

4. NÁHODNÉ PROCESY

4.1. NÁHODNÉ PROCESY SE SPOJITÝM ČASEM

Při popisu dynamických jevů náhodných dějů je potřebné tento děj vyjádřit většinou jako funkci reálného času nebo tzv. operačního času. Touto funkcí je míněna obecná číselná posloupnost jako např. posloupnost pořadových čísel pokusů. K vyjádření takového dynamicky se měnícího náhodného děje se používá pojmu *náhodný proces*.

Náhodný proces $X(t)$ je funkce, jejíž hodnota je při dané hodnotě argumentu t *náhodnou veličinou*. Náhodný proces popisujeme tedy jednak jako náhodnou veličinu X , v daném čase t (pravděpodobnostní přístup), jednak jako průběh signálu $X(t)$ v čase (statistický přístup).

Při pravděpodobnostním přístupu používáme stejného aparátu jako pro popis náhodné veličiny. Maximální informaci ze statistického hlediska nám poskytují *distribuční funkce a funkce hustoty pravděpodobnosti*.

Náhodný proces může nabývat buď spojitě jakékoli hodnoty x z určitého intervalu nebo pouze hodnoty diskrétní, např. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Podle toho rozlišujeme náhodné procesy na procesy se spojitými stavy a na procesy s diskrétními stavy.

Distribuční funkce $F(x, t)$ náhodného procesu $X(t)$ se spojitými a diskrétními hodnotami jsou definovány vztahy:

$$F(x, t) = P\{X(t) < x\} = \int_{-\infty}^x p(x, t) dx, \quad (4.1a)$$

$$F(x, t) = P\{X(t) < x_i\} = \sum_{j=1}^i P(X(t) = x_j). \quad (4.1b)$$

kde $P\{X(t) < x\}$ označuje pravděpodobnost toho, že náhodný proces $X(t)$ nabude v okamžiku t hodnoty menší než x . Index i určuje i -tou diskrétní hodnotu. Distribuční funkce je neklesající funkce a platí:

$$F(-\infty, t) = 0, \quad F(\infty, t) = 1 \quad (4.2)$$

pro funkci hustoty pravděpodobnosti $p(x, t)$ platí:

$$p(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}, \quad (4.3)$$

pokud tato partiální derivace existuje.

Funkce hustoty pravděpodobnosti splňuje rovnici:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = 1, \quad (4.4a)$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, t) = 1. \quad (4.4b)$$

Číselné charakteristiky:

Slouží pro jednodušší popis náhodných procesů pomocí několika číselných hodnot, jichž tyto procesy v čase t v *průměru* nabývají. Tuto průměrnou hodnotu nazýváme *střední hodnota*.

Střední hodnota $E\{X(t)\}$ náhodného procesu $X(t)$ je definována:

$$E\{X(t)\} = a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx, \quad (4.5a)$$

$$E\{X(t)\} = a(t) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i, t). \quad (4.5b)$$

Určuje střed resp. pomyslné těžiště rozdělení hodnot $X(t)$.

Stupeň rozptýlení hodnot okolo střední hodnoty určují *disperze* $D(t)$ náhodného procesu v čase .

$$D(t) = E\{[X(t) - a(t)]^2\} = E\{X^2(t)\} - a^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 p(x, t) dx, \quad (4.6a)$$

$$D(t) = \sum_{i=1}^n [x_i - a(t)]^2 P(x_i, t), \quad (4.6b)$$

kde

$$E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t) dx. \quad (4.7)$$

Podobně pro náhodný proces s diskrétními hodnotami.

Odmocninu z rozptylu nazýváme směrodatná odchylka σ .

Dvojrozměrný popis náhodného procesu

Budeme-li analyzovat náhodný proces v několika časových okamžicích t_i kde $i=1,2,\dots,n$, získáme systém náhodných veličin, který lze popsat n -rozměrnou distribuční funkcí a n -rozměrnou funkcí hustoty. Zde se v rámci probírané látky omezíme pouze na dvojrozměrný popis.

