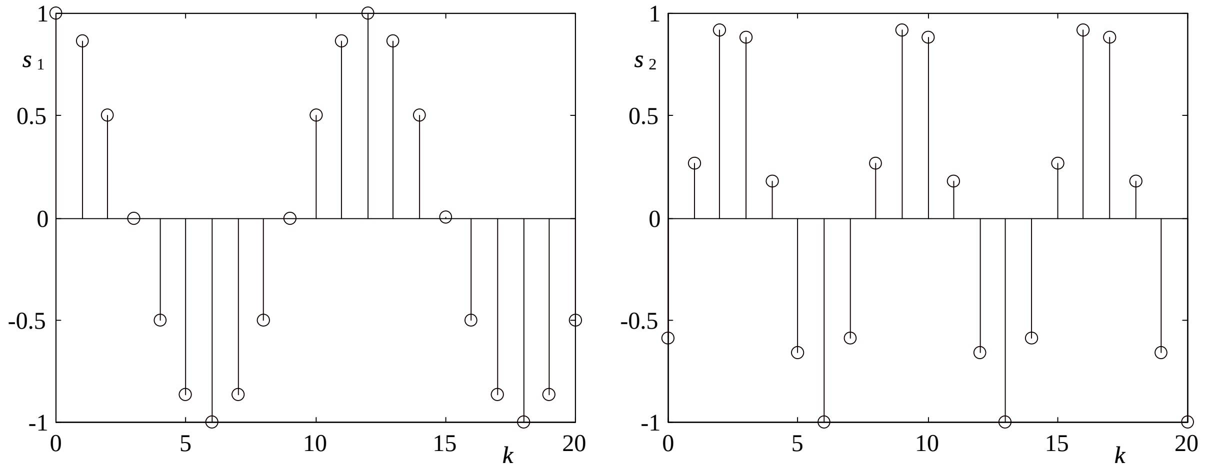
ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

r 6.1. Určete amplitudu, opakovací periodu, opakovací kmitočet a počáteční fázi diskrétních harmonických signálů.

a) $s_1(k) = \cos\left(k.\frac{p}{6}\right)$, b) $s_2(k) = \sin\left(k.\frac{2p}{7} - 0{,}2p\right)$, $T_V = 1\,\mathrm{ms}$.



Obr.6.3. Příklady diskrétních harmonických signálů.

þ ***Řešení*:**

a) $C = 1,\quad N = 12,\quad \overline{F}_1 = \frac{1}{N} = 0{,}08\overline{3},\quad \overline{W}_1 = 2p\overline{F}_1 \doteq 0{,}524\ \mathrm{rad},\quad j = 0\ \mathrm{rad}$,

$T_1 = NT_V = 12\,\mathrm{ms},\quad F_1 = \frac{1}{T_1} = 83{,}\overline{3}\,\mathrm{Hz},\quad W_1 = 2pF_1 \doteq 523{,}6\ \mathrm{rad/s}$.

b) $C = 1,\quad N = 7,\quad \overline{F}_1 = \frac{1}{N} \doteq 0{,}143,\quad \overline{W}_1 = 2p\,\overline{F}_1 \doteq 0{,}898\ \mathrm{rad},\quad j = -0{,}7p\ \mathrm{rad} = -126°$,

$T_1 = NT_V = 7\,\mathrm{ms},\quad F_1 = \frac{1}{T_1} \doteq 142{,}9\,\mathrm{Hz},\quad W_1 = 2pF_1 \doteq 897{,}6\ \mathrm{rad/s}$.

r 6.2. Zjistěte množinu všech možných opakovacích kmitočtů a počátečních fází signálů z př.6.1.

þ ***Řešení*:**

Viz vztah (6.22): hledáme taková celá *m* taková, aby vyšly nezáporné kmitočty

$m \pm \frac{1}{N}$ ... normované kmitočty, nebo $f_V\left(m \pm \frac{1}{N}\right)$ ... kmitočty v Hz.

Pak znaménku + odpovídá fáze $+j$ a znaménku - fáze $-j$ ve vztahu (6.21).

a) normované kmitočty *m*-1/12:
11/12, 23/12, 35/12, 47/12, ..., počáteční fáze 0

normované kmitočty *m*+1/12:
1/12, 13/12, 25/12, 37/12, 49/12, ..., počáteční fáze 0

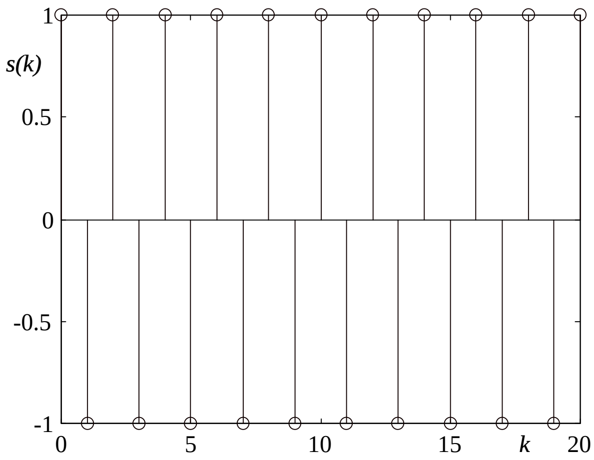
b) normované kmitočty *m*-1/7:
6/7, 13/7, 20/7, 27/7, ..., počáteční fáze 126°

normované kmitočty *m*+1/7:
1/7, 8/7, 15/7, 22/7, 29/7, ..., počáteční fáze -126°

r 6.3. Zjistěte, zda alternující posloupnost

$$s(k) = (-1)^k$$

může být speciálním případem diskrétního harmonického signálu.

