

6.2. APERIODICKÉ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

Z aperiodických diskretních signálů budeme pracovat především s impulsy, a to jak s jednorázovými, tak i nezanikajícími.

Globální charakteristiky diskretních impulsů - mohutnost, energie, střední výkon

Mohutnost impulsu = aritmetický součet velikostí jeho vzorků; [jednotka mohutnosti] = [jednotka signálu]; (mnohdy se u diskretních signálů jednotka neudává; pak se neudává ani u globálních charakteristik):

$$M = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k). \quad (6.53)$$

Technicky realizovatelné diskretní jednorázové impulsy mají vesměs konečnou mohutnost.

Energie impulsu $s(k)$:

$$W = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^2(k). \quad (6.54)$$

Vzájemná energie dvou impulsů $s_1(k)$ a $s_2(k)$:

$$W_{12} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k)s_2(k). \quad (6.55)$$

Spektrální funkce (spektrální hustota, Fourierova transformace diskretního signálu, anglická zkratka DTFT - Discrete Time Fourier Transform); [jednotka spektrální funkce] = [jednotka signálu]:

$$\mathfrak{S}(\bar{\omega}) = DTFT\{s(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)e^{-jk\bar{\omega}}, \quad (6.56)$$

kde $\bar{\omega} = 2p\bar{f}$

je normovaný kmitočet, zavedený v kapitole 6.1 (vzorec 6.5).

Vzorky signálu zjistíme z jeho spektrální funkce **zpětnou Fourierovou transformací** (anglická zkratka IDTFT - Inverse Discrete Time Fourier Transform):

$$s(k) = \frac{1}{2p} \int_{\bar{\omega} \in 2p} \mathfrak{S}(\bar{\omega}) e^{+jk\bar{\omega}} d\bar{\omega}. \quad (6.57)$$

Zápis $\bar{\omega} \in 2p$ znamená, že při integraci musí proměnná $\bar{\omega}$ obsáhnout interval 2π radiánů bez ohledu na výchozí integrační bod.

Spektrální funkce jednorázových diskretních impulsů jsou funkce spojitého kmitočtu $\bar{\omega}$. Na rozdíl od spektrálních funkcí signálů souvislého času jsou periodické s periodou $2p$ radiánů.

Ne všechny diskretní signály mají svou spektrální funkci definovanou vzorcem (6.56).

Podmínky kladené na signál $s(k)$ zaručující existenci spektrální funkce:

1. *Přísné matematické podmínky (postačující, avšak ne nutná podmínka):*

Pro signál $s(k)$ musí platit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)| < \infty. \quad (6.58)$$

2. Volnější technické podmínky

(jsou-li splněny, jsme schopni definovat i spektrální funkci signálů, které nejsou absolutně „sumovatelné“).

Signál musí buď splňovat přísné matematické podmínky, nebo musí být rozložitelný na signál $s_M(k)$ s nulovou mohutností a signál $s_P(k)$, který je buď periodický nebo konstantní:

$$s(k) = s_M(k) + s_P(k). \quad (6.59)$$

Pak se spektrální funkce takového signálu $s(k)$ určí z vzorce

$$\mathfrak{S}(\bar{\omega}) = DTFT\{s(k)\} = DTFT\{s_M(k)\} + \frac{2p}{N} \sum_{n \in N} \mathfrak{X}(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d\left(\bar{\omega} - \frac{2pn}{N} - 2pm\right). \quad (6.60)$$

Zde $\mathfrak{X}(n)$ jsou koeficienty Fourierovy řady periodického signálu $s_P(k)$ a N je jeho opakovací perioda. Signál $s_M(k)$ sice není absolutně integrovatelný, jeho Fourierovu transformaci však dovedeme určit speciálním postupem (viz řešené příklady).

Spektrém aperiodického signálu se rozumí závislosti modulu (amplitudové spektrum) a argumentu (fázové spektrum) spektrální funkce na kmitočtu. Spektrum je periodické s periodou $2p$ radiánů.