Dvojrozměrná distribuční funkce a dvojrozměrná funkce hustoty pravděpodobnosti náhodného procesu jsou definovány:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2\}, \quad (4.8)$$

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\mathcal{I}^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\mathcal{I} x_1 \mathcal{I} x_2}, \quad (4.9)$$

kde x_1 a x_2 jsou hodnoty náhodného procesu v časech t_1 a t_2 .

Poznámka: pokud jsou náhodné veličiny $X(t_1)$ a $X(t_2)$ statisticky nezávislé, platí:

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = p(x_1, t_1) p(x_2, t_2) \quad (4.10)$$

Číselné charakteristiky systému dvou náhodných proměnných $X(t_1)$ a $X(t_2)$.

Kromě střední hodnoty a disperze, které můžeme určit pro jednotlivé časové okamžiky t_1 a t_2 podle (4.5) a (4.6), lze určit i charakteristiky udávající míru souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v časech t_1 a t_2 prostřednictvím korelační a kovarianční funkce.

Korelační funkce:

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (4.11a)$$

$$R(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i x_j P(x_i, x_j, t_1, t_2). \quad (4.11b)$$

Kovarianční funkce:

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a(t_1)][X(t_2) - a(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podobně pro náhodný proces s diskrétními hodnotami.

V praxi lze náhodný proces $X(t)$ dostatečně určit množinou možných realizací (viz. obr.4.1) a statisticky jej vyhodnotit jako náhodnou veličinu v jednotlivých časových okamžicích. Mluvíme pak o číselných charakteristikách *na množině realizací*.

Procesy jejichž distribuční funkce a funkce hustoty pravděpodobnosti nezávisí na volbě počátku časové osy se nazývají *stacionární procesy* v užším smyslu. Tato vlastnost se projeví tak, že se v jejich vyjádření již nevyskytuje čas. Pokud jsou na čase nezávislé i střední hodnota a korelační funkce, jedná se o stacionaritu v širším smyslu. Pro náhodný proces se spojitými hodnotami bude tedy platit:

$$E\{X(t)\} = a = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad a \quad (4.13)$$

$$D = E\{[X(t) - a]^2\} = E\{X^2(t)\} - a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a]^2 p(x)dx. \quad (4.14)$$

U dvojrozměrných funkcí a charakteristik se nevyskytují konkrétní časy t_1 a t_2 , ale jejich rozdíl $t_2 - t_1 = t$. Korelační a kovarianční funkce pak budou:

$$R(t) = E\{[X(t)][X(t+t)]\}, \quad (4.15)$$

$$K(t) = E\{[X(t) - a][X(t+t) - a]\} = R(t) - a^2. \quad (4.16)$$

Pro stacionární náhodný proces lze odvodit vztahy:

$$R(0) = E\{X^2(t)\} \quad (4.17)$$

$$R(\infty) = a^2 \quad (4.18)$$

$$R(0) \geq |R(t)|, \quad K(0) \geq |K(t)| \quad (4.19)$$

Připomeňme ještě fyzikální význam některých číselných charakteristik. Je-li náhodný proces napětí nebo proud na zátěži 1Ω , představuje střední hodnota a stejnosměrnou složku, disperze D střední výkon střídavé složky, směrodatná odchylka je rovna efektivní hodnotě střídavé složky náhodného procesu a celkový střední výkon je pak $E\{X^2\}$. Jednotlivé veličiny jsou mezi sebou a s korelační funkcí vázány vztahy (4.6), (4.17) a (4.18).

Ve statistickém přístupu popisujeme náhodný proces charakteristikami vypočtenými z časového průběhu signálu.