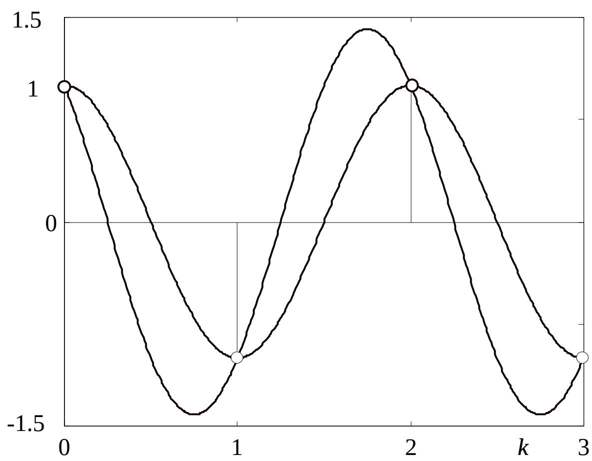


Obr.6.4. Signál $s(k) = (-1)^k$.

þ *Řešení*:

Jde o signál, vzniklý vzorkováním kosinového signálu střídavě v jeho maximech a minimech. Vzorkovací perioda je tedy polovinou periody harmonického signálu a tudíž N=2, $\overline{F}_1 = 0{,}5$:

$$s(k) = \cos(2p\overline{F}_1 k) = \cos(pk) = (-1)^k .$$



Obr.6.5. Problém rekonstrukce původního signálu souvislého času z jeho vzorků $s(k) = (-1)^k$.

Jedná se o tzv. degenerovanou harmonickou, která se objevuje ve Fourierové řadě periodického signálu pro *N* sudé (viz vzorec (6.27)). Tato harmonická již nevyhovuje podmínce vzorkovacího teorému. Není jednoznačné, jaký může být „nízkofrekvenční“ signál, jehož vzorkováním vznikl náš diskrétní signál - viz obr.6.5. Dá se říci, že v tomto případě je nejednoznačný nejen kmitočet, ale i amplituda. Původní signál pak nemůže být jednoznačně rekonstruován.

r 6.4. Určete střední hodnotu, střední hodnotu kladné a záporné „půlvlny“ signálů z př.6.1.

þ ***Řešení*:**

Výpočet z vzorků, uvedených v tabulkách.

k	a) $s(k)=\cos\left(k.\frac{p}{6}\right)$	b) $s(k)=\sin\left(k.\frac{2p}{7}-0{,}2p\right)$
0	1	-0,588
1	0,866	0,266
2	0,5	0,9195
3	0	0,881
4	-0,5	0,179
5	-0,866	-0,658
6	-1	-0,999
7	-0,866	-0,588
8	-0,5	M
9	0	
10	0,5	
11	0,866	
12	1	
M	M	

Střední hodnota:

a) $S_0=\frac{\sum_{k=0}^{11}s(k)}{12}=0$, b) $S_0=\frac{\sum_{k=0}^{6}s(k)}{7}=0$.

Střední hodnota kladné půlvlny:

a) $S_+=\frac{s(-3)+s(-2)+s(-1)+s(0)+s(1)+s(2)}{6}=\frac{s(9)+s(10)+s(11)+s(0)+s(1)+s(2)}{6}\doteq 0{,}622$,

b) $S_+=\frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}\doteq 0{,}561$.

Střední hodnota záporné půlvlny:

a) $S_-=\frac{s(3)+s(4)+s(5)+s(6)+s(7)+s(8)}{6}\doteq -0{,}622$, b) $S_-=\frac{s(5)+s(6)+s(7)}{3}\doteq -0{,}748$.

Výpočet z vzorců (6.13) a (6.14):

$S_0=0$,

$S_+=\frac{1}{m}\mathrm{cotg}\frac{p}{2m}C$, platí jen pro signál a): $S_+=\frac{1}{6}\mathrm{cotg}\frac{p}{12}\doteq 0{,}622$.

& ***Poznatky z příkladu*:**

- *Obsahuje-li „půlperioda“ harmonického signálu celistvý počet vzorkovacích period, pak střední hodnota kladné „půlvlny“ je až na znaménko rovna střední hodnotě záporné „půlvlny“.*
- *Je-li perioda harmonického signálu vyjádřena lichým počtem vzorků, pak je v kladné a záporné „půlperiodě„ různý počet vzorků a střední hodnoty se liší nejen znaménkem, ale i absolutní hodnotou.*

r 6.6. Vypočtěte efektivní hodnotu signálů z př.6.4 z definičního vztahu (6.10) a pak z vzorce (6.15).

þ *Řešení*:

a) $S_{ef} = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=0}^{11} s_k^2}{12}} \doteq 0{,}707$, b) $S_{ef} = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=0}^{6} s_k^2}{7}} \doteq 0{,}707$.

Výpočet z vzorce (6.15): pro oba signály vyjde

$$S_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}707 .$$

r 6.7. Určete kosinovou a sinovou složku signálů z př.6.1 (viz vzorec 6.17).

þ *Řešení*:

a) Signál je roven své kosinové složce.

b) $s(k) = \sin\left(k.\dfrac{2\pi}{7} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\left(k.\dfrac{2\pi}{7} - 0{,}7\pi\right) =$

$= \cos(0{,}7\pi)\cos\left(k.\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin(0{,}7\pi)\sin\left(k.\dfrac{2\pi}{7}\right) \doteq -0{,}588\cos\left(k.\dfrac{2\pi}{7}\right) + 0{,}809\sin\left(k.\dfrac{2\pi}{7}\right).$

r 6.8. Rozložte signály z př.6.1 na dva proti sobě rotující vektory (viz vzorec 6.19).

þ *Řešení*:

a) $s(k) = 0{,}5e^{j0}e^{jk\frac{\pi}{6}} + 0{,}5e^{-j0}e^{-jk\frac{\pi}{6}}$.

b) $s(k) = 0{,}5e^{-j0{,}2\pi}e^{jk2\frac{\pi}{7}} + 0{,}5e^{j0{,}2\pi}e^{-jk2\frac{\pi}{7}}$.

r 6.9. Vypočtěte komplexní koeficienty Fourierovy řady diskrétních periodických signálů s_1 a s_2 z př.6.1 (viz vzorec 6.25) a amplitudy a počáteční fáze jejich diskrétních harmonických složek (vzorce 6.26 a 6.27).

