 2 + e^{-j4\bar{\omega}}) = e^{-j\bar{\omega}}(2\cos 4\bar{\omega} - 2) = -2e^{-j\bar{\omega}}(1 - \cos 4\bar{\omega}) = -4e^{-j\bar{\omega}} \sin^2 2\bar{\omega}. \end{aligned}$$

Z pravidla (6.68), resp. (6.71) po dvojí aplikaci vyjde

$$\begin{aligned} DTFT\{s(k)\} &= \frac{1}{(1 - e^{-j\bar{\omega}})^2} DTFT\{D^2[s(k)]\} = \frac{1}{(e^{-j\bar{\omega}/2} \cdot 2j \sin \bar{\omega} / 2)^2} (-4e^{-j\bar{\omega}} \sin^2 2\bar{\omega}) = \\ &= \left(\frac{\sin 2\bar{\omega}}{\sin 0,5\bar{\omega}}\right)^2 = 16 \left(\frac{\text{sinc} 2\bar{\omega}}{\text{sinc} 0,5\bar{\omega}}\right)^2. \end{aligned}$$

r 6.56. Na základě poučky o spektrální funkci součinu dvou signálů (6.74) určete spektrální funkci impulsu na obr.6.22:

$$s(k) = \begin{cases} \cos(k\bar{W}) = \cos\left(k \frac{P}{10}\right) & \text{pro } k \in \langle -5, 5 \rangle, \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle -5, 5 \rangle. \end{cases}$$



Obr.6.22. Analyzovaný signál.

p Řešení:

Signál je součinem kosinového signálu a obdélníkového impulsu $s_{obd}(k)$. Přitom nezáleží na velikosti vzorků č. -5 a +5 obdélníkového impulsu. Zvolme například

$$s_{obd}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \in \langle -5, 5 \rangle, \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle -5, 5 \rangle. \end{cases}$$

Pak

$$s(k) = \cos(k\bar{W}) \cdot s_{obd}(k).$$

Jednotlivé spektrální funkce:

$$DTFT\{\cos(k\bar{W})\} = (\text{viz příklad 6.48}) = p \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(\bar{w} - \bar{W} - 2pm) + d(\bar{w} + \bar{W} - 2pm),$$

$$DTFT\{s_{obd}(k)\} = \sum_{k=-5}^{+5} e^{-jk\bar{w}} = \frac{\sin 5,5\bar{w}}{\sin 0,5\bar{w}}.$$

$$DTFT\{\cos(k\bar{W})s_{obd}(k)\} = (\text{pravidlo součinu}) =$$

$$= \frac{1}{2p} \int_{\bar{a} \in 2p} \frac{\sin 5,5\bar{a}}{\sin 0,5\bar{a}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [d(\bar{w} - \bar{W} - \bar{a} - 2pm) + d(\bar{w} + \bar{W} - \bar{a} - 2pm)] d\bar{a} =$$