Střední hodnota, disperze a korelační funkce jsou pro i -tou realizaci náhodného procesu definovány:

$$\mathfrak{X}_i = \langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt, \quad (4.20)$$

$$\mathfrak{B}_i = \langle [x_i(t) - \mathfrak{X}_i]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_i(t) - \mathfrak{X}_i]^2 dt, \quad (4.21)$$

$$\mathfrak{R}_i(t) = \langle x_i(t)x_i(t+t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t)x_i(t+t) dt. \quad (4.22)$$

Jestliže se jedná o proces stacionární a platí $\mathfrak{X}_i = a$, $\mathfrak{B}_i = D$, $\mathfrak{R}_i(t) = R(t)$, pro $i=1,2,\dots,n$ (viz. (4.13), (4.14) a (4.15)) a n je počet realizací, je proces navíc tzv. *ergodický*.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že u ergodického procesu mají všechny realizace stejné výše uvedené číselné charakteristiky, lze k jejich určení použít vztahy (4.20), (4.21) a (4.22), v nichž nemusíme uvádět index i .

Pro orientační odhad bychom v uvedených vztazích mohli vyjít z konečného intervalu T a nepočítat limitu pro $T \rightarrow \infty$.

Pokud bychom chtěli určit střední hodnotu obecného procesu jako celku, použili bychom vztah:

$$m = \langle E\{X(t)\} \rangle = \langle a(t) \rangle = E\{\langle X(t) \rangle\} \quad (4.23)$$

Spektrální vlastnosti stacionárního ergodického náhodného procesu se nejčastěji vyjadřují tzv. *spektrální hustotou výkonu* (pokud integrujeme v mezích od $-\infty$ do ∞ , mluvíme o tzv. dvojstranné spektrální hustotě). Ta je svázána s autokorelační funkcí $R(t)$ Wiener-Chinčinovými vztahy:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{a} \quad (4.24)$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.25)$$

Lze ji také určit ze známé spektrální funkce $X_T(\omega)$ realizace $x_T(t)$ procesu. Index T znamená, že pro výpočet byl vzat úsek konečné délky. Důvodem je skutečnost, že náhodný proces je chápán jako signál s nekonečnou energií, který nesplňuje podmínku absolutní integrovatelnosti a tedy pro něj nelze najít přímo Fourierův obraz. Spektrální funkci $X(\omega)$, pak lze najít limitním přechodem $X_T(\omega)$ pro $T \rightarrow \infty$.

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2\pi T} \quad (4.26)$$

Pro spektrální hustotu energie procesu konečné délky pak platí:

$$L_T(\omega) = \frac{|X_T(\omega)|^2}{2\pi T} \quad (4.27)$$

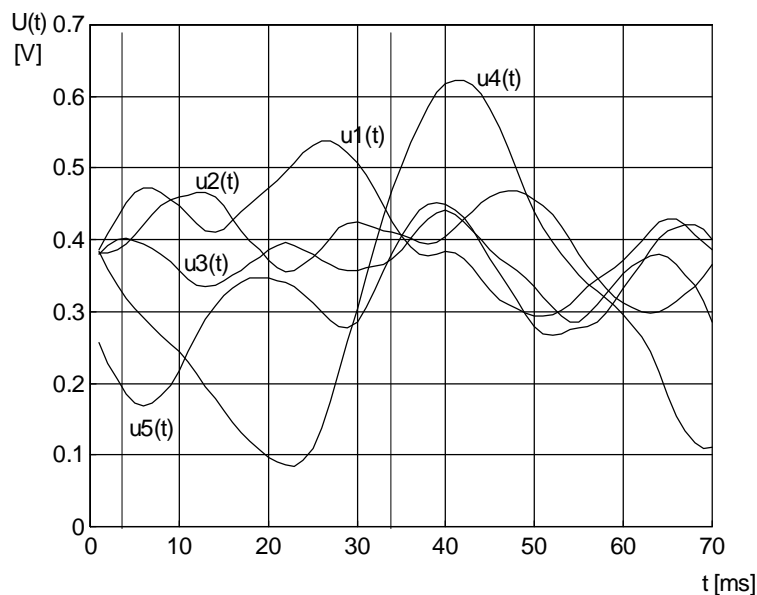
Poznámka: Pokud by proces nebyl ergodický, museli bychom určit spektrální funkce jednotlivých realizací $X_{i,T}(\omega)$, $i=1,2,\dots,n$, a $X_T(\omega)$ určit jako jejich střední hodnotu - obdoba vztahu (4.5). Pak bychom mluvili o spektrální hustotě *středního výkonu*.