Vztah spektrální funkce diskretního impulsu (DTFT) a Fourierovy řady diskretního periodického signálu

Bude-li se jednorázový impuls $s(k)$ o spektrální funkci $\mathfrak{S}(\bar{\omega})$ periodicky opakovat s periodou N podle vzorce

$$s_p(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(k - mN) \quad (6.61)$$

vznikne periodický diskretní signál o následujících koeficientech Fourierovy řady:

$$\mathfrak{X}(n) = \mathfrak{S}(\bar{\omega}) \Big|_{\bar{\omega} = n \frac{2p}{N}} \quad (6.62)$$

Znamená to, že koeficienty Fourierovy řady periodického diskretního signálu jsou vzorky spektrální funkce získané na frekvencích $n \cdot 2p/N$.

Vlastnosti spektrální funkce:

a) Spektrální funkce pro kmitočty 0Hz je reálná a udává mohutnost impulsu:

$$\mathfrak{S}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) = M. \quad (6.63)$$

b) Modul spektrální funkce je sudou, argument lichou periodickou funkcí kmitočtu.

Obecné vlastnosti Fourierovy transformace diskretního signálu (DTFT):

a) Linearita:

$$DTFT\{a_1 s_1(k) + a_2 s_2(k)\} = a_1 \mathfrak{S}_1(\bar{\omega}) + a_2 \mathfrak{S}_2(\bar{\omega}). \quad (6.64)$$

b) Posunutí vzorků signálu:

$$DTFT\{s(k-m)\} = \mathfrak{S}(\bar{w})e^{-j\bar{w}m}. \quad (6.65)$$

c) Posun spektra:

$$DTFT\{s(k)e^{j\bar{w}_0k}\} = \mathfrak{S}(\bar{w} - \bar{w}_0). \quad (6.66)$$

d) Přesměrování pořadí vzorků signálu:

$$DTFT\{s(-k)\} = \mathfrak{S}(-\bar{w}) = \mathfrak{S}(\bar{w}). \quad (6.67)$$

e) Diference signálu:

Když $s(k)$ má konečnou mohutnost, pak

$$DTFT\{D[s(k)]\} = DTFT\{s(k) - s(k-1)\} = (1 - e^{-j\bar{w}})\mathfrak{S}(\bar{w}). \quad (6.68)$$

Má-li $s(k)$ nekonečnou nebo nedefinovatelnou mohutnost a lze-li jej rozložit na signál s nulovou mohutností $s_M(k)$ a periodický či konstantní signál $s_P(k)$ podle rovnice (6.59), pak

$$\begin{aligned} DTFT\{D[s(k)]\} &= (1 - e^{-j\bar{w}})\mathfrak{S}_M(\bar{w}) + DTFT\{D[s_P(k)]\} = \\ &= (1 - e^{-j\bar{w}})\mathfrak{S}_M(\bar{w}) + \frac{2p}{N} \sum_{n \in N} \left(1 - e^{-jn\frac{2p}{N}}\right) \mathfrak{S}(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d\left(\bar{w} - \frac{2pn}{N} - 2pm\right). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Pro jednodušší případ, kdy $s(t)$ se skládá jen ze signálu s nulovou mohutností $s_M(k)$ a z konstantní složky S_0 , platí

$$DTFT\{D[s(k)]\} = (1 - e^{-j\bar{w}})\mathfrak{S}_M(\bar{w}). \quad (6.70)$$

f) Diskrétní integrace - sumace signálu:

Když $s(k)$ má nulovou mohutnost, pak

$$DTFT\left\{\sum_{l=-\infty}^k s(l)\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\bar{w}}}\mathfrak{S}(\bar{w}). \quad (6.71)$$

Má-li $s(k)$ nenulovou mohutnost, pak jeho diskrétní integrací vzniká nezanikající impuls $s_I(k)$. Lze-li tento impuls rozložit na impuls $s_{IM}(k)$ s nulovou mohutností a konstantní složku S_0 , tedy

$$s_I(k) = \sum_{l=-\infty}^k s(l) = s_{IM}(k) + S_0, \quad (6.72)$$

pak

$$DTFT\left\{\sum_{l=-\infty}^k s(l)\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\bar{w}}}\mathfrak{S}(\bar{w}) + 2pS_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(\bar{w} - 2pn). \quad (6.73)$$

g) Součin dvou signálů:

$$\begin{aligned} DTFT\{s_1(k)s_2(k)\} &= \frac{1}{2p}\mathfrak{S}_1(\bar{w}) * \mathfrak{S}_2(\bar{w}) = \frac{1}{2p} \int_{\bar{a} \in 2p} \mathfrak{S}_1(\bar{w} - \bar{a})\mathfrak{S}_2(\bar{a})d\bar{a} = \\ &= \frac{1}{2p} \int_{\bar{a} \in 2p} \mathfrak{S}_1(\bar{a})\mathfrak{S}_2(\bar{w} - \bar{a})d\bar{a}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

kde symbol $*$ značí tzv. konvoluční součin neboli **konvoluci**.

