r **6.60.** Vypočtěte vzorky autokorelační funkce impulsu z obrázku 6.14a) z vzorků impulsu pomocí algoritmu DFT.

þ ***Řešení*:**

Signál má délku $N_1 = 5$. Jeho autokorelační funkce je sudá a má délku $2N$-1= 9 (viz vzorec 6.108). Pro výpočet autokorelační funkce tedy musíme zvolit počet bodů $N \geq 9$ (viz 6.109). Zvolíme $N = 9$.

: Ukázka řešení MATLABEm:

s=[5 5 5 5 5];	% definice impulsu; nulové vzorky se automaticky připojí následujícím příkazem FFT
xr=(abs(fft(s,9))).^2;	% výpočet koeficientů DFT autokorelační funkce podle (6.110)
r=real(ifft(xr))	% výpočet vzorků autokorelační funkce

```
r =
  1.0e+002 *
1.2500   1.0000   0.7500   0.5000   0.2500   0.2500   0.5000   0.7500   1.0000
```

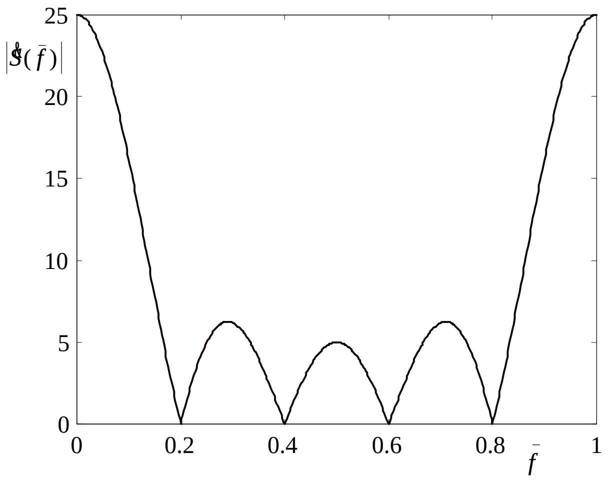
Výsledek musíme správně interpretovat - viz komentář k vzorci (6.110): Koeficienty po inverzní FFT se shodují se vzorky autokorelační funkce pouze do indexu 4, pak jsou ve skutečnosti nulové.

r **6.61.** Z autokorelační funkce impulsu (obr. 6.14a) z př.6.59 určete jeho modulové spektrum.

þ ***Řešení*:**

Kvadrát modulu spektrální hustoty signálu je DTFT jeho autokorelační funkce (viz vztah 6.87):

$$\left|\hat{S}(\bar{w})\right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R(m) e^{-j\bar{w}m} = 2\sum_{m=0}^{+\infty} R(m)\cos\bar{w}m = 2\sum_{m=0}^{+4} R(m)\cos\bar{w}m =$$
$$= 125 + 200\cos\bar{w} + 150\cos 2\bar{w} + 100\cos 3\bar{w} + 50\cos\bar{w} \Rightarrow$$
$$\left|\hat{S}(\bar{w})\right| = \sqrt{125 + 200\cos\bar{w} + 150\cos 2\bar{w} + 100\cos 3\bar{w} + 50\cos\bar{w}}\,.$$



Obr.6.28. Modul spektrální funkce impulsu z obrázku 6.14a).

Srovnejte s výsledky př.6.44.

: Řešení můžeme provést plně numericky pomocí DFT (viz vzorec 6.110):

r=[25 50 75 100 125 100 75 50 25]; % zadání vzorků autokorelační funkce

s=sqrt(abs(fft(r,1000))); % výpočet 1000 bodů spektrální funkce jako druhé odmocniny z koeficientů 1000-bodové DFT autokorelační funkce

plot(s)

Vykreslí se obr.6.28 s tím, že vodorovná osa bude cejchována v indexech bodů FFT.

r **6.62.** Určete vzájemnou korelační funkci $R_{12}(m)$ impulsů $s_1(k)$ a $s_2(k)$:

$$s_1(k) = \begin{matrix} 1 & \text{pro } k \in \langle 0{,}5 \rangle \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle 0{,}5 \rangle \end{matrix}, \; s_2(k) = \begin{matrix} 0{,}5^k & \text{pro } k \in \langle 0{,}3 \rangle \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle 0{,}3 \rangle \end{matrix}.$$

þ ***Řešení*:**

Délka signálu s_1 je $N_1 = 6$, délka signálu s_2 je $N_2 = 4$. Proto délka vzájemné korelační funkce $R_{12}(m)$ bude $N_1 + N_2 - 1 = 9$ a korelační funkce bude nulová vně intervalu (viz 6.102) $-5 \le m \le 3$.

Výpočet:

$R_{12}(0) = 1.1 + 1.0{,}5 + 1.0{,}25 + 1.0{,}125 = 1{,}875$,

$R_{12}(1) = 1.0{,}5 + 1.0{,}25 + 1.0{,}125 = 0{,}875$,

$R_{12}(2) = 1.0{,}25 + 1.0{,}125 = 0{,}375$,

$R_{12}(3) = 1.0{,}125 = 0{,}125$,

$R_{12}(m \ge 4) = 0$,

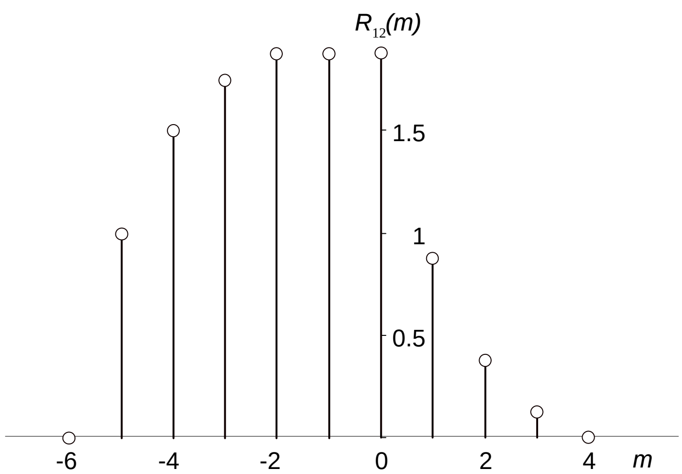
$R_{12}(-1) = R_{12}(-2) = R_{12}(0) = 1{,}875$,

$R_{12}(-3) = 1.1 + 1.0{,}5 + 1.0{,}25 = 1{,}75$,

$R_{12}(-4) = 1.1 + 1.0{,}5 = 1{,}5$,

$R_{12}(-5) = 1.1 = 1$,

$R_{12}(m \le -6) = 0$.