Výkon připadající na pásmo úhlových kmitočtů $\omega = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ se určí pomocí integrálu

$$P = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega \quad (4.28)$$

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

- r 4.1.** Výstupy pěti stejných šumových generátorů generujících bílý šum byly připojeny přes dolní propusti s lomovým kmitočtem 100Hz k paměťovému osciloskopu. Na jeho obrazovce byly zaznamenány průběhy na obr.4.1:



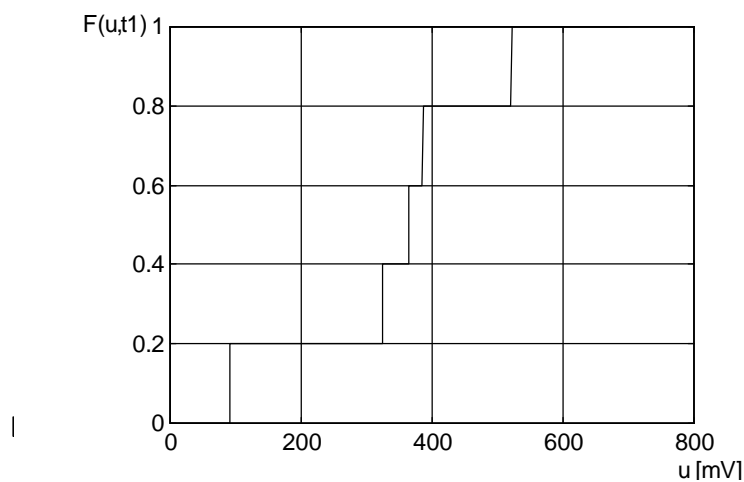
Obr.4.1. Zobrazení pěti realizací náhodného procesu.

Pro řez realizacemi v čase $t_1=24\text{ms}$

1. Nakreslete distribuční funkci $F(u, t_1)$,
2. určete funkci hustoty pravděpodobnosti $p(u, t_1)$,
3. určete střední hodnotu $a(t_1)$
4. určete disperzi $D(t_1)$

p Řešení:

ad 1)



Obr.4.2. Výsledná distribuční funkce $F(u, t_1)$.

$F(u, t_1) = P(U(t_1) < u)$ (viz 4.1a). Budeme-li volit hodnoty u z intervalu od $u \hat{I}$ ($-\infty, 0.1V$) ($u_4(t_1)=0.1V$), bude pravděpodobnost $P(U(t_1) < u) = 0$, neboť žádná z realizací nenabývá v čase t_1 nižší hodnotu než $0.1V$. Zvolíme-li $u = 0.1V$, bude $P(U(t_1) < 0.1V)$ také nulová, neboť podmínka $U(t_1) < 0.1V$ není splněna. Teprve pro $u \hat{I}$ ($0.1V, 0.33V$) je $P(U(t_1) < u) = 1/5$, neboť tato podmínka je splněna pro jednu realizaci $u_4(t)$ z pěti. Stejně bychom mohli pokračovat pro $u \hat{I}$ ($0.33V, 0.365V$) atd.

ad 2)

Funkci hustoty pravděpodobnosti určíme podle (4.3):