h) Diskrétní konvoluce dvou jednorázových signálů (toto není cyklická konvoluce):

$$\begin{aligned} DTFT\{s_1(k)*s_2(k)\} &= DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_1(m)s_2(k-m)\right\} = DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_1(k-m)s_2(m)\right\} = \\ &= \mathfrak{S}_1(\bar{w})\mathfrak{S}_2(\bar{w}). \end{aligned} \quad (6.75)$$

i) Derivace spektrální funkce:

$$DTFT\{k s(k)\} = j \frac{d}{d\bar{w}} \mathfrak{S}(\bar{w}), \quad (6.76)$$

pokud ovšem spektrální funkce na levé straně vůbec existuje.

Parsevalův teorém pro aperiodické diskrétní signály

Energie impulsu

$$W = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^2(k) = \frac{1}{2p} \int_{\bar{w} \in 2p} |\mathfrak{S}(\bar{w})|^2 d\bar{w} \quad (6.77)$$

(vyplývá z rovnice (6.74) pro $\bar{w} = 0$ a $s_1(k) = s_2(k) = s(k)$).

Spektrální hustota energie impulsu

- dvojstranná

$$L_d(\bar{w}) = \frac{1}{2p} |\mathfrak{S}(\bar{w})|^2, \bar{w} \in (-p, +p), \quad (6.78)$$

- jednostranná

$$L_j(\bar{w}) = 2L_d(\bar{w}) = \frac{1}{p} |\mathfrak{S}(\bar{w})|^2, \bar{w} \in (0, +p). \quad (6.79)$$

Jiné vyjádření Parsevalova teorému:

Energie impulsu

$$W = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^2(k) = \int_{-p}^{+p} L_d(\bar{w}) d\bar{w} = \int_0^{+p} L_j(\bar{w}) d\bar{w}. \quad (6.80)$$

Vlastnosti spektrálních hustot energie

$$L_d(\bar{w}) = \frac{1}{2p} |\mathfrak{S}(\bar{w})|^2, \bar{w} \in (-\infty, +\infty) \text{ a } L_j(\bar{w}) = 2L_d(\bar{w}) = \frac{1}{p} |\mathfrak{S}(\bar{w})|^2, \bar{w} \in (0, +\infty):$$

a) Jsou reálné a nezáporné pro definiční obor kmitočtů.

b) Dvoustranná spektrální hustota energie je periodickou sudou funkcí kmitočtu.

c) Slouží k výpočtu energie impulsu soustředěného v kmitočtovém pásmu $\bar{w} \in (\bar{w}_1, \bar{w}_2), \bar{w}_2 - \bar{w}_1 < p$:

$$W(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = \int_{\bar{w}_1}^{\bar{w}_2} L_j(\bar{w}) d\bar{w} = \int_{-\bar{w}_2}^{-\bar{w}_1} L_d(\bar{w}) d\bar{w} + \int_{\bar{w}_1}^{\bar{w}_2} L_d(\bar{w}) d\bar{w} = 2 \int_{\bar{w}_1}^{\bar{w}_2} L_d(\bar{w}) d\bar{w}. \quad (6.81)$$

Korelační funkce aperiodických diskrétních signálů

Vzájemné korelační funkce vyjadřují závislosti vzájemné energie signálů na jejich vzájemném posunutí m :

$$R_{12}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k)s_2(k+m), \quad (6.82)$$

$$R_{21}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_2(k)s_1(k+m) = R_{12}(-m).$$

Na rozdíl od korelační funkce periodických diskretních signálů má tato funkce rozměr energie.