Obr.6.29. Vzájemná korelační funkce signálů z příkladu 6.62.

: Vzájemnou korelační funkci lze určit i čistě numerickým způsobem pomocí DFT (viz vzorec 6.105 a komentář k němu):

```
s1=[1 1 1 1 1 1];s2=[1 0.5 0.25 0.125];      % definice signálů s1 a s2
xr12=conj(fft(s1,10)).*fft(s2,10);           % výpočet koeficientů DFT vzájemné korelační
                                               funkce podle (6.105)
r12=real(ifft(xr12))                         % výpočet vzorků vzájemné korelační funkce
r12 =
Columns 1 through 7
   1.8750    0.8750    0.3750    0.1250    0.0000    1.0000    1.5000
 Columns 8 through 10
   1.7500    1.8750    1.8750
```

Při výpočtu FFT jsme mohli zvolit libovolný počet bodů $N \geq 9$. Vybrali jsme $N = 10$. Po zpětné FFT obdržíme správně vzorky korelační funkce č. 0, 1, 2, 3 a 4. Vzorky pro $k < 0$ je třeba odečíst z druhé části výsledku s využitím toho, že IFFT poskytuje symetrické výstupy podle vztahu

$$r(-k) = r(N-k).$$

Proto

$$r(-1) = r(9) = 1{,}875,\ r(-2) = r(8) = 1{,}875,\ r(-3) = r(7) = 1{,}75,\ r(-4) = r(6) = 1{,}5,\ r(-5) = r(5) = 1.$$

r **6.63.** Určete konvoluci impulsů $s_1(k)$ a $s_2(k)$ z př.6.62:

$$s_1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \in \langle 0{,}5 \rangle \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle 0{,}5 \rangle \end{cases},\quad s_2(k) = \begin{cases} 0{,}5^k & \text{pro } k \in \langle 0{,}3 \rangle \\ 0 & \text{pro } k \notin \langle 0{,}3 \rangle \end{cases}.$$

þ ***Řešení*:**

Délka signálu s_1 je $N_1 = 6$, délka signálu s_2 je $N_2 = 4$. Proto délka konvoluce $s_1(k) * s_2(k)$ bude $N_1 + N_2 - 1 = 9$ a konvoluce bude nulová vně intervalu (viz 6.96) $0 \leq k \leq 8$.

Výpočet konvoluce $s(k) = s_1(k) * s_2(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_1(m) s_2(k-m)$ pro $0 \leq k \leq 8$:

$$s(0) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(-m) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1,$$

$$s(1) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(1-m) = 1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1{,}5,$$

$$s(2) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(2-m) = 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1{,}75,$$

$$s(3) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(3-m) = 1\cdot 0{,}125 + 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1{,}875,$$

$$s(4) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(4-m) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0{,}125 + 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1{,}875,$$

$$s(5) = \sum_{m=0}^{5} s_1(m) s_2(5-m) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0{,}125 + 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1 = 1{,}875,$$

$$s(6)=\sum_{m=0}^{5}s_1(m)s_2(6-m)=1.0+1.0+1.0+1.0{,}125+1.0{,}25+1.0{,}5=0{,}875\,,$$

$$s(7)=\sum_{m=0}^{5}s_1(m)s_2(7-m)=1.0+1.0+1.0+1.0+1.0{,}125+1.0{,}25=0{,}375\,,$$

$$s(8)=\sum_{m=0}^{5}s_1(m)s_2(8-m)=1.0+1.0+1.0+1.0+1.0+1.0{,}125=0{,}125\,.$$

Výpočet pomocí DFT - viz (6.98): Musíme zvolit N-bodovou DFT, kde $N\geq 9$. Zvolíme například N = 10:

Ukázka řešení MATLABem:

```
s1=[1 1 1 1 1 1];s2=[1 0.5 0.25 0.125];   %   definice signálů s1 a s2
xs=fft(s1,10).*fft(s2,10);                 %   výpočet koeficientů 10 bodové DFT konvoluce podle (6.98)
s=real(ifft(xs))                           %   výpočet 10 vzorků konvoluce
s =
  Columns 1 through 7
   1.0000   1.5000   1.7500   1.8750   1.8750   1.8750   0.8750
  Columns 8 through 10
   0.3750   0.1250   0.0000
```

r 6.64. Signál s_1 z př.6.63

$$s_1(k)=\begin{cases}1 & \text{pro } k\in\langle 0{,}5\rangle\\ 0 & \text{pro } k\notin\langle 0{,}5\rangle\end{cases}$$

prochází blokem diference a vytváří výstupní signál s_2 podle vzorce

$$s_2(k)=D\left[s_1(k)\right]=s_1(k)-s_1(k-1)\,.$$

Určete vzorky výstupního signálu a srovnejte jednostranné spektrální hustoty energií signálů s_1 a s_2.

