1.2. APERIODICKÉ SIGNÁLY

Z aperiodických signálů se budeme zabývat především impulsy (jednorázovými i nezanikajícími).

Globální charakteristiky impulsů - mohutnost, energie, střední výkon

Mohutnost impulsu = plocha ohraničená impulsem a osou času;
[jednotka mohutnosti] = [jednotka signálu] x [sekunda]:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt\ . \tag{1.40}$$

Technicky realizovatelné jednorázové impulsy mají vesměs konečnou mohutnost.

Energie impulsu $s(t)$ (normovaná - jednotka Joule):

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt\ . \tag{1.41}$$

Vzájemná energie dvou impulsů $s_1(t)$ a $s_2(t)$

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t)\,dt\ . \tag{1.42}$$

Spektrální funkce (spektrální hustota, Fourierova transformace F) signálu;
[jednotka spektrální funkce] =
= [jednotka signálu] x [sekunda] = [jednotka signálu] / [Hz]

$$\hat{S}(w) = \mathrm{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-jw\,t}\,dt\ . \tag{1.43}$$

Časový průběh signálu zjistíme z jeho spektrální funkce **zpětnou Fourierovou transformací** F^{-1}:

$$s(t) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(w)e^{+jw\,t}\,dw\ . \tag{1.44}$$

Ne všechny signály mají svou spektrální funkci.

Podmínky kladené na signál *s*(*t*) zaručující existenci spektrální funkce:

1. *Přísné matematické podmínky*:

   Signál musí být *absolutně integrovatelný*, t.j.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,dt < \infty\ . \tag{1.45}$$

Splňuje-li navíc *Dirichletovy podmínky* (jsou splněny pro všechny technické signály), t.j. má-li na každém konečném časovém intervalu konečný počet maxim a minim a nespojitostí 1. druhu, pak po aplikaci přímé a zpětné Fourierovy transformace obdržíme původní signál. Vykazuje-li signál v určitém bodu nespojitost 1. druhu, pak po zpětné Fourierově transformaci bude mít v bodě nespojitosti funkční hodnotu rovnou aritmetickému průměru limity zleva a zprava.

2. *Volnější technické podmínky*:

   (jsou-li splněny, jsme schopni definovat i spektrální funkci signálů, které nejsou absolutně integrovatelné)

   Signál musí: buď splňovat přísné matematické podmínky,

   nebo musí být rozložitelný na signál $s_M(t)$ s nulovou mohutností a signál $s_P(t)$, který je buď periodický nebo konstantní:

$$s(t) = s_M(t) + s_P(t). \tag{1.46}$$

   Pak se spektrální funkce takového signálu $s(t)$ určí z vzorce

$$\dot{S}(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \mathcal{F}\{s_M(t)\} + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{c}_k \delta(\omega - k\Omega_1). \tag{1.47}$$

   Zde $\dot{c}_k$ jsou koeficienty Fourierovy řady periodického signálu $s_P(t)$ a Ω_1 je jeho opakovací kmitočet. Signál $s_M(t)$ sice není absolutně integrovatelný, jeho Fourierovu transformaci však dovedeme určit speciálním postupem (viz řešené příklady).

Spektrem aperiodického signálu se rozumí závislosti modulu (amplitudové spektrum) a argumentu (fázové spektrum) spektrální funkce na kmitočtu.

Vztah spektrální funkce impulsu a Fourierovy řady periodického signálu

Bude-li se jednorázový impuls $s(t)$ o spektrální funkci $\dot{S}(\omega)$ periodicky opakovat s periodou T_1 podle vzorce

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT_1) \tag{1.48}$$

vznikne periodický signál o následujících koeficientech Fourierovy řady:

$$\dot{c}_k = \frac{1}{T_1} \dot{S}(\omega)\Big|_{\omega = k\Omega_1}, \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \tag{1.49}$$

Vlastnosti spektrální funkce

a) Spektrální funkce pro kmitočet 0Hz je reálná a udává mohutnost impulsu:

$$\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j0t} dt = M. \tag{1.50}$$

b) Modul spektrální funkce je sudou, argument lichou funkcí kmitočtu.

Obecné vlastnosti Fourierovy transformace F{s(t)}

a) Linearita:

$$\mathcal{F}\{a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)\} = a_1 \dot{S}_1(\omega) + a_2 \dot{S}_2(\omega). \tag{1.51}$$

b) Změna časového měřítka (komprese a expanze signálu):

$$\mathrm{F}\{s(mt)\} = \frac{1}{m}\hat{S}\left(\frac{w}{m}\right). \tag{1.52}$$

c) Posun signálu v čase:

$$\mathrm{F}\{s(t-t)\} = \hat{S}(w)e^{-jwt}. \tag{1.53}$$

d) Posun spektra:

$$\mathrm{F}\left\{s(t)e^{jw_0 t}\right\} = \hat{S}(w - w_0). \tag{1.54}$$

e) Přesměrování toku času:

$$\mathrm{F}\{s(-t)\} = \hat{S}(-w) = \hat{S}^*(w). \tag{1.55}$$

f) Derivace signálu:

Když $s(t)$ má konečnou mohutnost, pak

$$\mathrm{F}\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = jw\,\hat{S}(w). \tag{1.56}$$

Má-li $s(t)$ nekonečnou nebo nedefinovatelnou mohutnost a lze-li jej rozložit na signál s nulovou mohutností $s_M(t)$ a periodický či konstantní signál $s_P(t)$ podle rovnice (1.46), pak

$$\mathrm{F}\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = jw\,\hat{S}_M(w) + \mathrm{F}\left\{\frac{d}{dt}s_P(t)\right\} = jw\,\hat{S}_M(w) + 2p\ jW_1\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\hat{c}_k d(w - kW_1). \tag{1.57}$$

Pro jednodušší případ, kdy $s(t)$ se skládá jen ze signálu s nulovou mohutností $s_M(t)$ a z konstantní složky S_0, platí

$$\mathrm{F}\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = jw\,\hat{S}_M(w). \tag{1.58}$$

g) Integrace signálu:

Když $s(t)$ má nulovou mohutnost, pak

$$\mathrm{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} s(t)\,dt\right\} = \frac{1}{jw}\hat{S}(w). \tag{1.59}$$

Má-li $s(t)$ nenulovou mohutnost, pak jeho integrálem je nezanikající impuls $s_I(t)$. Lze-li tento impuls rozložit na impuls $s_{IM}(t)$ s nulovou mohutností a konstantní složku S_0, tedy

$$s_I(t) = \int_{-\infty}^{t} s(t)\,dt = s_{IM}(t) + S_0. \tag{1.60}$$

pak

$$\mathrm{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} s(t)\,dt\right\} = \frac{1}{jw}\hat{S}(w) + 2p\,S_0 d(w). \tag{1.61}$$

h) Součin dvou signálů:

$$\mathrm{F}\{s_1(t)s_2(t)\} = \frac{1}{2p}\hat{S}_1(w) * \hat{S}_2(w) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{S}_1(w - x)\hat{S}_2(x)\,dx = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{S}_1(x)\hat{S}_2(w - x)\,dx, \tag{1.62}$$

kde symbol * značí tzv. konvoluční součin neboli **konvoluci**.

i) Konvoluční součin dvou signálů:

$$\mathsf{F}\{s_1(t)*s_2(t)\} = \mathsf{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-x)s_2(x)\,dx\right\} = \mathsf{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x)s_2(t-x)\,dx\right\} = \hat{S}_1(w)\hat{S}_2(w). \qquad (1.63)$$

Parsevalův teorém pro aperiodické signály

Energie impulsu [J]

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{S}(w)\right|^2 dw \qquad (1.64)$$

(vyplývá z rovnice (1.62) pro $w = 0$ a $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$).

Spektrální hustota energie impulsu [J/Hz], resp. [J/rad s^{-1}]

- dvojstranná

$$L_d(w) = \frac{1}{2p}\left|\hat{S}(w)\right|^2, w \in (-\infty, +\infty), \qquad (1.65)$$

- jednostranná

$$L_j(w) = 2L_d(w) = \frac{1}{p}\left|\hat{S}(w)\right|^2, w \in (0, +\infty). \qquad (1.66)$$

Jiné vyjádření Parsevalova teorému

Energie impulsu [J]

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L_d(w)\,dw = \int_{0}^{+\infty} L_j(w)\,dw \qquad (1.67)$$

Vlastnosti spektrálních hustot energie

$L_d(w) = \frac{1}{2p}\left|\hat{S}(w)\right|^2, w \in (-\infty, +\infty)$ a $L_j(w) = 2L_d(w) = \frac{1}{p}\left|\hat{S}(w)\right|^2, w \in (0, +\infty)$:

a) Jsou reálné a nezáporné pro všechny kmitočty.
b) Dvoustranná spektrální hustota energie je sudou funkcí kmitočtu.
c) Slouží k výpočtu energie impulsu soustředěného v kmitočtovém pásmu $w \in (w_1, w_2)$:

$$W(w_1, w_2) = \int_{w_1}^{w_2} L_j(w)\,dw = \int_{-w_2}^{-w_1} L_d(w)\,dw + \int_{w_1}^{w_2} L_d(w)\,dw = 2\int_{w_1}^{w_2} L_d(w)\,dw \qquad (1.68)$$

Korelační funkce aperiodických signálů

Vzájemné korelační funkce vyjadřují závislosti vzájemné energie signálů na jejich časovém posunutí t:

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t+t)\,dt,$$
$$R_{21}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1(t+t)\,dt = R_{12}(-t). \qquad (1.69)$$

Na rozdíl od korelační funkce periodických signálů má tato funkce rozměr energie, tedy joule.