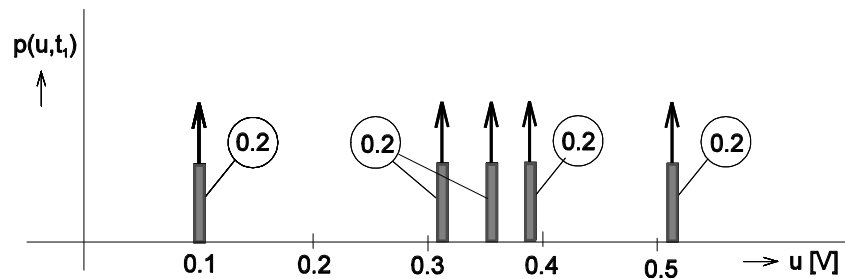
$$p(u, t_1) = \frac{\int F(u, t_1)}{\int u}$$

Nejprve však vyjádříme distribuční funkci jako součet posunutých jednotkových skoků $\underline{1}(u)$:

$$F(u, t_1) = 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.1V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.33V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.36V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.385V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.53V)$$

$$p(u, t_1) = \frac{\int [0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.1V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.33V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.36V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.385V) + 0.2 \cdot \underline{1}(u - 0.53V)]}{\int u} =$$

$$= 0.2 \cdot [d(u - 0.1V) + d(u - 0.33V) + d(u - 0.36V) + d(u - 0.385V) + d(u - 0.53V)]$$



Obr.4.3. Výsledná funkce hustoty pravděpodobnosti aproximovaná Diracovými impulsy.

ad 3)

$$\begin{aligned} a(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u p(u, t_1) dx = \\ &= 0.2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u [d(u - 0.1V) + d(u - 0.33V) + d(u - 0.36V) + d(u - 0.385V) + d(u - 0.53V)] du = \\ &= 0.2 \cdot (0.1 + 0.33 + 0.36 + 0.385 + 0.53) = 0.341V. \end{aligned}$$

ad 4)

Použijeme vztahy (4.6a) a (4.7):

$$\begin{aligned} D(t_1) &= E\{X^2(t)\} - a^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t) dx - a^2(t) = \\ &= 0.2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 [d(u - 0.1V) + d(u - 0.33V) + d(u - 0.36V) + d(u - 0.385V) + d(u - 0.53V)] du - 0.341^2 = \\ &= 0.561V^2. \end{aligned}$$

Při výpočtech byl využit tzv. filtrační účinek Diracova impulsu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(x - x) dx = f(x)$.

r 4.21. Ověřte, zda proces z předchozího případu je stacionární.

p Řešení:

Z obrázku 4.1 je vidět, že např. v čase $t = 55\text{ms}$ bude střední hodnota přibližně stejná jako v čase 24ms , ale zcela určitě zde bude menší disperze. Proto nelze daný náhodný proces považovat za stacionární.

r 4.3. Bylo zjištěno, že náhodný proces v čase $t_1=10\text{ms}$ bylo možno popsat náhodnou veličinou s rovnoměrným rozložením hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x, t_1) = \begin{cases} A & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{pro } x < a, x > b. \end{cases}$$

Určete:

1. konstantu A ,
2. distribuční funkci $F(x, t_1)$,
3. střední hodnotu $a(t_1)$,
4. disperzi $D(t_1)$.

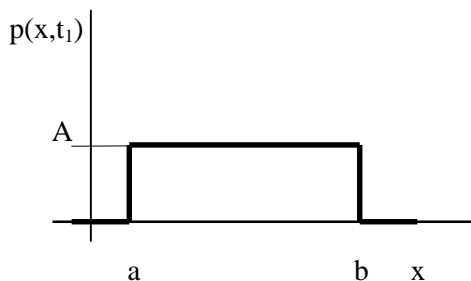
p Řešení:

ad 1)

pro určení konstanty využijeme vztahu (4.4a).