Fourierova transformace (DTFT) korelační funkce:

$$DTFT\{R_{12}(m)\} = \mathfrak{F}_1(\bar{w})\mathfrak{F}_2(\bar{w}), \quad (6.83)$$

$$DTFT\{R_{21}(m)\} = \mathfrak{F}_1(\bar{w})\mathfrak{F}_2(\bar{w}).$$

Autokorelační funkce:

$$R(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)s(k+m). \quad (6.84)$$

Vlastnosti autokorelační funkce:

- je sudou funkcí posunutí m :

$$R(-m) = R(m), \quad (6.85)$$

- nabývá maxima pro $m = 0$, toto maximum je energie signálu:

$$W = R(0) = R_{\max} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s^2(k), \quad (6.86)$$

- je spojena Fourierovou transformací (DTFT) s kvadrátem modulu spektrální hustoty signálu:

$$|\mathfrak{F}(\bar{w})|^2 = 2p L_d(\bar{w}) = DTFT\{R(m)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R(m)e^{-j\bar{w}m} = 2 \sum_{m=0}^{+\infty} R(m) \cos \bar{w}m, \quad (6.87)$$

$$R(m) = IDTFT\{|\mathfrak{F}(\bar{w})|^2\} = IDTFT\{2pL_d(\bar{w})\} = \frac{1}{2p} \int_{\bar{w} \in 2p} |\mathfrak{F}(\bar{w})|^2 e^{j\bar{w}m} d\bar{w}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Slouží k numerickému výpočtu vzorků spektrální funkce aperiodického diskretního signálu s konečnou délkou trvání N_1 vzorků, pro který platí

$$s(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_1 - 1. \quad (6.88)$$

DFT je předpis pro výpočet N vzorků spektrální funkce aperiodického diskretního signálu z N vzorků signálu. Počet vzorků můžeme volit libovolně tak, aby platilo

$$N \geq N_1. \quad (6.89)$$

Pro $N > N_1$ je třeba signál doplnit vzorky o hodnotách 0.

DFT:

$$\mathfrak{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)e^{-jkn2p/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (6.90)$$

IDFT (inverzní, zpětná DFT):

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{X}(n)e^{jkn2p/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (6.91)$$

Vztah DFT a Fourierovy transformace pro diskrétní signály (DTFT)

Produkt DTFT je spektrální funkce $\mathcal{F}(\bar{w})$ signálu, která je funkcí souvislého kmitočtu \bar{w} . Signál může mít konečný nebo i nekonečný počet vzorků.

Produkt DFT je N komplexních koeficientů $X(n)$, které jsou numericky určeny z N vzorků signálu. Ostatní vzorky signálu, nezahrnuté do algoritmu DFT, jsou považovány za nulové.

Pokud je signál omezený podle podmínky (6.88) a zvolíme-li počet bodů DFT podle (6.89), pak platí, že $X(n)$ jsou vzorky spektrální funkce $\mathcal{F}(\bar{w})$ v ekvidistantních bodech:

$$X(n) = \mathcal{F}(\bar{w}) \Big|_{\bar{w} = n \frac{2\pi}{N}} \quad (6.92)$$

Rychlá Fourierova transformace (FFT - Fast Fourier Transform)

Je algoritmus úsporného a tudíž rychlého výpočtu koeficientů DFT. U standardního algoritmu FFT je třeba volit počet vzorků tak, aby tvořil celočíselnou mocninu dvou, tedy aby byl z řady 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...

Je-li například signál tvořen 900 vzorky, pak je vhodné jej doplnit o 124 nulových vzorků a na tento signál pak aplikovat 1024 bodovou FFT. Klasický algoritmus DFT o 900 vzorcích by trval daleko déle.

V MATLABu jsou algoritmy FFT i DFT sdruženy v jediné funkci

$$\text{FFT}(s),$$

kde s je vektor diskrétního signálu o N vzorcích. Je-li N celočíselná mocnina dvou, pak je spuštěn algoritmus FFT, v opačném případě proběhne klasický algoritmus DFT.

$$\text{FFT}(s, N)$$

má stejný význam s tím, že když se parametr N neshoduje s počtem vzorků signálu s , proběhne buď doplnění vzorků na nuly (je-li N větší než délka signálu), nebo dojde k ořezání vzorků (když N je menší než délka signálu).