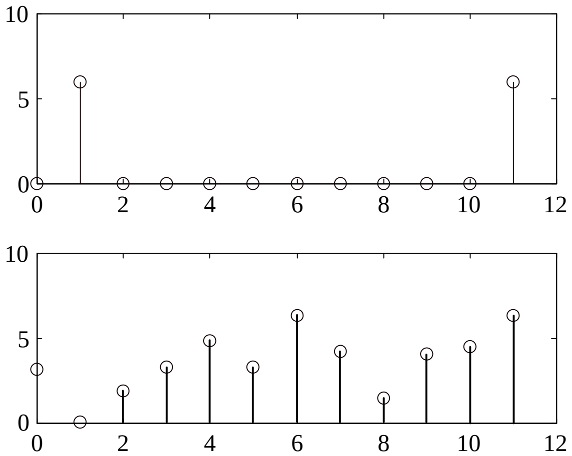
þ *Řešení*:

Výpočet můžeme provést ručně nebo pomocí některého z programů, například MATLABu.

- Ukázka řešení MATLABem:

a)

```
k=0:11;                          % zadání hodnot nezávisle proměnné diskrétního signálu
s=cos(k*pi/6);                   % výpočet vzorků signálu s
x =fft(s)                        % výpočet 12-ti bodové DFT signálu s
x =
Columns 1 through 4
   0.0000             6.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
  Columns 5 through 8
   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
  Columns 9 through 12
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   6.0000 + 0.0000i
subplot(2,1,1);stem(k,abs(x))    % vykreslení modulů koeficientů DFT ve formě úseček;
                                   k vykreslení dojde v horním ze dvou obrázků
subplot(2,1,2);stem(k,phase(x))  % vykreslení argumentů koeficientů DFT ve formě úseček;
                                   k vykreslení dojde v spodním ze dvou obrázků
```



Obr.6.6. Výstup MATLABu: Fourierovy koeficienty (nahoře modul, dole fáze v radiánech).

Z výsledků plyne, že nenulové jsou pouze Fourierovy koeficienty

$\hat{X}(1) = \hat{X}(11) = 6$

(číslování polí v MATLABu je od jedničky do 12, kdežto naše číslování je od nuly do 11). Argumenty obou koeficientů jsou nulové, resp. $2p$ radiánů. Argumenty nulových koeficientů jsou náhodná čísla vzniklá vlivem zaokrouhlovacích chyb při výpočtu z prakticky nulových reálných i imaginárních složek koeficientů.

Z rovnice (6.27) pak vyplývá, že stejnosměrná složka signálu je 0 a amplituda 1.harmonické je

$$\frac{2}{N}\left|\hat{X}(1)\right| = 1\,,$$

což je v pořádku, protože analyzovaný signál je harmonický o amplitudě 1.

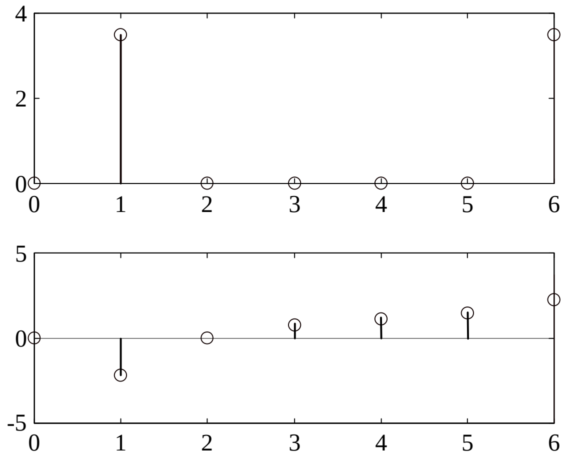
:

b)

```
k=0:6;
s=sin(k*2*pi/7-pi/5);
x=fft(s)
x =
  Columns 1 through 4
        0            -2.0572 - 2.8316i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  Columns 5 through 7
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -2.0572 + 2.8316i
```

Nenulové jsou pouze koeficienty $\overset{\circ}{X}(1)$ a $\overset{\circ}{X}(6)=\overset{\circ}{X}^*(1)$. Zjistíme jejich moduly a argumenty:

```
abs(x)
ans =
        0    3.5000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    3.5000
phase(x)
ans =
        0   -2.1991   -0.0078    0.7309    1.1014    1.4834    2.1991
subplot(2,1,1);stem(k,abs(x))
subplot(2,1,2);stem(k,phase(x))
```



Obr.6.7. Fourierovy koeficienty (modul + fáze).

Z rovnic (6.26) a (6.27) plyne, že modul 3,5 je třeba násobit číslem 2/*N*=2/7, abychom získali amplitudu 1.harmonické. Je tedy 2/7 . 3,5 = 1.

Počáteční fáze 1.harmonické je rovna argumentu koeficientu $\overset{\circ}{X}(1)$, tj. -2,1991 rad nebo -126°. Argumenty ostatních koeficientů jsou opět náhodná čísla vzniklá vlivem zaokrouhlovacích chyb.

r 6.10. Měřením byly zjištěny následující vzorky periodického diskrétního signálu (v tabulce jsou uvedeny vzorky z 1 periody):

k	$s(k)$
0	1,1234
1	-0,0238
2	0,9653
3	-1,7593
4	-0,2987
5	1,1209

Pomocí algoritmu DFT (FFT) zjistěte, z jakých harmonických složek se signál skládá.

þ ***Řešení*:**

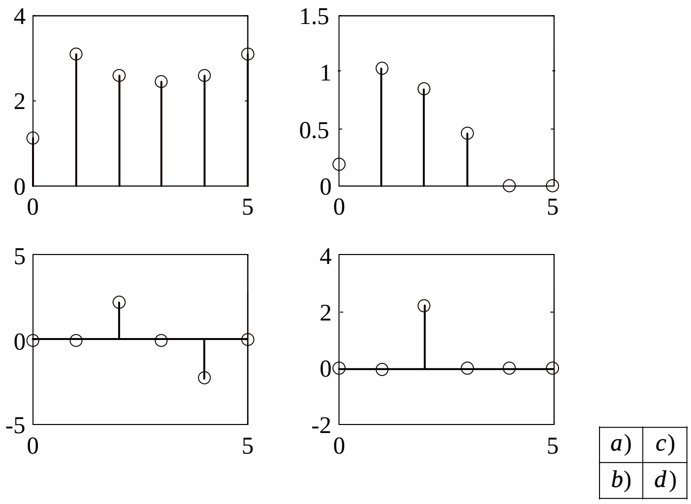
Opakovací perioda $N = 6$.