Autokorelační funkce:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t+\tau)\,dt\,. \tag{1.70}$$

Vlastnosti autokorelační funkce:

- je sudou funkcí posunutí τ:

$$R(-\tau)=R(\tau)\,, \tag{1.71}$$

- nabývá maxima pro τ = 0, toto maximum je energie signálu:

$$W=R(0)=R_{\max}=\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt\,, \tag{1.72}$$

- je spojena Fourierovou transformací s kvadrátem modulu spektrální hustoty signálu:

$$\begin{gathered}\left|\hat{S}(\omega)\right|^2=2\pi\,\Lambda_d(\omega)=\mathcal{F}\{R(\tau)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\,,\\ R(\tau)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\left|\hat{S}(\omega)\right|^2\right\}=\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\,\Lambda_d(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{S}(\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}\,d\omega.\end{gathered} \tag{1.73}$$

Vztah Fourierovy transformace a DFT

Definice DFT viz kapitola „Vztah Fourierovy řady periodického signálu a DFT“.

Uvažujme jednorázový signál $s(t)$ s konečnou dobou trvání T_S. Rovnoměrným vzorkováním získáme N vzorků $s_k = s(kT_S/N)$, k = 0, 1, 2, .., N-1. Provedeme výpočet N komplexních koeficientů DFT podle (1.29). Pak pro spektrální funkci signálu $s(t)$ přibližně platí

$$\left.\hat{S}(\omega)\right|_{\omega=n\Omega_S}=\frac{T_S}{N}\hat{X}_n\,,n=0,1,2,..,\ \text{celá část z}\ \frac{N}{2} \tag{1.74}$$

a

$$\Omega_S=\frac{2\pi}{T_S}. \tag{1.75}$$

Výpočet (1.74) je přesný pouze za předpokladu, že spektrální funkce signálu je frekvenčně omezená do kmitočtu $N/(2T_S)$. Známe-li tento mezní kmitočet a dobu trvání impulsu, přizpůsobíme tomu počet bodů N.

Základní aperiodické signály - jednotkový skok a jednotkový (Diracův) impuls

Slouží například k testování systémů a k modelování takových jevů, jako je připojení obvodu ke zdroji, injektování elektrického náboje do kapacitoru apod. Kombinací těchto jednoduchých signálů lze modelovat i signály složitějších tvarů.

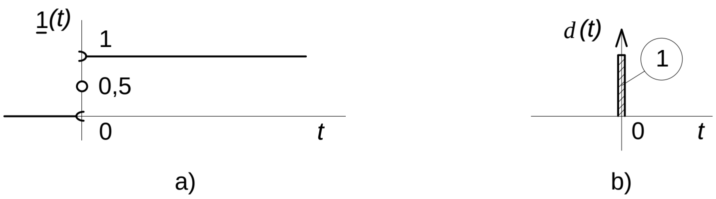
Jednotkový skok:

Jedna z používaných matematických definic:

$$\underline{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0{,}5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{1.76}$$

<u>Jednotkový (Diracův) impuls</u>:

$$d\,(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \text{ a navíc mohutnost impulsu = 1 neboli } \int_{-\infty}^{+\infty} d\,(t)\,dt = 1\,. \tag{1.77}$$



Obr.1.33. a) Jednotkový skok, b) Diracův impuls.

Z hlediska matematického Diracův impuls není klasickou funkcí, protože není jednoznačně definován výčtem hodnot (jednoznačně je dodefinován mohutností). Je zobecněnou funkcí neboli distribucí a pro práci s ním je třeba dodržovat některá pravidla, např.:

$$d\,(t)\,f\,(t) = d\,(t)\,f\,(0) = \begin{cases} 0 & & t \neq 0 \\ f\,(0).\infty = \begin{matrix} \pm\infty & \text{pro } f\,(0) \neq 0 \\ 0 & \text{pro } f\,(0) = 0 \end{matrix} & & t = 0 \end{cases} \tag{1.78}$$

a navíc mohutnost výsledného impulsu = *f*(0) neboli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\,(t)\,f\,(t)\,dt = f\,(0) \tag{1.79}$$

(platí za předpokladu spojitosti signálu *f*(*t*) v bodě *t* = 0).

Zobecněním (1.79) je pravidlo *<u>filtračního účinku Diracova impulsu</u>*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\,(t)\,f\,(t-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d\,(t-t)\,f\,(t)\,dt = f\,(t) \tag{1.80}$$

(platí za předpokladu spojitosti signálu *f*(*t*) v bodě *t* = *t*).

<u>Vztahy mezi jednotkovým skokem a Diracovým impulsem:</u>

$$d\,(t) = \frac{d}{dt}\underline{1}(t), \qquad \underline{1}(t) = \int_{-\infty}^{t} d\,(t)\,dt\,. \tag{1.81}$$

Derivaci a integrál je třeba chápat v zobecněném distribučním smyslu, nikoliv v klasickém významu.