Využití DFT (FFT) k výpočtu konvoluce diskrétních signálů

Uvažujme dva diskrétní aperiodické signály $s_1(k)$ a $s_2(k)$ o konečných délkách N_1 a N_2 :

$$s_1(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_1 - 1, \quad (6.93)$$

$$s_2(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (6.94)$$

Pak konvoluce

$$s(k) = s_1(k) * s_2(k) \quad (6.95)$$

má konečnou délku $N_1 + N_2 - 1$:

$$s(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_1 + N_2 - 2, \quad (6.96)$$

Proto zvolíme-li číslo

$$N \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (6.97)$$

a budeme-li signály s_1 a s_2 považovat za 1 periodu jejich periodického opakování s délkou periody N , bude konvoluce (6.95) tvořit zároveň jednu periodu cyklické konvoluce. Aplikace N -bodové DFT dá výsledek

$$\mathfrak{X}(n) = DFT\{s_1(k) * s_2(k)\} = DFT\{s_1(k)\} \cdot DFT\{s_2(k)\} = \mathfrak{X}_1(n) \mathfrak{X}_2(n) \quad (6.98)$$

Aplikací inverzní N -bodové DFT získáme vzorky konvoluce.

Využití DFT (FFT) k výpočtu korelačních funkcí diskretních signálů

Uvažujme dva diskretní aperiodické signály $s_1(k)$ a $s_2(k)$ o konečných délkách N_1 a N_2 :

$$s_1(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_1 - 1, \quad (6.99)$$

$$s_2(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (6.100)$$

Pak vzájemné korelační funkce

$$R_{12}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2(k+m), \quad R_{21}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k+m) s_2(k) \quad (6.101)$$

mají konečnou délku N_1+N_2-1 :

$$R_{12}(m) = 0 \text{ mimo interval } -(N_1 - 1) \leq m \leq N_2 - 1, \quad (6.102)$$

$$R_{21}(m) = 0 \text{ mimo interval } -(N_2 - 1) \leq m \leq N_1 - 1. \quad (6.103)$$

Proto zvolíme-li číslo

$$N \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (6.104)$$

a budeme-li signály s_1 a s_2 považovat za 1 periodu jejich periodického opakování s délkou periody N , budou vzájemné korelační funkce (6.101) tvořit zároveň jednu periodu periodické korelační funkce periodických „nadstavěb“ s_1 a s_2 . Aplikace N -bodové DFT na signály $s_1(k)$ a $s_2(k)$ dá výsledek (viz vzorec 6.83)

$$DFT\{R_{12}(m)\} = DFT^*\{s_1(k)\} DFT\{s_2(k)\} = \mathfrak{X}_1^*(m) \mathfrak{X}_2(m), \quad (6.105)$$

$$DFT\{R_{21}(m)\} = DFT\{s_1(k)\} DFT^*\{s_2(k)\} = \mathfrak{X}_1(m) \mathfrak{X}_2^*(m). \quad (6.106)$$

Aplikací inverzní N -bodové DFT získáme N vzorků vzájemných korelačních funkcí. Musíme si však uvědomit, že ve skutečnosti jsou korelační funkce nulové vně intervalů, daných vzorci (6.102) a (6.103). Vzorky odpovídající záporným indexům zjistíme na základě periodicity signálu po inverzní DFT.

Autokorelační funkce aperiodického signálu $s(k)$ o konečné délce N_1 :

$$s(k) = 0 \text{ mimo interval } 0 \leq k \leq N_1 - 1 \quad (6.107)$$

je sudá a má konečnou délku $2N_1-1$:

$$R(m) = 0 \text{ mimo interval } -(N_1 - 1) \leq m \leq N_1 - 1. \quad (6.108)$$

Proto zvolíme-li číslo

$$N \geq 2N_1 - 1 \quad (6.109)$$

aplikace N -bodové DFT na signál $s(k)$ dá výsledek (viz vzorec 6.87)

$$DFT\{R(m)\} = |DFT\{s(k)\}|^2 = |X(m)|^2. \quad (6.110)$$

Aplikací inverzní N -bodové DFT získáme N vzorků autokorelační funkce. Musíme si však uvědomit, že ve skutečnosti je autokorelační funkce nulová vně intervalu, daného vzorcem (6.108). Vzorky odpovídající záporným indexům zjistíme na základě periodicity signálu po inverzní DFT.