- Výpočet koeficientů Fourierovy řady (výpis programu z MATLABu):

```
k=0:5;
s=[1.1234 -0.0238 0.9653 -1.7593 -0.2987 1.1209];
x=fft(s)
x =                                                     % výstup koeficientů FFT
  Columns 1 through 4
   1.1278          3.0979 - 0.1033i  -1.5178 + 2.0860i   2.4522 - 0.0000i
  Columns 5 through 6
  -1.5177 - 2.0860i   3.0980 + 0.1033i
abs(x)/3                                                % amplitudy 2/N |X(k)|
ans =
    0.3759    1.0332    0.8599    0.8174    0.8599    1.0332
phase(x)                                                % fáze arg(X(k)) [rad]
ans =
         0   -0.0333    2.1998    0.0000   -2.1998    0.0333
m=abs(x);p=phase(x);
subplot(221);stem(k,m)
subplot(223);stem(k,p)
modul=m/3;modul(5:6)=zeros(2,1);modul(1)=m(1)/6; modul(4)=m(4)/6;
faze=p;faze(5:6)=zeros(2,1);
subplot(222);stem(k,modul)
subplot(224);stem(k,faze)
```

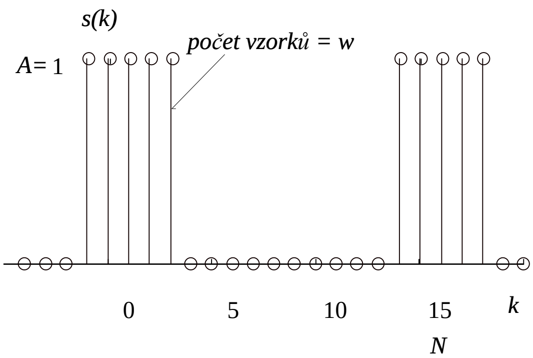
Zápis diskrétního signálu z harmonických složek - viz vzorec (6.27):

$$s(k) = 0{,}188 + 1{,}0332\cos\left(k\frac{p}{3} - 0{,}0333\right) + 0{,}8599\cos\left(k\frac{2p}{3} + 2{,}1998\right) + 0{,}4087(-1)^k \, .$$



Obr.6.8. Výstup z MATLABu: a), b): moduly a argumenty koeficientů DFT; c), d): redukované amplitudové a fázové spektrum.

r 6.11. Určete koeficienty Fourierovy řady periodického obdélníkového signálu na obr.6.9. Z koeficientů vypočtěte amplitudy a počáteční fáze harmonických složek.



Obr.6.9. Diskrétní obdélníkový signál.

þ *Řešení*:

$$\tilde{X}(n) = \sum_{k\in N} s(k) e^{-jkn\frac{2p}{N}} = \sum_{k=-\frac{w-1}{2}}^{\frac{w-1}{2}} A e^{-jkn\frac{2p}{N}} = A e^{-j\left(-\frac{w-1}{2}\right)n\frac{2p}{N}} \frac{1-e^{-jwn\frac{2p}{N}}}{1-e^{-jn\frac{2p}{N}}} =$$

$$= A e^{-j\left(-\frac{w-1}{2}\right)n\frac{2p}{N}} \frac{e^{-jwn\frac{p}{N}}}{e^{-jn\frac{p}{N}}} \frac{e^{jwn\frac{p}{N}} - e^{-jwn\frac{p}{N}}}{e^{jn\frac{p}{N}} - e^{-jn\frac{p}{N}}} = A \frac{\sin\left(pw\frac{n}{N}\right)}{\sin\left(p\frac{n}{N}\right)}, n \neq 0.$$

Při úpravě byl použit vzorec pro součet konečné geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k q^k = a_0 \frac{1-q^N}{1-q}.$$

Pro $n = 0$ vychází

$$\tilde{X}(0) = \sum_{k \in N} s(k) = A\omega \, .$$

Proto můžeme výsledek zapsat v jediném tvaru

$$\tilde{X}(n) = A\omega \frac{\operatorname{sinc}\left(\pi\omega \frac{n}{N}\right)}{\operatorname{sinc}\left(\pi \frac{n}{N}\right)} \, . \tag{6.52}$$

Dosadíme konkrétní hodnoty:

$$\tilde{X}(n) = 5 \frac{\operatorname{sinc}\left(\pi \frac{n}{3}\right)}{\operatorname{sinc}\left(\pi \frac{n}{15}\right)}$$

a vypočteme a zapíšeme do tabulky spolu s amplitudami harmonických složek určenými z rovnice (6.26):

n	$\tilde{X}(n)$	$X(n)$	φ_n [rad]	S_n
0	5	5	0	0,3333
1	4,1654	4,1654	0	0,5554
2	2,1292	2,1292	0	0,2839
3	0	0	x	0
4	-1,1654	1,1654	π	0,1554
5	-1	1	π	0,1333
6	0	0	x	0
7	0,8708	0,8708	0	0,1161
8	0,8708	0,8708	0	-
9	0	0	x	-
10	-1	1	π	-
11	-1,1654	1,1654	π	-
12	0	0	x	-
13	2,1292	2,1292	0	-
14	4,1654	4,1654	0	-

Redukovaný tvar Fourierovy řady:

$$s(k) \approx 0{,}3333 + 0{,}5554\cos(k.2\pi/15) + 0{,}2839\cos(k.4\pi/15) + 0{,}1554\cos(k.8\pi/15 + \pi) +$$
$$+ 0{,}1333\cos(k.10\pi/15 + \pi) + 0{,}1161\cos(k.14\pi/15).$$

- Ukázka řešení pomocí MATLABu:

```
s=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1];      %   zápis jedné periody signálu; první vzorek je nyní
                                            nutno zvolit s indexem 0 (při ručním odvození jsme
                                            jako první zvolili vzorek č. -2), protože MATLAB
                                            vyhodnotí tento vzorek jako počátek signálu.
x=fft(s,15)

x =

  Columns 1 through 4

   5.0000            4.1654 - 0.0000i   2.1292 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
```