þ *Řešení*:

Výpočet vzorků výstupního signálu bloku diference:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$s_1(k)$	0	1	1	1	1	1	1	0	0
$D\left[s_1(k)\right]=s_1(k)-s_1(k-1)$	0	1	0	0	0	0	0	-1	0

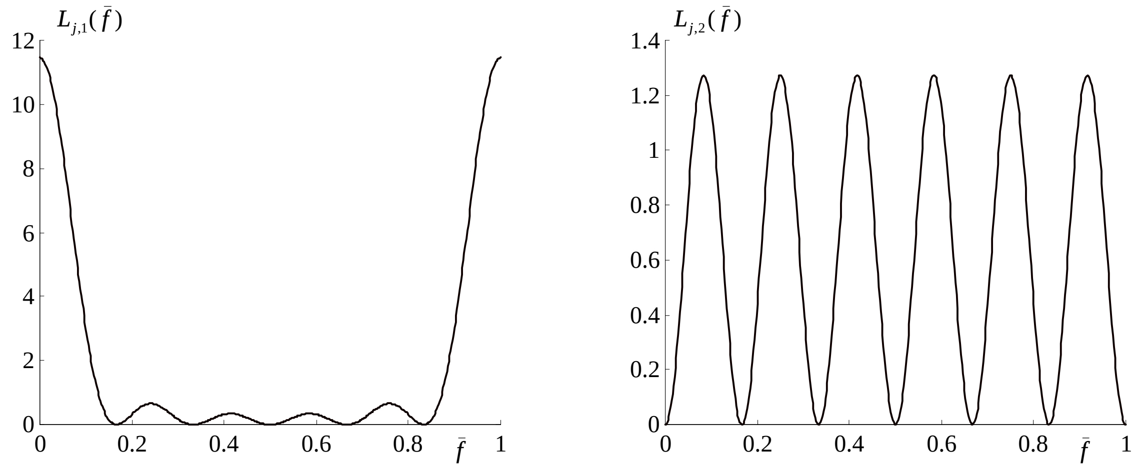
Výpočet spektrálních hustot energie:

Signál s_1: $\hat{S}_1(\overline{w})=DTFT\left\{s_1(k)\right\}=\sum_{k=0}^{5}e^{-jk\overline{w}}=\dfrac{1-e^{-j6\overline{w}}}{1-e^{-j\overline{w}}}=\dfrac{\sin 3\overline{w}}{\sin 0{,}5\overline{w}}e^{-j2{,}5\overline{w}}=6\dfrac{\mathrm{sinc}3\overline{w}}{\mathrm{sinc}0{,}5\overline{w}}e^{-j2{,}5\overline{w}}$,

$$L_{j,1}(\overline{w})=\frac{1}{p}\left|\hat{S}_1(\overline{w})\right|^2=\frac{36}{p}\left(\frac{\mathrm{sinc}3\overline{w}}{\mathrm{sinc}0{,}5\overline{w}}\right)^2.$$

Signál s_2: $\hat{S}_2(\overline{w})=DTFT\left\{s_2(k)\right\}=1-e^{-j6\overline{w}}=2j\sin 3\overline{w}\;e^{-j3\overline{w}}$,

$$L_{j,2}(\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi}\left|\hat{S}_2(\bar{\omega})\right|^2 = \frac{4}{\pi}\sin^2 3\bar{\omega} .$$



a) b)

Obr.6.30 Jednostranná spektrální hustota energie signálu a) před, b) za blokem diference.

Z obrázků je zřejmé, že blok diference odstranil ze signálu nízkofrekvenční složky a zdůraznil ty složky na vyšších kmitočtech, které byly zastoupeny ve vstupním signálu. Z výsledků je možné ověřit platnost poučky (6.68) o spektrální funkci diference.