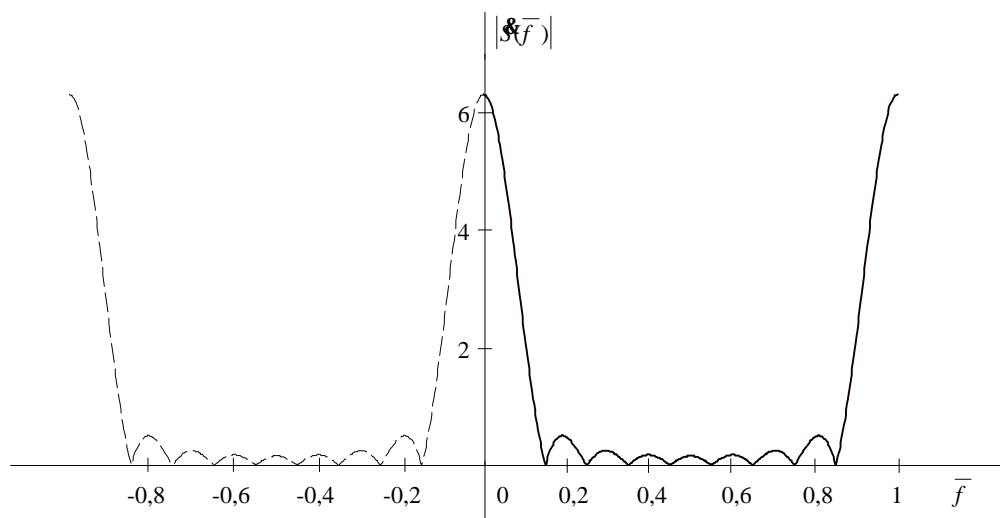
$$= (\text{filtrační účinek Diracova impulsu}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[5,5(\bar{w} - \bar{W})]}{\sin[0,5(\bar{w} - \bar{W})]} + \frac{\sin[5,5(\bar{w} + \bar{W})]}{\sin[0,5(\bar{w} + \bar{W})]} \right\}.$$

Známe-li konkrétní velikost kmitočtu

$$\bar{W} = \frac{P}{10},$$

Ize po náročnější úpravě výsledný vzorec podstatně zjednodušit:

$$\mathcal{F}(\bar{w}) = \frac{\cos 6\bar{w} \cos 5\bar{w}}{\cos \bar{w} - \cos \bar{w}} = \cos 0,6p \frac{\cos 5\bar{w}}{\cos 0,1p - \cos \bar{w}} \approx 0,309 \frac{\cos 5\bar{w}}{\cos \bar{w} - 0,951}.$$



Obr.6.23. Spektrální hustota signálu z obrázku 6.22.

r 6.57. Vypočítejte vzorky spektrální funkce signálu z př.6.56 pomocí algoritmu DFT.

p Řešení:

Využijeme toho, že je-li signál omezen na konečný počet bodů (v našem případě na 10), pak aplikací N -bodové DFT, kde $N \geq 10$ získáme přesné hodnoty spektrální funkce v N bodech (viz vzorec (6.92)). Pro podrobné vykreslení spektrální funkce použijeme velký počet bodů, např. 1000.

Algoritmus DFT v MATLABu neumožňuje zadávat záporné indexy vzorků, proto analyzovaný kosinový impuls posuneme doprava tak, že získáme impuls sinový. Modul spektrální funkce pak bude nezměněn.

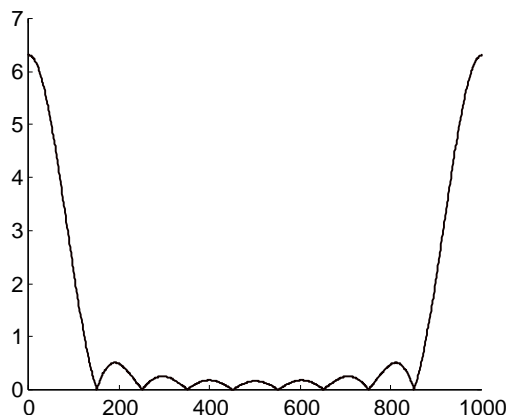
• Ukázka řešení v MATLABu:

```
k=0:9;
s=sin(k*pi/10);
x=fft(s,1000);
plot(abs(x))
```

& Poznatek z příkladu:

Algoritmus DFT (resp. FFT) je nástroj pro praktickou analýzu signálů. Požadovaný průběh spektrální hustoty je získán velmi jednoduchým způsobem a bez zdlouhavých odvození. Postup je jednotný pro jakýkoliv konečný impuls, jehož vzorky jsou získány například měřením.

r 6.58. Zakreslete kmitočtovou závislost jednostranné spektrální hustoty energie kosinového impulsu z obrázku 6.22. Vypočítejte energii, obsaženou v impulsu v kmitočtových pásmech $\bar{f} =: (0 \div 0,15), (0 \div 0,25), (0 \div 0,5)$.