Columns 5 through 8

-1.1654 + 0.0000i -1.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.8708 - 0.0000i

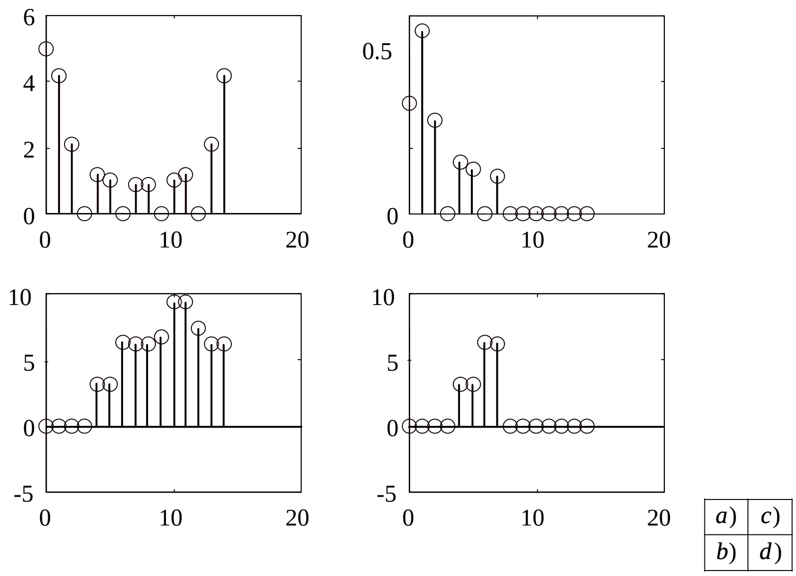
Columns 9 through 12

 0.8708 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i -1.0000 + 0.0000i -1.1654 + 0.0000i

Columns 13 through 15

 0.0000 + 0.0000i   2.1292 + 0.0000i   4.1654 + 0.0000i

Následují příkazy pro výpočet redukovaného spektra a kreslení obr. 6.10, které jsou obdobné jako v příkladu 6.10.



Obr.6.10. Výstup z MATLABu: a), b): moduly a argumenty koeficientů DFT; c), d): redukované amplitudové a fázové spektrum.

& ***<u>Poznatek z příkladu</u>*:**

Vzorec pro výpočet Fourierových koeficientů periodického obdélníkového signálu má v případě diskrétního signálu jiný tvar než u signálu souvislého v čase. Vzorec (6.52) *není univerzální, platí jen pro lichý počet vzorků v šířce impulsu* w.

r **6.12.** Uvažujme dva signály s_1 a s_2 se stejnou opakovací periodou $N = 5$. V rámci jedné periody platí:

$s_1 = [1\,2\,-1\,0\,3]$, $s_2 = [-1\,3\,2\,1\,1]$.

Vypočtěte vzájemnou energii a vzájemný výkon obou signálů v rámci jedné opakovací periody.

þ ***Řešení*:**

Použijeme vzorce (6.11) a (6.12)

$$W_{12} = W_{21} = 1.(-1) + 2.3 + (-1).2 + 0.1 + 3.1 = 6\ \mathrm{J},$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{W_{12}}{N} = \frac{6}{5} = 1{,}2\ \mathrm{W}.$$

Signály nejsou ortogonální, jejich vzájemná energie není nulová. K ortogonalitě by například došlo v případě

$$s_1 = [1\,2\,-1\,0\,3],\ s_2 = [-1\,3\,2\,1\,-1].$$

r 6.13. Ověřte platnost Parsevalova teorému na signálu s_1 z př.6.12.

þ *Řešení*:

Energii signálu s_1 za 1 periodu určíme snadno z jeho vzorků (vzorec 6.36):

$W = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 15\,\text{J}.$

Stejný výsledek musíme dostat z Fourierových koeficientů signálu (viz vzorec 6.36).

: Ukázka řešení v MATLABu:

```
s=[1 2 -1 0 3];       % definice signálu
x=fft(s);             % výpočet jeho Fourierových koeficientů
w=(norm(x))^2/5       % výpočet energie; funkce norm(x) počítá druhou odmocninu ze součtu
                        druhých mocnin modulů všech prvků vektoru x

w =

  15.0000
```

r 6.14. Určete cyklickou konvoluci s_3 periodických signálů s_1 a s_2 z př.6.12

$$s_1 = [1\,2\,-1\,0\,3],\ s_2 = [-1\,3\,2\,1\,1].$$

þ *Řešení*:

(definice cyklické konvoluce viz vzorec 6.35)

$$s_3(k) = s_1(k) \otimes s_2(k) = \sum_{i \in N} s_1(i) s_2(k-i)\,.$$

Výpočty uspořádáme do tabulek pro $k = 0, 1, 2, 3$ a 4. Z principu výpočtu vyplyne, že cyklická konvoluce je periodická se stejnou periodou jako je perioda signálů s_1 a s_2.

$k = 0$:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(i)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(-i)$	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3
$s_1(i)s_2(-i)$	-1	2	-1	0	9	-1	2	-1	0	9	-1	2	-1	0	9
$\sum = s_3(0)$						-1+2-1+0+9=9									

$k = 1$:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(i)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(1-i)$	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2
$s_1(i)s_2(1-i)$	3	-2	-1	0	6	3	-2	-1	0	6	3	-2	-1	0	6
$\sum = s_3(1)$						3-2-1+0+6=6									

k = 2:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(i)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(2-i)$	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1
$s_1(i)s_2(2-i)$	2	6	1	0	3	2	6	1	0	3	2	6	1	0	3
$\sum = s_3(2)$						2+6+1+0+3=12									

k = 3:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(i)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(3-i)$	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1
$s_1(i)s_2(3-i)$	1	4	-3	0	3	1	4	-3	0	3	1	4	-3	0	3
$\sum = s_3(3)$						1+4-3+0+3=5									

k = 4:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(i)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(4-i)$	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1	1	1	2	3	-1
$s_1(i)s_2(4-i)$	1	2	-2	0	-3	1	2	-2	0	-3	1	2	-2	0	-3
$\sum = s_3(4)$						1+2-2+0-3=-2									

Závěr:

Cyklická konvoluce signálů s_1 a s_2 je periodická s periodou N = 5. Jedna perioda je dána vzorky $s_3 = [9\ 6\ 12\ 5\ -2]$.

r 6.15. Ověřte na signálech z př.6.14 platnost poučky (6.35), která říká, že Fourierovy koeficienty cyklické konvoluce dvou signálů jsou rovny součinu Fourierových koeficientů těchto signálů.