Souvislost mezi spektrálními funkcemi impulsů souvislého a diskrétního času

Signál souvislého času $s(t)$ má spektrální funkci

$$S(\omega) = F\{s(t)\}.$$

Tento signál nyní bude vzorkován se vzorkovací periodou T_V tak, že vznikne diskrétní signál

$$s_d(k) \equiv s(kT_V) \Big|_{k=\mathbf{K}-1,0,1,2,\mathbf{K}}$$

Vzniklý diskrétní signál má spektrální funkci

$$S_d(\bar{\omega}) = DTFT\{s_d(k)\}, \bar{\omega} = \omega T_V.$$

Mezi spektrálními funkcemi S a S_d platí důležitý vztah, který lze odvodit z Poissonova vztahu (5.10):

$$S_d(\bar{\omega}) = \frac{1}{T_V} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\omega_V). \quad (6.111)$$

Spektrální funkce diskrétního signálu je součtem nekonečně mnoha spektrálních funkcí odpovídajícího signálu souvislého času posouvaných po kmitočtové ose o celistvé násobky vzorkovací frekvence. Součet je vydělen vzorkovací periodou (vynásoben vzorkovacím kmitočtem).

Základní aperiodické signály - jednotkový skok a jednotkový impuls

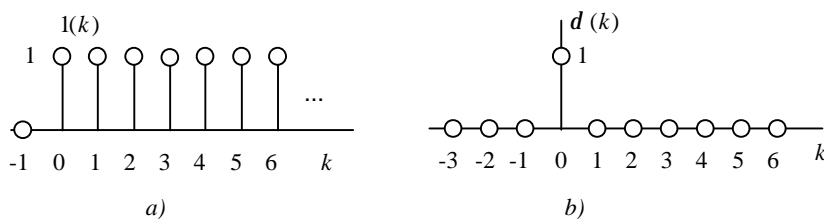
Podobně jako u signálů souvislého času slouží například k testování systémů. Kombinací těchto jednoduchých signálů lze modelovat diskrétní signály složitějších tvarů.

Diskrétní jednotkový skok:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0, \\ 1 & k \geq 0. \end{cases} \quad (6.112)$$

Diskrétní jednotkový impuls:

$$d(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0, \\ 1 & k = 0. \end{cases} \quad (6.113)$$



Obr.6.11. a) Diskrétní jednotkový skok a b) jednotkový impuls.

Mohutnost jednotkového impulsu je 1:

$$M = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(k) = 1. \quad (6.114)$$

Jednotkový impuls je obdobou Diracova impulsu u signálů souvislého času. Protože je všude nulový s výjimkou počátku, platí pro něj pravidlo

$$d(k)s(k) = d(k)s(0) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ s(0) & k = 0 \end{cases} \quad (6.115)$$

Filtrační účinek diskrétního jednotkového impulsu

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)d(k-m) = s(m). \quad (6.116)$$

Vztahy mezi jednotkovým skokem a jednotkovým impulsem:

$$d(k) = 1(k) - 1(k-1) = D\{1(k)\}, \quad 1(k) = \sum_{i=-\infty}^k d(i) = \sum_{i=0}^{\infty} d(k-i). \quad (6.117)$$

Transformace z

Má podobný význam pro popis diskrétních signálů a systémů jako Laplaceova transformace u signálů a systémů souvislého času. Transformaci z lze chápat jako zobecněnou Fourierovu transformaci diskrétních signálů (DTFT). Zobecnění je provedeno tak, aby existovala z transformace u některých důležitých signálů, pro něž neexistuje DTFT.

Omezíme se na jednostrannou transformaci z , která má daleko větší praktické využití než transformace dvoustranná.

Uvažujme signál $s(k)$, který je nulový vně intervalu $k \in \langle 0, 1, 2, \dots \rangle$. Pak

DTFT:

$$\mathcal{F}\{\bar{w}\} = F\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k)e^{-jk\bar{w}}. \quad (6.118)$$

Transformace z :

$$S(z) = Z\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k)z^{-k}, \quad (6.119)$$

z je komplexní číslo (operátor transformace z), které se dá pro většinu technických signálů nastavit tak, aby suma na pravé straně (6.119) existovala, tudíž aby existoval z -obraz $S(z)$ signálu.