Obr.6.24. Výstup MATLABu. Na vodorovné ose je pořadí vzorků spektrální hustoty signálu, na svislé ose spektrální hustota. Srovnajte s obr. 6.23.

Řešení:

Spektrální hustota signálu

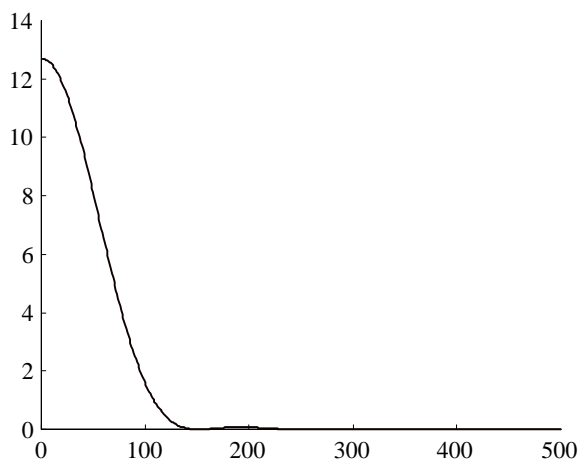
$$S(\bar{\omega}) = \frac{\cos 6\bar{\omega} \cos 5\bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - \cos 0,1p} = \cos 0,6p \frac{\cos 5\bar{\omega}}{\cos 0,1p - \cos \bar{\omega}} \approx 0,309 \frac{\cos 5\bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - 0,951}.$$

Jednostranná spektrální hustota energie

$$L_j(\bar{\omega}) = \frac{1}{p} |S(\bar{\omega})|^2 \approx 3,04 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\cos 5\bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - 0,951} \right)^2 \quad (6.150)$$

: Numerický výpočet pomocí MATLABu:

```
k=0:9; % definování rozsahu nezávisle proměnné signálu
s=sin(k*pi/10); % výpočet vzorků posunutého kosinového impulsu
L=(abs(fft(s,1000))).^2/pi; % výpočet 1000 vzorků jednostranné spektrální hustoty energie
plot(L(1:500)) % vykreslení prvních 500 vzorků spektrální hustoty energie
```



Obr.6.25. Výstup MATLABu: na vodorovné ose je pořadí vzorků spektrální hustoty energie. Vzorek č.500 odpovídá normovanému kmitočtu $\bar{f} = 0,5$.

```

w=sum(s.^2)           % energie signálu s vypočtená jako součet kvadrátů vzorků
w =
    5.0000

w1=trapz(L(1:150))*2*pi/1000 % energie v kmitočtovém pásmu  $\bar{f} \in \langle 0,0.15 \rangle$  (vysvětlení
níže)

w1 =
    4.9643

w2=trapz(L(1:250))*2*pi/1000 % energie v kmitočtovém pásmu  $\bar{f} \in \langle 0,0.25 \rangle$ 

w2 =
    4.9895

w3=trapz(L(1:500))*2*pi/1000 % energie v kmitočtovém pásmu  $\bar{f} \in \langle 0,0.5 \rangle$ , tj. celková
energie signálu

w3 =
    4.9999

```

Hned za vykreslením spektrální hustoty energie je zařazen příkaz k výpočtu energie signálu z jeho vzorků. Výsledek výpočtu je možno zapsat takto:

$$W = \sum_{k=0}^9 s^2(k) = \sum_{k=0}^9 \sin^2\left(k \cdot \frac{p}{10}\right) = 5.$$

Tento výsledek je možno potvrdit například převedením výrazu na geometrické řady Eulerovým zápisem sinusové funkce a sečtením těchto řad. Jinou možností je úvaha, že sinusový signál o amplitudě 1 a 20 vzorky na periodu má efektivní hodnotu $1/\sqrt{2}$ a tudíž energii za 1 periodu $(1/\sqrt{2})^2 \cdot 20 = 10$. Proto náš sinový impuls, kterému chybí záporná půlperioda a který trvá jen 10 vzorků, bude mít energii poloviční.