þ *Řešení*:

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 2 -1 0 3];
s2=[-1 3 2 1 1];
s3=[9 6 12 5 -2];
x1=fft(s1)
x1 =
  Columns 1 through 4
   5.0000            3.3541 + 1.5388i  -3.3541 - 0.3633i  -3.3541 + 0.3633i
  Column 5
```

```
  3.3541 - 1.5388i
x2=fft(s2)
x2 =
  Columns 1 through 4
  6.0000          -2.1910 - 2.4899i  -3.3090 - 0.2245i  -3.3090 + 0.2245i
  Column 5
  -2.1910 + 2.4899i
x3=fft(s3)
x3 =
  Columns 1 through 4
  30.0000          -3.5172 -11.7229i  11.0172 + 1.9551i  11.0172 - 1.9551i
  Column 5
  -3.5172 +11.7229i
x1.*x2
ans =
  Columns 1 through 4
  30.0000          -3.5172 -11.7229i  11.0172 + 1.9551i  11.0172 - 1.9551i
  Column 5
  -3.5172 +11.7229i
```

r **6.16.** Vypočtěte cyklickou konvoluci s_3 signálů s_1 a s_2 z př.6.14.

$$s_1 = [1\,2\,-1\,0\,3],\ s_2 = [-1\,3\,2\,1\,1]$$

pomocí přímé a inverzní Fourierovy transformace.

þ ***Řešení*:**

Z (6.35) plyne, že cyklickou konvoluci dvou signálů s_1 a s_2 můžeme určit takto:

1. Vypočteme Fourierovy koeficienty signálů x_1 a x_2 pomocí DFT (vzorec 6.25).
2. Vynásobením koeficientů dostaneme Fourierovy koeficienty cyklické konvoluce (vzorec (6.35).
3. Z Fourierových koeficientů určíme signál - konvoluci- inverzní DFT (vzorec 6.24).

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 2 -1 0 3];          % definice signálu s1
s2=[-1 3 2 1 1];          % definice signálu s2
x1=fft(s1);               % Fourierovy koeficienty signálu s1
x2=fft(s2);               % Fourierovy koeficienty signálu s2
x3=x1.*x2;                % Fourierovy koeficienty cyklické konvoluce
s3=real(ifft(x3))         % cyklická konvoluce
s3 =
9.0000    6.0000   12.0000   5.0000   -2.0000
```

r 6.17. Signály s_1 a s_2 jsou podrobeny cyklické konvoluci, vznikne signál s_3. Známe pouze signály s_1 a s_3 (zapsány jsou vzorky z 1 periody):

$s_1 = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$, $s_3 = [0 \quad 0{,}5 \quad 1{,}4 \quad 2{,}5 \quad 3{,}5]$.

Určete signál s_2.

þ *Řešení*:

Úkol nalezení původního signálu, jehož konvoluce se známým jiným signálem je rovněž známa, je v praxi řešen velmi často (tzv. dekonvoluce). S využitím poučky (6.35) můžeme použít tento postup:

1. Algoritmem DFT vypočteme Fourierovy koeficienty signálů s_1 ($\hat{X}_1$) a s_3 ($\hat{X}_3$).
2. Z (6.35) vypočteme Fourierovy koeficienty signálu s_2:
   $\hat{X}_2 = \hat{X}_3 / \hat{X}_1$.
3. Algoritmem zpětné DFT vypočteme vzorky signálu s_2.

: Ukázka řešení MATLABem:

```
s1=[0 1 2 3 4];s3=[0 0.5 1.4 2.5 3.5];    % zadání signálů s1 a s3
x1=fft(s1);x3=fft(s3);                    % výpočet Fourierových koeficientů signálů s1 a s3
x2=x3./x1;                                % výpočet Fourierových koeficientů signálu s2
real(ifft(x2))                            % výpočet vzorků signálu s2
ans =
0.8580   0.0580   -0.0220   -0.0620   -0.0420
```

ü *Výsledek*:

$s_2 = [0{,}858 \quad 0{,}058 \quad -0{,}022 \quad -0{,}062 \quad -0{,}042]$.

r 6.18. Vypočtěte vzájemnou korelační funkci $R_{12}(m)$ signálů s_1 a s_2 z př.6.12 (viz vzorec 6.40):

$s_1 = [1\,2 - 1\,0\,3]$, $s_2 = [-1\,3\,2\,1\,1]$.

þ *Řešení*:

$$R_{12}(m) = \frac{1}{N}\sum_{k \in N} s_1(k) s_2(k+m) = 0{,}2\sum_{k=0}^{4} s_1(k) s_2(k+m).$$

Výpočty uspořádáme do tabulek pro $m = 0, 1, 2, 3$ a 4. Z principu výpočtu vyplyne, že vzájemná korelační funkce je periodická se stejnou periodou jako je perioda signálů s_1 a s_2.