Podmínky kladené na signál $s(k)$ zaručující existenci z -obrazu $S(z)$:

Musí existovat takové celé číslo $k_1 > 0$ a kladná čísla A a B taková, že platí

$$|s(k)| < A \cdot e^{Bk} \quad \text{pro } k > k_1 \quad (6.120)$$

(signál $s(k)$ může neomezeně růst, ale ne rychleji než exponenciálně).

Oblast konvergence z -obrazu je množina komplexních čísel z , pro něž definiční suma (6.119) konverguje.

Dva důležité tvary z -obrazů diskrétních signálů:

1. Signál konečné délky N :

$$\begin{aligned} S(z) &= Z\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)z^{-k} = s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + \dots + s(N-1)z^{1-N} = \\ &= \frac{s(0)z^{N-1} + s(1)z^{N-2} + s(2)z^{N-3} + \dots + s(N-1)}{z^{N-1}}. \end{aligned} \quad (6.121)$$

2. Signál nekonečné délky:

$$S(z) = Z\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k)z^{-k} = s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + \dots + s(k)z^{-k} + \dots \quad (6.122)$$

Pokud tato nekonečná řada konverguje, lze zapsat výsledek v uzavřeném tvaru. U mnohých diskretních signálů je tento výsledek v tvaru racionální lomené funkce:

$$S(z) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n} = \frac{a_0z^{-n} + a_1z^{-n+1} + a_2z^{-n+2} + \dots + a_n}{b_0z^{-n} + b_1z^{-n+1} + b_2z^{-n+2} + \dots + b_n}. \quad (6.123)$$

Koeficienty typu a_k , b_k a číslo n závisí na typu signálu. Pro mnohé signály bývá počet nenulových koeficientů čitatele menší než počet nenulových koeficientů jmenovatele.

Nulové body z -obrazu jsou komplexní čísla z , pro něž je čítec (6.123) roven nule.

Póly z -obrazu jsou komplexní čísla z , pro něž je jmenovatel (6.123) roven nule.

Signál konečné délky N má pouze $N-1$ násobný pól v nule, kdežto signál nekonečné délky může mít póly rozmístěny po celé komplexní rovině.

Signál, který zaniká pro $k \rightarrow \infty$ (konverguje k nule), má všechny póly o modulu menším než jedna (všechny póly leží uvnitř jednotkové kružnice se středem v počátku komplexní roviny).

Signál, který neomezeně roste pro $k \rightarrow \infty$ (diverguje), má alespoň jeden pól o modulu větším než jedna nebo má vícenásobné póly na jednotkové kružnici.

Je-li některý pól reálného signálu komplexní, pak k němu musí existovat další pól komplexně sdružený.

Zpětná (inverzní) transformace z

Je předpis, který slouží k zpětnému převodu z -obrazu na signál $s(k)$.

Používané metody (podrobněji viz řešené příklady):

1. Výpočet definičního integrálu zpětné transformace z :

$$s(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c S(z)z^{k-1} dz. \quad (6.124)$$

Integrace probíhá podél uzavřené křivky c , která obklopuje počátek komplexní roviny, celá leží v oblasti konvergence z -obrazu $S(z)$ a je orientována proti směru pohybu hodinových ručiček.

Pro z -obrazy ve tvaru racionální lomené funkce se k výpočtu křivkového integrálu (6.124) dá využít residuová věta:

$$s(k) = \sum_{\text{poly } S(z)z^{k-1}} \text{res}\{S(z)z^{k-1}\}. \quad (6.125)$$

2. Rozklad z -obrazu na parciální zlomky a nalezení originálu v slovníku transformace z (viz příloha).

3. Postupné dělení čitatele (6.123) jmenovatelem.

Vlastnosti z-obrazu (předpokládáme, že signál $s(k) = 0$ pro $k < 0$):

a) Hodnota pro $z = 1$ je reálná a udává mohutnost impulsu:

$$S(z) \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k) = M. \quad (6.126)$$

b) Věta o počáteční hodnotě signálu:

$$s(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} S(z). \quad (6.127)$$

c) Věta o konečné hodnotě signálu:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = \lim_{z \rightarrow 1^+} [(z-1)S(z)]. \quad (6.128)$$

Obecné vlastnosti transformace z:

a) Linearita:

$$Z\{a_1 s_1(k) + a_2 s_2(k)\} = a_1 S_1(z) + a_2 S_2(z). \quad (6.129)$$

b) Posunutí vzorků signálu:

Pro $s(k) = 0, k < 0$:

$$Z\{s(k-m)\} = S(z)z^{-m}, \quad m \geq 0 \text{ celé.} \quad (6.130)$$

Pro $s(k) \neq 0, k < 0$:

$$\begin{aligned} Z\{s(k-m)\} &= S(z)z^{-m} + s(-1)z^{-m+1} + s(-2)z^{-m+2} + \dots + s(-m)z^0 = \\ &= S(z)z^{-m} + \sum_{n=1}^m s(-n)z^{n-m}, \quad m \geq 0 \text{ celé.} \end{aligned} \quad (6.131)$$

c) Transformace operátoru:

$$Z\{s(k)a^k\} = S\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \neq 0. \quad (6.132)$$

d) Diference signálu:

Pro $s(-1) = 0$:

$$Z\{D[s(k)]\} = Z\{s(k) - s(k-1)\} = (1 - z^{-1})S(z) = \frac{z-1}{z}S(z). \quad (6.133)$$

Pro $s(-1) \neq 0$:

$$Z\{D[s(k)]\} = Z\{s(k) - s(k-1)\} = (1 - z^{-1})S(z) - s(-1) = \frac{z-1}{z}S(z) - s(-1). \quad (6.134)$$

e) Diskrétní integrace - sumace signálu:

$$Z\left\{\sum_{l=0}^k s(l)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}S(z) = \frac{z}{z-1}S(z). \quad (6.135)$$

f) Součin dvou signálů (teorém komplexní konvoluce):

$$Z\{s_1(k)s_2(k)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c S_1(x)S_2\left(\frac{z}{x}\right)x^{-1}dx. \quad (6.136)$$

Křivka c leží v průniku oblastí konvergence obrazů $S_1(x)$ a $S_2\left(\frac{z}{x}\right)$.

g) Diskrétní konvoluce dvou jednorázových signálů:

$$Z\{s_1(k)*s_2(k)\} = Z\left\{\sum_{m=0}^k s_1(m)s_2(k-m)\right\} = Z\left\{\sum_{m=0}^k s_1(k-m)s_2(m)\right\} = S_1(z)S_2(z). \quad (6.137)$$

h) Derivace z-obrazu:

$$Z\{k s(k)\} = -z \frac{d}{dz} S(z), \quad (6.138)$$

pokud ovšem obraz na levé straně vůbec existuje.

Vztah jednostranné transformace z a DTFT

Je-li $s(k) = 0$ pro $k < 0$,

pak

$$DTFT\{s(k)\} = \mathfrak{F}\{\bar{w}\} = Z\{s(k)\} \Big|_{z=e^{j\bar{w}}} = S(z) \Big|_{z=e^{j\bar{w}}}. \quad (6.139)$$

Vztah jednostranné transformace z a N -bodové DFT

Je-li signál $s(k)$ tvořen N vzorky $s(0), s(1), \dots, s(N-1)$, pak

$$DFT\{s(k)\} = \mathfrak{X}(n) = Z\{s(k)\} \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} = S(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}}, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.140)$$

Proto

$$IDFT\left\{S(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}}\right\} = s(k), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.141)$$

Je-li však signál $s(k)$ tvořen více než N vzorky, pak

$$IDFT\left\{S(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}}\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(k-mN), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.142)$$

Signál získaný z N vzorků z -obrazu již nebude původním signálem $s(k)$, ale bude zkreslen. Pro koeficienty DFT bude nyní platit

$$\begin{aligned} Z\{s(k)\} \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} &= S(z) \Big|_{z=e^{j2\pi n/N}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} DFT\left\{s(m) \Big|_{m \in \langle kN, kN+N-1 \rangle}\right\}, n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Vztah jednostranné transformace z a koeficientů Fourierovy řady diskrétního periodického signálu

Je-li $S(z)$ z -obraz jednorázového diskrétního signálu o N vzorcích $s(0), s(1), \dots, s(N-1)$ a bude-li se tento impuls periodicky opakovat s periodou N , pak koeficienty Fourierovy řady tohoto signálu budou

$$X(n) = S(z) \Big|_{z=e^{jn2\pi/N}}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.144)$$