Funkce TRAPZ(v) vypočte lichoběžníkovou metodou integrál funkce, definované svými vzorky ve vektoru v. Vzorky jsou spojeny lomenou čarou a funkce TRAPZ určí plochu vymezenou touto čarou, krajními vzorky a vodorovnou souřadnou osou. Energie se určí integrací spektrální hustoty energie podle kmitočtu $\bar{w} = 2pf$, proto je třeba výsledek získaný funkcí TRAPZ vynásobit vzdáleností dvou sousedních vzorků spektrální hustoty, a to je $2p/N = 2p/1000$. Vidíme, že v kmitočtovém pásmu $\bar{f} \in \langle 0,0.15 \rangle$ (1. lalok spektrální funkce) je soustředěna téměř celá energie signálu (4.9643, tj. 99,3%). Celková energie není vypočtena naprosto přesně (4,9999 namísto 5) v důsledku použití lichoběžníkové metody integrace.

Výpočet energií můžeme provést přímo integrací spektrální hustoty energie dané vzorcem (6.150). V MATLABu vytvoříme M-soubor s názvem *LJ.M* a definujeme v něm funkci *LJ*:

```

:
function y=LJ(x)
y=(cos(0.6*pi).*cos(5*x))./(cos(0.1*pi)-cos(x)).^2/pi;

```

Pak pomocí funkce *QUAD8* určíme příslušné integrály:

```

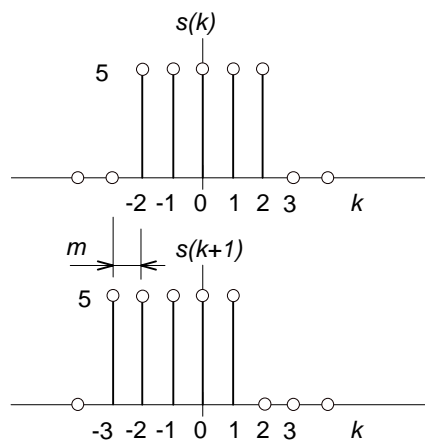
:
quad8('LJ',0,0.15*2*pi)

```

ans =
 4.9643
 quad8('LJ',0,0.25*2*pi)
 ans =
 4.9895
 quad8('LJ',0,0.5*2*pi)
 ans =
 5.0000

r 6.59. Určete autokorelační funkci obdélníkového impulsu z obrázku 6.14a) na základě definičního vztahu autokorelační funkce (6.84).

p Řešení:



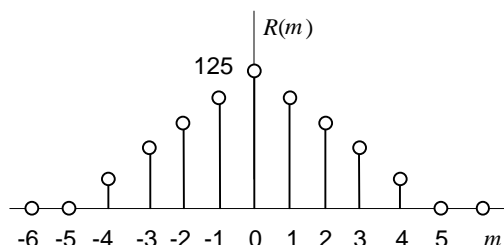
Obr.6.26. K výpočtu autokorelační funkce signálu $s(k)$.

Autokorelační funkce: $R(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)s(k+m)$.

Z obr.6.26 vyplývá, že pro posunutí $m \notin \langle -4, +4 \rangle$ se impulsy nebudou překrývat a tudíž $R(m) = 0$.

Pro $m \in \langle -4, +4 \rangle$ bude překryvná plocha nezávislá na směru posunutí (nezávisí na znaménku m) a bude

$R(m) = 25(5 - |m|), \quad m \in \langle -4, +4 \rangle$.



Obr.6.27. Autokorelační funkce obdélníkového signálu z obrázku 6.14a).

& Poznatek z příkladu:

Autokorelační funkce impulsu konečného trvání N má také konečné „trvání“ (délka $2N-1$).