$m = 0$:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(k)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(k)$	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1
$s_1(k)s_2(k)$	-1	6	-2	0	3	-1	6	-2	0	3	-1	6	-2	0	3
$0{,}2\sum = R_{12}(0)$						0,2(-1+6-2+0+3)= =1,2									

m = 1:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(k)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(k+1)$	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1
$s_1(k)s_2(k+1)$	3	4	-1	0	-3	3	4	-1	0	-3	3	4	-1	0	-3
$0{,}2\sum = R_{12}(1)$						0,2(3+4-1+0-3)= =0,6									

m = 2:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(k)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(k+2)$	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3
$s_1(k)s_2(k+2)$	2	2	-1	0	9	2	2	-1	0	9	2	2	-1	0	9
$0{,}2\sum = R_{12}(2)$						0,2(2+2-1+0+9)= =2,4									

m = 3:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(k)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(k+3)$	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2
$s_1(k)s_2(k+3)$	1	2	1	0	6	1	2	1	0	6	1	2	1	0	6
$0{,}2\sum = R_{12}(3)$						0,2(1+2+1+0+6)= =2									

m = 4:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_1(k)$	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3
$s_2(k+4)$	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1	1	-1	3	2	1
$s_1(k)s_2(k+4)$	1	-2	-3	0	3	1	-2	-3	0	3	1	-2	-3	0	3
$0{,}2\sum = R_{12}(4)$						0,2(1-2-3+0+3)= =-0,2									

& **Poznatky z příkladu**:

Vzájemná korelační funkce R_{12} signálů s_1 a s_2 je periodická s periodou N = 5. Jedna perioda je dána vzorky

$$R_{12}=[6 \quad 3 \quad 12 \quad 10 \quad -1]/5=[1{,}2 \quad 0{,}6 \quad 2{,}4 \quad 2 \quad -0{,}2].$$

Maximální prvek vektoru 2,4 je prvek č. 2. Znamená to, že posuneme-li signál s_2 o dva vzorky doleva, bude mít spolu se signálem s_1 největší vzájemný výkon (z energetického hlediska se budou jeden druhému nejvíce podobat).

r **6.19.** Nalezněte Fourierovy koeficienty vzájemné korelační funkce R_{12} z př.6.18. Ověřte platnost poučky (6.44).

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 2 -1 0 3];            % definice signálu s1
s2=[-1 3 2 1 1];            % definice signálu s2
r=[1.2 0.6 2.4 2 -0.2];     % definice korelační funkce R12
x1=fft(s1);                 % výpočet Fourierových koeficientů signálu s1
x2=fft(s2);                 % výpočet Fourierových koeficientů signálu s2
xr=fft(r)                   % výpočet Fourierových koeficientů korelační funkce
xr =
  Columns 1 through 4
   6.0000          -2.2361 - 0.9960i   2.2361 - 0.0898i   2.2361 + 0.0898i
  Column 5
  -2.2361 + 0.9960i
conj(x1).*x2/5              % součin komplexně sdružených Fourierových koeficientů
                              signálu s1 a Fourierových koeficientů signálu s2 lomeno
                              počet vzorků (vzorec 6.44)
ans =
  Columns 1 through 4
   6.0000          -2.2361 - 0.9960i   2.2361 - 0.0898i   2.2361 + 0.0898i
  Column 5
  -2.2361 + 0.9960i
```

r **6.20.** Vypočtěte vzájemnou korelační funkci signálů s_1 a s_2 z př.6.12

$$s_1 = \left[1\,2\,-1\,0\,3\right],\ s_2 = \left[-1\,3\,2\,1\,1\right]$$

pomocí algoritmů DFT a IDFT.

þ ***Řešení*:**

Z rovnic (6.43) a (6.44) vyplývá následující postup:

1. Vypočteme Fourierovy koeficienty signálů s_1 a s_2 pomocí DFT (vzorec 6.25).
2. Komplexně sdružené koeficienty signálu s_1 vynásobíme koeficienty signálu s_2 a vydělíme počtem vzorků (viz vzorec 6.44). Dostaneme Fourierovy koeficienty vzájemné korelační funkce.
3. Vzájemnou korelační funkci získáme zpětnou Fourierovou transformací (vzorec 6.24).

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 2 -1 0 3];            % definice signálu s1
s2=[-1 3 2 1 1];            % definice signálu s2
x1=fft(s1);                 % výpočet Fourierových koeficientů signálu s1
x2=fft(s2);                 % výpočet Fourierových koeficientů signálu s2
xr=conj(x1).*x2/5;          % výpočet Fourierových koeficientů vzájemné korelační
                              funkce R12 (vzorec 6.44)
r=real(ifft(xr))            % výpočet vzájemné korelační funkce R12
r =
```

1.2000   0.6000   2.4000   2.0000   -0.2000

r 6.21. Ze signálů s_1 a s_2 je počítána vzájemná korelační funkce R_{12}. Známe pouze signál s_1 a korelační funkci (zapsány jsou vzorky z 1 periody):

$s_1 = [1 \quad 12 \quad -3 \quad 5 \quad -2 \quad 3 \quad -5 \quad 7]$,

$R_{12} = [8{,}4 \quad 13 \quad 0{,}2 \quad 3{,}8 \quad -0{,}6 \quad 6 \quad -0{,}8 \quad 14{,}5]$.

Určete signál s_2.

þ *Řešení*:

Je třeba nalézt původní signál, jehož korelace se známým jiným signálem je rovněž známa (tzv. dekorelace). S využitím vzorce (6.44) můžeme použít tento postup:

1. Algoritmem DFT vypočteme Fourierovy koeficienty signálů s_1($\hat{X}_1$) a R_{12}($\hat{X}_R$).
2. Z (6.44) vypočteme Fourierovy koeficienty signálu s_2:
   $\hat{X}_2 = N\,\hat{X}_R / \hat{X}_1^*$.
3. Algoritmem zpětné DFT vypočteme vzorky signálu s_2.

: Ukázka řešení MATLABem:

```
s1=[1 12 -3 5 -2 3 -5 7];                 % zadání signálu s1
R=[8.4 13 0.2 3.8 -0.6 6 -0.8 14.5];      % zadání vzájemné korelační funkce
x1=fft(s1);x3=fft(R);                     % výpočet Fourierových koeficientů s1 a R
x2=8*x3./conj(x1);                        % výpočet Fourierových koeficientů s2
s2=real(ifft(x2))                         % výpočet vzorků s2
s2 =
9.9622   4.9786   2.5215   1.1852   0.5648   0.3695   0.1849   0.0111
```

Signál s_2 je tedy ve tvaru

$s_2 = [9{,}9622 \quad 4{,}9786 \quad 2{,}5215 \quad 1{,}1852 \quad 0{,}5648 \quad 0{,}3695 \quad 0{,}1849 \quad 0{,}0111]$.

r 6.22. Vypočtěte autokorelační funkce $R_1(m)$ a $R_2(m)$ signálů s_1 a s_2 z př.6.12 (viz vzorec 6.45):

$s_1 = [1\,2 -1\,0\,3]$, $s_2 = [-1\,3\,2\,1\,1]$.