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 1 1 1 1 1];s2=[1 0 0 0 0 0 -1];
L1=(abs(fft(s1,1000))).^2/pi;
L2=(abs(fft(s2,1000))).^2/pi;
subplot(1,2,1);plot(L1)
subplot(1,2,2);plot(L2)
```

Obdržíme obrázek 6.30.

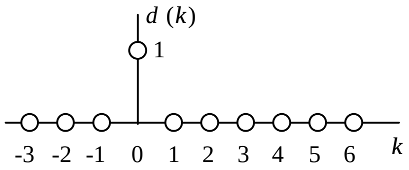
r **6.65.** Vypočtěte *z*-obrazy následujících signálů. Stanovte oblast konvergence *z* - obrazů. Vypočtěte nulové body a póly.
$s(k)$ =
a) $\delta(k)$, b) $2\delta(k-3)$, c) $\underline{1}(k)$, d) $-3.\underline{1}(k-1)$, e) $0{,}5^k$, f) $(-0.5)^k$, g) 2^k.

þ ***Řešení***:

Z-obraz $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) z^{-k}$.

a) $S(z) = \sum_{k=0}^{0} 1.z^{-k} = 1$.

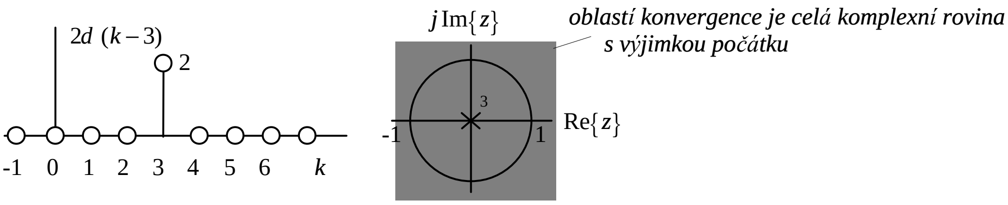
Suma konverguje pro všechna *z*. Oblastí konvergence je tedy celá komplexní rovina. O nulových bodech a pólech nemá smysl hovořit.



Obr.6.31. Jednotkový impuls.

b) $S(z) = 2\sum_{k=0}^{\infty} d(k-3)z^{-k} = 2z^{-3} = \dfrac{2}{z^3}$.

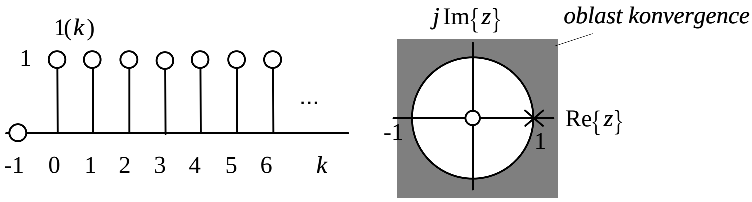
Konverguje pro všechna $z \neq 0$. Oblastí konvergence je tedy celá komplexní rovina s výjimkou počátku. *Z*-obraz má trojnásobný pól v nule.



Obr.6.32. Posunutý jednotkový impuls se změněným měřítkem a rozložení nulových bodů a pólů jeho *z*-obrazu.

c) $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \left\| z^{-1} \right| < 1 \right| = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$.

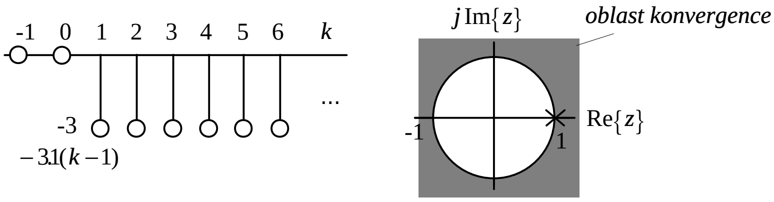
Konverguje pro všechna $|z| > 1$. Oblastí konvergence je tedy prostor v komplexní rovině vně jednotkového kruhu opsaného kolem počátku. *Z*-obraz má jeden nulový bod $z_0 = 0$ a jeden pól $z_p = 1$.



Obr.6.33. Jednotkový skok a rozložení nulových bodů a pólů jeho *z*-obrazu.

d) $S(z) = -3\sum_{k=0}^{\infty} 1(k-1)z^{-k} = -3\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = \left\| z^{-1} \right| < 1 \right| = -3\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \dfrac{-3}{z-1}$.

Konverguje pro všechna $|z| > 1$. Oblastí konvergence je tedy prostor v komplexní rovině vně jednotkového kruhu opsaného kolem počátku. *Z*-obraz nemá nulový bod, má jeden pól $z_p = 1$.



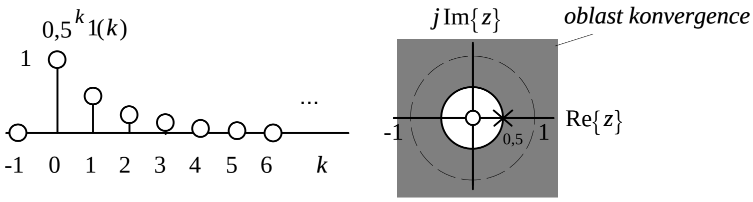
Obr.6.34. Modifikovaný jednotkový skok a rozložení nulových bodů a pólů jeho z- obrazu.

& ***Poznatky z příkladů***:

- *Násobení signálu konstantou nemá vliv na rozložení nulových bodů a pólů ani na oblast konvergence.*
- *Posouvání vzorků signálu má vliv na vznik či zánik nulových bodů a pólů v počátku (pro z = 0).*

e) $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}0{,}5^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(0{,}5z^{-1}\right)^k=\left\|0{,}5z^{-1}\right|<1\right|=\dfrac{1}{1-0{,}5z^{-1}}=\dfrac{z}{z-0{,}5}$.

Konverguje pro všechna $|z|>0{,}5$. Oblastí konvergence je tedy prostor v komplexní rovině vně kruhu o poloměru 0,5 opsaného kolem počátku. *Z*-obraz má jeden nulový bod $z_0=0$ a jeden pól $z_p=0{,}5$.



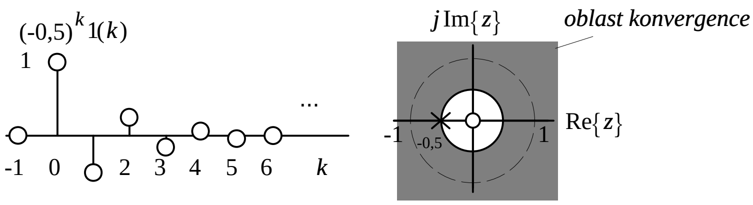
Obr.6.35. Signál typu $0{,}5^k$ a rozložení nulových bodů a pólů jeho z-obrazu.

& ***Poznatky z příkladu***:

- *Póly signálu nesmí ležet v konvergenční oblasti z-obrazu, neboť v pólech je komplexní funkce S(z) singulární (diverguje). Oblast konvergence mocninné řady je vymezena kruhem se středem v počátku. Na hranici tohoto kruhu leží pól o největším modulu.*

f) $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-0{,}5)^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-0{,}5z^{-1}\right)^k=\left\|-0{,}5z^{-1}\right|<1\right|=\dfrac{1}{1+0{,}5z^{-1}}=\dfrac{z}{z+0{,}5}$.

Konverguje pro všechna $|z|>0{,}5$. Oblast konvergence je stejná jako u signálu e). *Z*-obraz má jeden nulový bod $z_0=0$ a jeden pól $z_p=-0{,}5$.



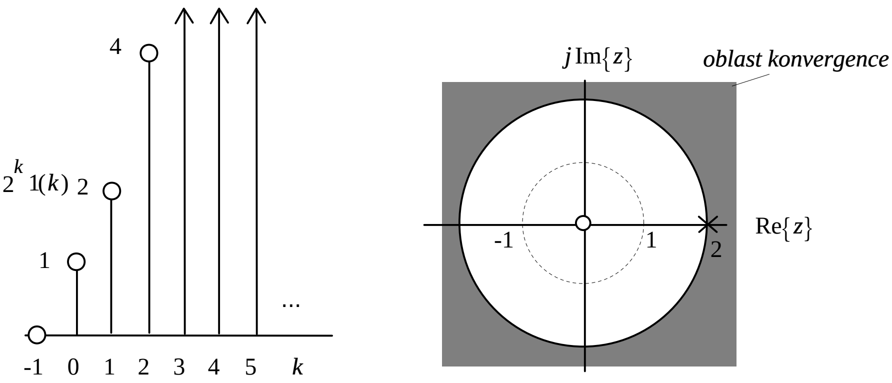
Obr.6.36. Signál typu $(-0{,}5)^k$ a rozložení nulových bodů a pólů jeho z-obrazu.

& ***Poznatek z příkladu***:

- *Argument pólu (zde p radiánů) má vliv na „rozházení" vzorků (zde cyklická změna znaménka), modul pólu (zde* 0,5*) na „tendenci" (signál zaniká).*

g) $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2z^{-1}\right)^k=\left\|2z^{-1}\right|<1\right|=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}=\dfrac{z}{z-2}$.

Konverguje pro všechna $|z|>2$. Oblastí konvergence je tedy prostor v komplexní rovině vně kruhu o poloměru 2 opsaného kolem počátku. *Z*-obraz má jeden nulový bod $z_0=0$ a jeden pól $z_p=2$.



Obr.6.37. Signál typu 2^k a rozložení nulových bodů a pólů jeho z-obrazu

& ***Poznatky z příkladů (zobecnění)*:**

- *Je-li modul pólu menší než 1, pak*
  - *pól leží uvnitř jednotkové kružnice*
  - *signál konverguje k nule, zaniká*
- *Je-li modul pólu větší než 1, pak*
  - *pól leží vně jednotkové kružnice*
  - *signál postupně roste nade všechny meze, diverguje*
- *Je-li modul pólu jedna, pak*
  - *pól leží na jednotkové kružnici*
  - *signál konverguje k hodnotě různé od nuly, je-li argument pólu nula*
  - *signál osciluje, je-li argument pólu π radiánů.*

  Uvedené platí pro z-obrazy s jedním pólem, v případě více pólů je třeba určitého zpřesnění.
- *Obsahuje-li signál konečný počet vzorků N, pak se jeho* z-obraz *dá upravit na takový tvar, že obsahuje pouze* (N+1) - *násobný pól v nule a žádné jiné póly.*

r 6.66. Podle slovníku transformace z platí relace (viz příloha)

$$a^k \sin(bk + j)\ \$\ \frac{z[z\sin j\ + a\sin(b - j)]}{z^2 - 2za\cos b + a^2},\quad |z| > a\,;$$

$$a^k \cos(bk + j)\ \$\ \frac{z[z\cos j\ - a\cos(b - j)]}{z^2 - 2za\cos b + a^2},\quad |z| > a\,.$$

Načrtněte rozložení nulových bodů a pólů z-obrazů těchto signálů pro tyto parametry:

$j\ = 0\,;$

$a = 0{,}5;\,1;\,2\,;$

$b = \frac{2p}{10};\frac{2p}{4};\frac{2p}{2}\,.$

þ *Řešení*:

Řešení provedeme nejprve obecně, pak provedeme diskusi pro konkrétní hodnoty.

Póly vycházejí stejně pro „sinovou“ i „kosinovou“ posloupnost:

$$z^2 - 2za\cos b + a^2 = 0 \Rightarrow z_{p1,2} = \frac{2a\cos b \pm \sqrt{4a^2\cos^2 b - 4a^2}}{2} = a\cos b \pm ja\sin b = ae^{\pm jb}\,.$$

Nulové body: - „sinová“ posloupnost

$z_{01} = 0$,

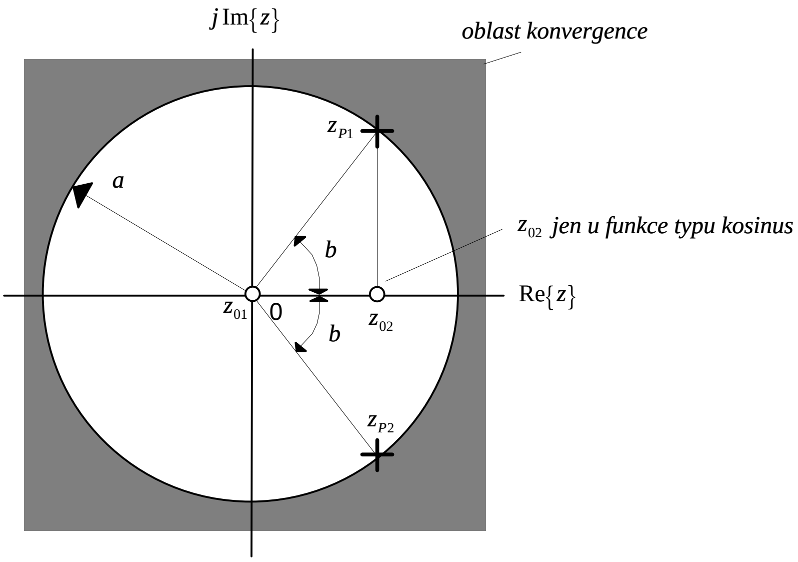
$z_{02} = -\dfrac{a \sin(b - j)}{\sin j}$; pro $j = 0$ tento nulový bod zanikne.

Nulové body: - „kosinová“ posloupnost

$z_{01} = 0$,

$z_{02} = -\dfrac{a \cos(b - j)}{\cos j}$; pro $j = 0$: $z_{02} = a \cos b$.

Z hlediska rozložení nulových bodů a pólů se oba signály liší pouze v nulovém bodu z_{02}.



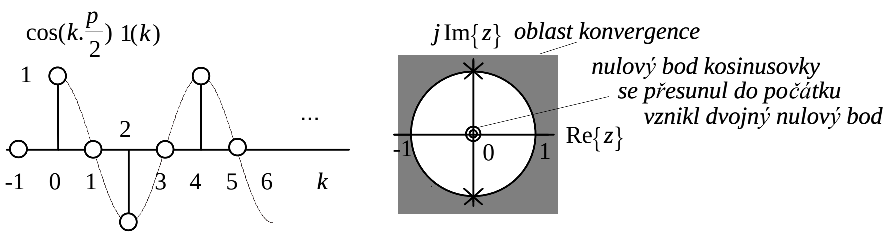
Obr.6.38. Rozložení nulových bodů a pólů zobecněného diskrétního harmonického signálu.

Uvažování konkrétních hodnot parametrů signálů:

Pro a = 0,5 budou oba póly uvnitř jednotkové kružnice, signály budou exponenciálně tlumeny a budou konvergovat k nule.
Pro a = 1 budou oba póly ležet na jednotkové kružnici, signály budou harmonické (nezanikající ani nedivergující, budou oscilovat).
Pro a = 2 budou oba póly ležet vně jednotkové kružnice, signály budou exponenciálně divergovat.

Parametr $b = \dfrac{2p}{10}; \dfrac{2p}{4}; \dfrac{2p}{2}$ udává nepřímo počet vzorků na 1 periodu harmonického signálu (10, 4, 2).

Například pro $j = 0$, $a = 1$, $b = \dfrac{2p}{4} = \dfrac{p}{2}$ bude „kosinový“ signál vykazovat 4 vzorky na 1 periodu a nulový bod z_{02} se přesune do počátku, kde už je nulový bod z_{01}. Vznikne tak dvojný nulový bod.

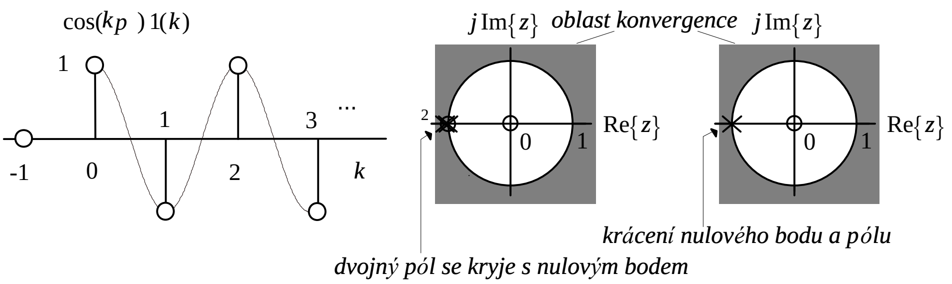


Obr.6.39. Harmonický signál se 4 vzorky na periodu a rozložení nulových bodů a pólů jeho z-obrazu.

Pro $\varphi = 0$, $a = 1$, $b = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ bude signál vykazovat pouze 2 vzorky na 1 periodu. Pak póly $z_{P1,2}$ splynou v dvojný pól -1. „Kosinová" posloupnost bude mít nulové body $z_{01} = 0$, $z_{02} = -1$. Nulový bod $z_{02} = -1$ se krátí s jedním z pólů $z_{P1,2} = -1$:

$$a^k \cos(bk + \varphi)\Big|_{a=1, b=\pi, \varphi=0} = \cos \pi k = (-1)^k \; \$ \; \frac{z[z\cos\varphi - a\cos(b-\varphi)]}{z^2 - 2za\cos b + a^2}\Bigg|_{a=1, b=\pi, \varphi=0} =$$

$$= \frac{z[z - \cos\pi]}{z^2 - 2z\cos\pi + 1} = \frac{z[z+1]}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z(z+1)}{(z+1)^2} = |\text{krácení nulového bodu a polu}| = \frac{z}{z+1}.$$



Obr.6.40. Harmonický signál se 2 vzorky na periodu a rozložení nulových bodů a pólů jeho z-obrazu.

r **6.67.** Metodou rozkladu na parciální zlomky určete signál $s(k)$, známe-li jeho z-obraz

$$S(z) = \frac{z-1}{z^2 + 0{,}5z - 0{,}5}.$$

þ ***Řešení*:**

$$S(z) = \frac{z-1}{z^2 + 0{,}5z - 0{,}5} = \frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0{,}5}.$$

Konstanty A a B můžeme určit různými způsoby, např. opětným převodem na společného jmenovatele a porovnáním čitatele s původním tvarem čitatele:

$$S(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0{,}5} = \frac{A(z-0{,}5) + B(z+1)}{(z+1)(z-0{,}5)} = \frac{(A+B)z - 0{,}5A + B}{(z+1)(z-0{,}5)} \Rightarrow$$

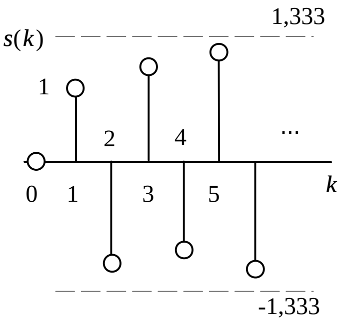
$$A + B = 1, \quad -0{,}5A + B = -1 \Rightarrow A = \frac{4}{3}, B = -\frac{1}{3}.$$

Proto

$$S(z) = \frac{4}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-0{,}5} \xrightarrow{\text{slovník transformace z}} s(k) = \frac{4}{3}(-1)^{k-1}\underline{1}(k-1) - \frac{1}{3}0{,}5^{k-1}\underline{1}(k-1) =$$

$$= \frac{4(-1)^{k-1} - 0{,}5^{k-1}}{3}\underline{1}(k-1).$$

k	0	1	2	3	4	...
$s(k)$	0	1	-1,5	1,25	-1,375	...



Obr.6.41. Výsledný signál.

▪ K rozkladu *z*-obrazu na parciální zlomky můžeme použít i MATLABu:

```
a=[1 0.5 -0.5];b=[1 -1];        % zadání vektoru jmenovatele a čitatele z- obrazu
[r,p,k]=residue(b,a)            % výpočet vektorů reziduí(konstant typu A a B u zlomků),
                                  pólů a zbytkového členu

r =

   1.3333

  -0.3333

p =

  -1.0000

   0.5000

k =

    []
```

Interpretace výsledku:

$$S(z) = \frac{z-1}{1.z^2 + 0{,}5z - 0{,}5} = \frac{1{,}3333}{z-(-1)} + \frac{(-0{,}3333)}{z-0{,}5} + 0\,.$$

V případě že by polynom v čitateli byl stejného nebo vyššího řádu než ve jmenovateli, objeví se zbytkový člen ve tvaru polynomu.
K výpočtu kořenů polynomu z jeho koeficientů slouží příkaz ROOTS, k výpočtu koeficientů polynomu z jeho kořenů pak příkaz POLY (pokračování předchozího programu):

▪

```
koreny=roots(a)

koreny =

  -1.0000

   0.5000

jmenovatel=poly(koreny)

jmenovatel =

   1.0000    0.5000   -0.5000
```

r 6.68. Metodou postupného dělení vypočtěte vzorky signálu $s(k)$ z př.6.67, známe-li jeho z-obraz

$$S(z) = \frac{z-1}{z^2 + 0{,}5z - 0{,}5}\,.$$

þ *Řešení*:

$(z - 1):(z^2 + 0{,}5z - 0{,}5) = 0.z^0 + 1.z^{-1} -1{,}5z^{-2} +1{,}25z^{-3} -1{,}375z^{-4}$ ...

$\underline{-(z + 0{,}5 - 0{,}5z^{-1})}$

$-1{,}5 + 0{,}5z^{-1}$

$\underline{-(-1{,}5 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}75z^{-2})}$

$1{,}25z^{-1} - 0{,}75z^{-2}$

$\underline{-(1{,}25z^{-1} + 0{,}625z^{-2} - 0{,}625z^{-3})}$

$-1{,}375z^{-2} + 0{,}625z^{-3}$

M

r 6.69. Nalezněte signál $s(k)$ z jeho z-obrazu z př.6.68

$$S(z) = \frac{z-1}{z^2 + 0{,}5z - 0{,}5}$$

metodou reziduové věty (vzorce 6.124 a 6.125).

þ *Řešení*:

$$s(k) = \frac{1}{2pj}\oint_c S(z)z^{k-1}dz = \sum_{\text{v polech } S(z)z^{k-1}} res\{S(z)z^{k-1}\}\,;$$

$$S(z)z^{k-1} = \frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)}z^{k-1}\,.$$

Póly:

$$z_{p1} = -1, \quad z_{p2} = 0{,}5\,.$$

Pro k = 0 přibude další pól: $z^{-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow z_{p3} = 0$.

Výpočet reziduí (viz teorie funkcí komplexní proměnné).

Pro $k \neq 0$:

$$res\{S(z)z^{k-1}\}\Big|_{z_{p1}=-1} = \lim_{z\to -1}\{(z+1)S(z)z^{k-1}\} = \lim_{z\to -1}\left\{(z+1)\frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)}z^{k-1}\right\} =$$

$$\frac{-1-1}{-1-0{,}5}(-1)^{k-1} = \frac{4}{3}(-1)^{k-1};$$

$$res\{S(z)z^{k-1}\}\Big|_{z_{p2}=0{,}5} = \lim_{z\to 0{,}5}\{(z-0{,}5)S(z)z^{k-1}\} = \lim_{z\to 0{,}5}\left\{(z-0{,}5)\frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)}z^{k-1}\right\} =$$

$$\frac{0{,}5-1}{0{,}5+1}0{,}5^{k-1} = -\frac{1}{3}0{,}5^{k-1}.$$

Pro $k = 0$:

$$res\{S(z)z^{-1}\}\Big|_{z_{p3}=0} = \lim_{z\to 0}\{zS(z)z^{-1}\} = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)}\right\} = \frac{-1}{1.(-0{,}5)} = 2\,.$$

Proto:

$$s(k) = \frac{4}{3}(-1)^{k-1} - \frac{1}{3}0{,}5^{k-1} \text{ pro k = 1, 2, 3, ...}$$

$$s(k) = \frac{4}{3}(-1)^{k-1} - \frac{1}{3}0{,}5^{k-1} + 2 = 0 \text{ pro k = 0.}$$

Tento výsledek je v souladu s výsledkem př.6.67.

r **6.70.** Pomocí transformace *z* určete konvoluci dvou signálů

$$s_1(k) = (-1)^k 1(k) \text{ a } s_2(k) = 0{,}5^k 1(k)\,.$$

þ ***Řešení***:

$$s_1(k) \,\$\, S_1(z) = \frac{z}{z+1};$$

$$s_2(k) \,\$\, S_2(z) = \frac{z}{z-0{,}5};$$

$$s_1(k)*s_2(k) \,\$\, S_1(z)S_2(z) = \frac{z}{z+1}\frac{z}{z-0{,}5} = z\frac{z}{(z+1)(z-0{,}5)} = z\left[\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0{,}5}\right];$$

$$A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$S_1(z)S_2(z) = \frac{2}{3}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-0{,}5} \,\$\, s_1(k)s_2(k) = \frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}.0{,}5^k\,.$$

r **6.71.** Známe *z*-obraz signálu $s(k)$

$$S(z) = 0{,}866\frac{z(z-1.0336)}{z^2 - 1{,}4562z + 0{,}81}$$

Je třeba určit spektrální funkci signálu a jeho energii.

þ ***Řešení***:

$$\$(\overline{w}) = S(z)\Big|_{z=e^{j\overline{w}}} = 0{,}866\frac{e^{j\overline{w}}\left(e^{j\overline{w}} - 1{,}0336\right)}{e^{j2\overline{w}} - 1{,}4562e^{j\overline{w}} + 0{,}81}\,.$$

Amplitudové a fázové spektrum získáme buď vykreslením kmitočtové závislosti modulu a argumentu spektrální funkce, nebo přímo speciální funkcí v MATLABu. Oba způsoby jsou naznačeny níže.

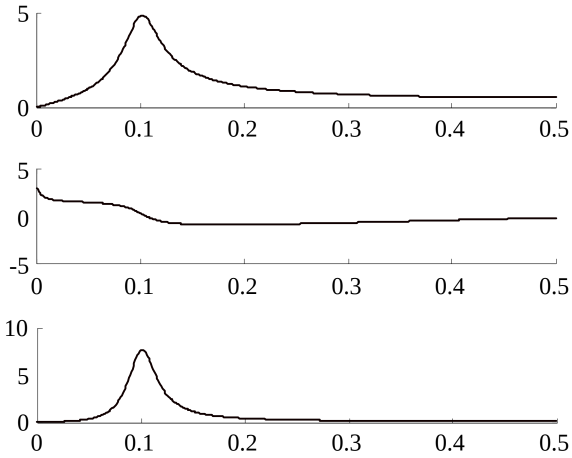
: Vykreslení kmitočtové závislosti z odvozeného vzorce:

```
f=0:0.5/500:0.5;
w=2*pi*f;
pom=exp(j*w);
```

```
S=0.866*pom.*(pom-1.0336)./(pom.^2-1.4562*pom+0.81);
modul=abs(S);faze=phase(S);
subplot(311);plot(f,modul)
subplot(312);plot(f,faze)
```

Z modulového spektra můžeme spočítat jednostrannou spektrální hustotu energie a její integrací celkovou energii signálu:

```
L=modul.^2/pi;
subplot(313);plot(f,L)
W=trapz(L)*pi/500
W =
.. 2.5049
```



Obr.6.42 Výstup z MATLABu, obrázky shora dolů: modulové spektrum signálu, fázové spektrum, jednostranná spektrální hustota energie. Na vodorovnou osu je vynesen normovaný kmitočet.

Vykreslení kmitočtové závislosti pomocí funkce FREQZ:
Nejprve upravíme z-obraz na tvar, z něhož budou zřejmé vektory jmenovatele a čitatele a a b nutné pro příkaz FREQZ:

$$S(z) = \frac{0{,}866 - 0{,}895z^{-1}}{1 - 1{,}4562z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} \ .$$

```
a=[1 -1.4562 0.81];b=[0.866 -0.895];
[H,F]=freqz(b,a,500,1);
subplot(211);plot(F,abs(H))
subplot(212);plot(F,phase(H))
```

Získáme stejné obrázky jako v předchozím případě.

Pro úplnost zjistíme, jaký signál jsme vlastně analyzovali.

$$S(z)=z\frac{0{,}866z-0{,}895}{z^2-1{,}4562z+0{,}81}\,.$$

Provedeme rozklad zlomku na pravé straně na parciální zlomky, např. pomocí MATLABu:

```
a=[1 -1.4562 0.81];b=[0.866 -0.895];
[r,p,k]=residue(b,a)
r =
  0.4330 + 0.2500i
  0.4330 - 0.2500i
p =
  0.7281 + 0.5290i
  0.7281 - 0.5290i
k =
    []
```

neboli

$$S(z)=z\left[\frac{0{,}433+j0{,}25}{z-0{,}7281-j0{,}529}+\frac{0{,}433-j0{,}25}{z-0{,}7281+j0{,}529}\right]\$\xrightarrow{\textit{slovník}}$$

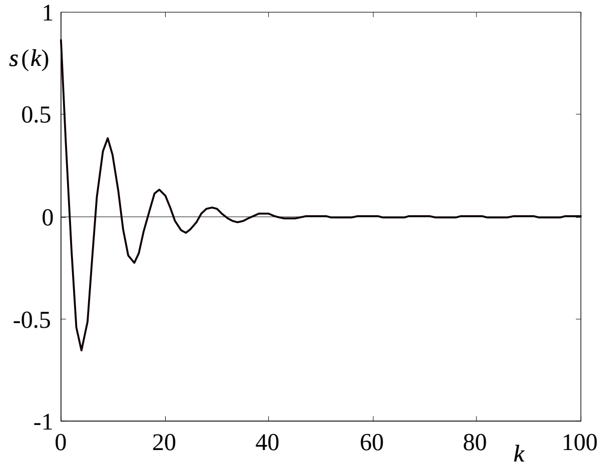
$$s(k)=(0{,}433+j0{,}25)(0{,}7281+j0{,}529)^k+(0{,}433-j0{,}25)(0{,}7281-j0{,}529)^k=$$

$$=(0{,}433+j0{,}25).0{,}9^k e^{jk0{,}2\pi}+(0{,}433-j0{,}25).0{,}9^k e^{jk0{,}2\pi}=$$

$$=0{,}433.0{,}9^k.2\cos(0{,}2k\pi)-j0{,}25.2j\sin(0{,}2k\pi)\doteq 0{,}9^k\cos\left(0{,}2k\pi+\frac{\pi}{6}\right).$$

Pomocí MATLABu spočítáme prvních 100 vzorků signálu a jeho energii:

```
k=0:100;
s=0.9.^k.*cos(k*0.2*pi+pi/6);
plot(k,s)
```



Obr.6.43. Výsledný signál.

:

```
w=sum(s.^2)
w =
   2.5051
```

r **6.72.** Určete signál $s(k)$ z př.6.70 pomocí algoritmu DFT z jeho z-obrazu

$$S(z) = 0{,}866\frac{z(z-1.0336)}{z^2 - 1{,}4562z + 0{,}81}.$$

þ ***Řešení*:**

Ze z-obrazu určíme spektrální funkci. Inverzní DFT pak z vzorků spektrální funkce zjistíme vzorky signálu.

: Řešení pomocí MATLABu:

```
a=[1 -1.4562 0.81];b=[0.866 -0.895];   % definice vektorů jmenovatele a čitatele z- obrazu
[H,w]=freqz(b,a,500,'whole');          % výpočet 500 vzorků spektrální funkce H v celém
                                       % rozsahu normovaného kmitočtu w od 0 do 2π
s=real(ifft(H));                       % výpočet vzorků signálu z vzorků jeho spektrální
                                       % funkce
plot(s(1:100))                         % vykreslení prvních 100 vzorků signálu
```

Získáme opět graf jako na obrázku 6.43.