þ *Řešení*:

$$R(m) = \frac{1}{N}\sum_{k \in N} s(k)s(k+m) = 0{,}2\sum_{k=0}^{4} s(k)s(k+m).$$

a)

$R_1(0) = 0{,}2[1.1 + 2.2 + (-1)(-1) + 3.3] = 3$,

$R_1(1) = 0{,}2[1.2 + 2.(-1) + (-1).0 + 0.3 + 3.1] = 0{,}6$,

$R_1(2) = 0{,}2[1.(-1) + 2.0 + (-1).3 + 0.1 + 3.2] = 0{,}4$,

$R_1(3) = 0{,}2[1.0 + 2.3 + (-1).1 + 0.2 + 3.(-1)] = 0{,}4$

$R_1(4)=0{,}2[1.3+2.1+(-1).2+0.(-1)+3.0]=0{,}6$.

Proto

$R_1=[3 \quad 0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$.

Nultý člen R_1 je největší ze všech a udává kvadrát efektivní hodnoty signálu s_1 (viz vzorec 6.47).

b)

$R_2(0)=0{,}2[(-1)(-1)+3.3+2.2+1.1+1.1]=3{,}2$,

$R_2(1)=0{,}2[(-1).3+3.2+2.1+1.1+1.(-1)]=1$,

$R_2(2)=0{,}2[(-1).2+3.1+2.1+1.(-1)+1.3]=1$,

$R_2(3)=0{,}2[(-1).1+3.1+2.(-1)+1.3+1.2]=1$,

$R_2(4)=0{,}2[(-1).1+3.(-1)+2.3+1.2+1.1]=1$.

Proto

$R_2=[3{,}2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$.

Nultý člen R_2 je největší ze všech a udává kvadrát efektivní hodnoty signálu s_2 (viz vzorec 6.47).

r **6.23.** Nalezněte Fourierovy koeficienty autokorelačních funkcí R_1 a R_2 z př.6.22. Ověřte platnost poučky (6.49).

: Řešení pomocí MATLABu:

a)

```
s1=[1 2 -1 0 3];              % definice signálu s1
x1=fft(s1);                   % výpočet Fourierových koeficientů signálu s1
r1=[3 0.6 0.4 0.4 0.6];       % definice autokorelační funkce signálu s1
fft(r1)                       % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
ans =
  Columns 1 through 4
   5.0000           2.7236 - 0.0000i   2.2764 - 0.0000i   2.2764 - 0.0000i
  Column 5
   2.7236 + 0.0000i
(abs(x1)).^2/5                % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
                              z vzorce (6.49)
ans =
    5.0000    2.7236    2.2764    2.2764    2.7236
```

Autokorelační funkce se tedy dá zapsat podle (6.24) a (6.50):

$$R_1(m)=\frac{1}{5}\left[5+2{,}7236e^{jm\frac{2p}{5}}+2{,}2764e^{jm.2\frac{2p}{5}}+2{,}2764e^{jm.3\frac{2p}{5}}+2{,}7236e^{jm.3\frac{2p}{5}}\right]=$$

$$=1+1{,}08944\cos(0{,}4p\, m)+0{,}91056\cos(0{,}8p\, m).$$

b)

```
s2=[-1 3 2 1 1];              % definice signálu s2
x2=fft(s2);                   % výpočet Fourierových koeficientů signálu s2
r2=[3.2 1 1 1 1];             % definice autokorelační funkce signálu s2
fft(r2)                       % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
ans =
  Columns 1 through 4
   7.2000            2.2000 - 0.0000i   2.2000 - 0.0000i   2.2000 - 0.0000i
  Column 5
   2.2000 + 0.0000i
(abs(x2)).^2/5                % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
                                z vzorce (6.49)
ans =
    7.2000    2.2000    2.2000    2.2000    2.2000
```

Autokorelační funkce se tedy dá zapsat podle (6.24) a (6.50):

$$R_2(m)=\frac{1}{5}\left[7{,}2+2{,}2e^{jm\frac{2p}{5}}+2{,}2e^{jm.2\frac{2p}{5}}+2{,}2e^{jm.3\frac{2p}{5}}+2{,}2e^{jm.3\frac{2p}{5}}\right]=$$

$$=1{,}44+0{,}88\cos(0{,}4p\ m)+0{,}88\cos(0{,}8p\ m).$$

r 6.24. Vypočtěte autokorelační funkce signálů s_1 a s_2 z př.6.12

$s_1=[1\,2\,-1\,0\,3]$, $s_2=[-1\,3\,2\,1\,1]$

pomocí algoritmů DFT a IDFT.

þ *Řešení*:

Z rovnic (6.48) a (6.49) vyplývá následující postup výpočtu autokorelační funkce signálu *s*:

1. Vypočteme Fourierovy koeficienty signálu s pomocí DFT (vzorec 6.25).
2. Druhé mocniny modulů koeficientů vydělíme počtem vzorků (viz vzorec 6.49). Dostaneme Fourierovy koeficienty autokorelační funkce.
3. Autokorelační funkci získáme zpětnou Fourierovou transformací (vzorec 6.24).

: Řešení pomocí MATLABu:

```
s1=[1 2 -1 0 3];              % definice signálu s1
s2=[-1 3 2 1 1];              % definice signálu s2
x1=fft(s1);                   % výpočet Fourierových koeficientů signálu s1
x2=fft(s2);                   % výpočet Fourierových koeficientů signálu s2
xr1=(abs(x1)).^2/5;           % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
                                R1 (vzorec 6.49)
xr2=(abs(x2)).^2/5;           % výpočet Fourierových koeficientů autokorelační funkce
                                R2 (vzorec 6.49)
r1=real(ifft(xr1))            % výpočet autokorelační funkce R1
r1 =
```

```
3.0000   0.6000   0.4000   0.4000   0.6000
r2=real(ifft(xr2))                    % výpočet autokorelační funkce R2
r2 =
3.2000   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000
```