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_a^b A dx = [Ax]_a^b = [A(b-a)] = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{b-a}.$$



Obr.4.4. Funkce hustoty pravděpodobnosti k příkladu 4.3.

ad 2)

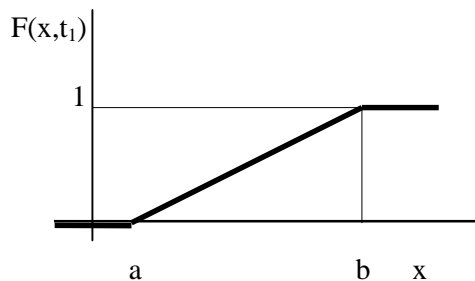
Pro distribuční funkci platí (4.1a):
$$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x f(x, t_1) dx,$$

vzhledem k nespojitostem funkce hustoty pravděpodobnosti rozdělíme řešení do tří intervalů:

a) $x \hat{I} (-\infty, a)$
$$F_1(x, t_1) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0,$$

b) $x \hat{I} [a, b]$
$$F_2(x, t_1) = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^x = \frac{x-a}{b-a},$$

c) $x \hat{I} (b, \infty)$
$$F_3(x, t_1) = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^x 0 dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$



Obr.4.4. Výsledný tvar distribuční funkce.

ad 3)

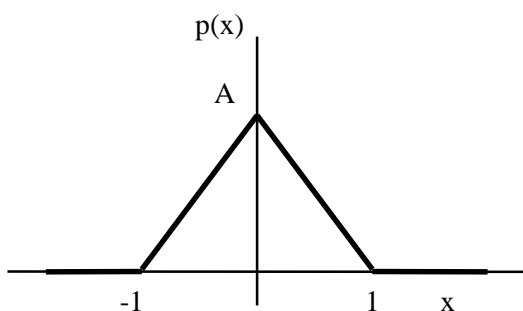
$$a(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t_1) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

ad 4)

$$D(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1\{X(t_1)\}]^2 p(x, t_1) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^b x^2 dx - \int_a^b 2x \frac{a+b}{2} dx + \int_a^b \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 dx \right] = \frac{1}{b-a} \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - (a+b) \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 [x]_a^b \right\} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

r 4.4. Je dána funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného procesu podle obr.4.5.

- Určete :
1. konstantu A ,
 2. distribuční funkci $F(x)$,
 3. střední hodnotu a ,
 4. disperzi D .



Obr.4.5. Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti.

p Řešení:

Nejprve si určíme analytické vyjádření funkce $f(x)$ v jednotlivých intervalech:

- a) $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (1, \infty)$: $p(x) = 0$,
- b) $x \in (-1, 0)$: $p(x) = A(x+1)$,
- c) $x \in (0, 1)$: $p(x) = -A(x-1)$.

ad 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-1}^0 A(x+1) dx + \int_0^1 A(1-x) dx = A \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + A \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{A}{2} + A + A - \frac{A}{2} = A = 1$$

$$\Rightarrow A = 1.$$

ad 2)

$$x \in (-\infty, 1) \quad F_1(x) = 0,$$

$$x \in \langle -1, 0 \rangle: \quad F_2(x) = \int_{-1}^x (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^x = \frac{(x+1)^2}{2},$$

$$x \in \langle 0, 1 \rangle: \quad F_3(x) = F_2(0) + \int_0^x (-x+1) dx = \frac{1}{2} + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^x = \frac{1+2x-x^2}{2},$$

$$x \in \hat{I}(1, \infty): \quad F_4(x) = F_3(0) + 0 = 1.$$

ad 3)

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x) dx + \int_0^1 (-(x)^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0.$$

ad 4)

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1\{X\}]^2 p(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx + \int_0^1 (-(x)^3 + x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

r 4.5. Náhodný proces $X(t) = a \sin(w_c t + F)$ obsahuje náhodnou složku F s normálním rozložením hustoty pravděpodobnosti na intervalu $(-p, p)$, a a w_c jsou konstanty. Určete, zda se jedná o proces stacionární a ergodický.

p Řešení:

1. Určíme střední hodnotu a korelační funkci na množině realizací:

Jestliže má být splněna rovnice (4.4) musí pro $p(F, t)$ platit:

$$p(j, t) = \begin{cases} (2p)^{-1} & \text{pro } j \leq |p|, \\ 0 & \text{pro } j > |p|. \end{cases}$$

$$a(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a \sin(w_c t + j) p(j, t) dj = \frac{a}{2p} \int_{-p}^p \sin(w_c t + j) dj = 0.$$

$$R(t) = E\{X(t)X(t+t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a \sin(w_c t + j) a \sin(w_c t + j + w_c t) p(j, t) dj =$$

$$= \frac{a^2}{4p} \int_{-p}^p \cos(w_c t) dj + \frac{a^2}{4p} \int_{-p}^p \cos(2w_c t + j + w_c t) dj = \frac{a^2}{4p} \cos(w_c t) [j]_{-p}^p + 0 = \frac{a^2}{2} \cos(w_c t).$$

Druhý integrál je roven nule, neboť se jedná o integrál harmonické funkce přes celou periodu.

Jak je vidět, $p(F, t)$ i $R(t)$ jsou časově nezávislé $\Rightarrow X(t)$ je stacionární.

2. Určíme střední hodnotu a korelační funkci z časového průběhu:

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a \sin(\omega_c t + j) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a \sin(\omega_c t + j) a \sin(\omega_c t + j + \omega_c t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_0^T \cos(\omega_c t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_0^T \cos(2\omega_c t + j + \omega_c t) dt = \frac{a^2}{2T} \cos(\omega_c t) \Big|_0^T + 0 = \frac{a^2}{2} \cos(\omega_c t). \end{aligned}$$

Protože $a = \langle X(t) \rangle$ a $R(t) = \hat{R}(t)$, je $X(t)$ ergodický.

r 4.6. Stacionární ergodický náhodný proces má korelační funkci $R(t) = \frac{\sin(3t)}{t}$.

Určete:

1. střední hodnotu procesu,
2. efektivní hodnotu procesu,
3. spektrální hustotu středního výkonu.

p Řešení:

ad 1)

Pro výpočet střední hodnoty použijeme vztah (4.18):

$$a^2 = R(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(3t)}{t} = 0.$$

ad 2)

Efektivní hodnota signálu je podle (4.17) rovna hodnotě $R(0)$:

$$R(0) = R(\infty) + s^2,$$

$$R(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t)}{t} = 3 = s^2.$$

ad 3)

Podle (4.24) je

$$G(\omega) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Vzhledem k tvaru korelační funkce by bylo řešení tohoto integrálu obtížné. Využijeme tedy znalosti, že Fourierovým obrazem obdélníkové funkce $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} B & \text{pro } |x| \leq a \\ 0 & \text{pro } |x| > a \end{cases}$$

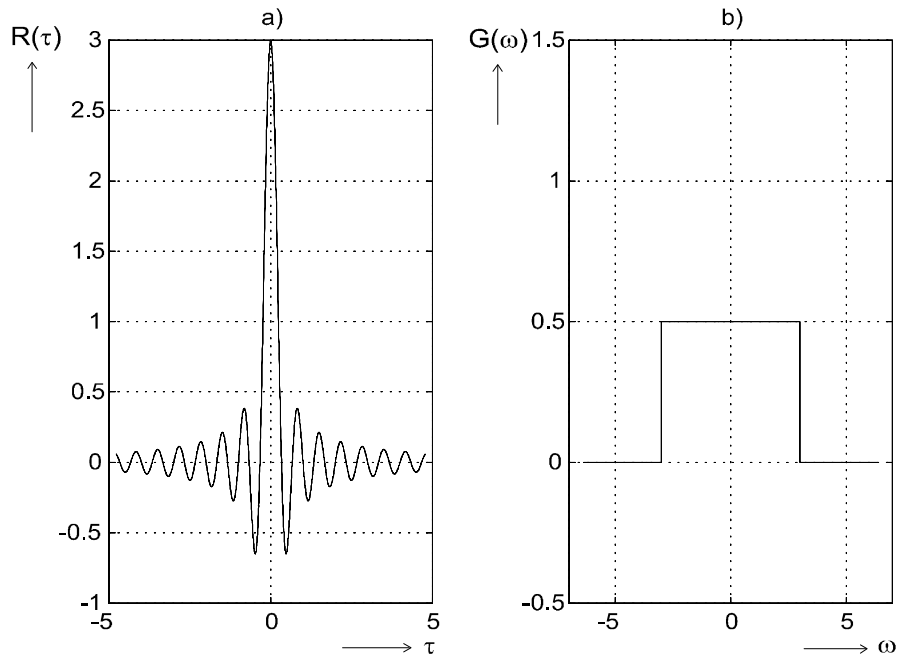
je funkce $F(y)$:

$$F(y) = \int_{-a}^a B e^{-jyx} dx = 2B \frac{\sin(ay)}{y}.$$

Srovnáním pravé strany tohoto vztahu a vztahu pro autokorelační funkci $R(t)$, dostaneme:

$a=3$, $2B=1 \Rightarrow B = 1/2$, $y = t$. Uvážíme-li, že x je úhlový kmitočet pak je výše uvedená rovnice transformací pro určení korelační funkce a platí:

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } |\omega| \leq 3 \text{ rad / s,} \\ 0 & \text{pro } |\omega| > 3 \text{ rad / s.} \end{cases}$$



Obr.4.6. Korelační funkce $R(t)$ a odpovídající spektrální hustota výkonu $G(\omega)$.

r 4.7. Je dána distribuční funkce stacionárního náhodného procesu X .

$$F(x) = \begin{cases} A - e^{-Bx} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Určete:

1. konstanty A a B ,
2. funkci hustoty pravděpodobnosti $p(x)$,
3. střední hodnotu a ,
4. disperzi D .

p Řešení:

ad 1)

Vyjdeme z vlastností (4.2) a (4.4a).

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (A - e^{-Bx}) = A$$

$$\Rightarrow A = 1.$$

Funkci $F(x)$ můžeme vyjádřit pro celý interval hodnot $x \in \mathbb{R}$ jako součin $F(x) = \mathbb{1}(x)(1 - e^{-Bx})$, kde $\mathbb{1}(x)$ je funkce jednotkového skoku

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left[\mathbb{1}(x)(1 - e^{-Bx}) \right]' = d(x)(1 - e^{-Bx}) + \mathbb{1}(x)e^{-Bx},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [d(x)(1 - e^{-Bx}) + \mathbb{1}(x)e^{-Bx}] dx = \int_0^{\infty} e^{-Bx} dx = \left[\frac{e^{-Bx}}{-B} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{B}$$

$$\Rightarrow B = 1.$$

Pro výpočet 1. části integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} [d(x)(1 - e^{-Bx})] dx = 0$ jsme použili filtračního účinku Diracova impulsu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(t-t) dt = f(t).$$

ad 2)

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x \underline{1}(x) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left[e^{-x} (-x-1) \right]_0^{\infty} = 1.$$

ad 3)

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \underline{1}(x) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \left[e^{-x} (-x^2 - 2x - 2) \right]_0^{\infty} = 2.$$

Při výpočtu byly použity vztahy:

$$\int_a^b x e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) \right]_a^b \quad \text{a}$$

$$\int_a^b x^2 e^{ax} dx = \left[e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \right) \right]_a^b \quad \text{a současně}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-x} (\pm x^2)] = 0.$$

r 4.8. Určete střední hodnotu bílého šumu s konstantní hodnotou C spektrální hustoty výkonu.

p Řešení:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{j\omega t} d\omega.$$

Tento integrál nelze přímo řešit, neboť $G(\omega)$ nespĺňuje podmínku absolutní integrovatelnosti. Pro řešení můžeme vyjít ze vztahu pro určení spektrální hustoty výkonu:

$$G(\omega) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-j\omega t} dt = C.$$

Pokud uvážíme filtrační účinek Diracova impulsu můžeme psát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C d(t) e^{-j\omega t} dt = C. \quad \text{Pak srovnáním dostaneme:}$$

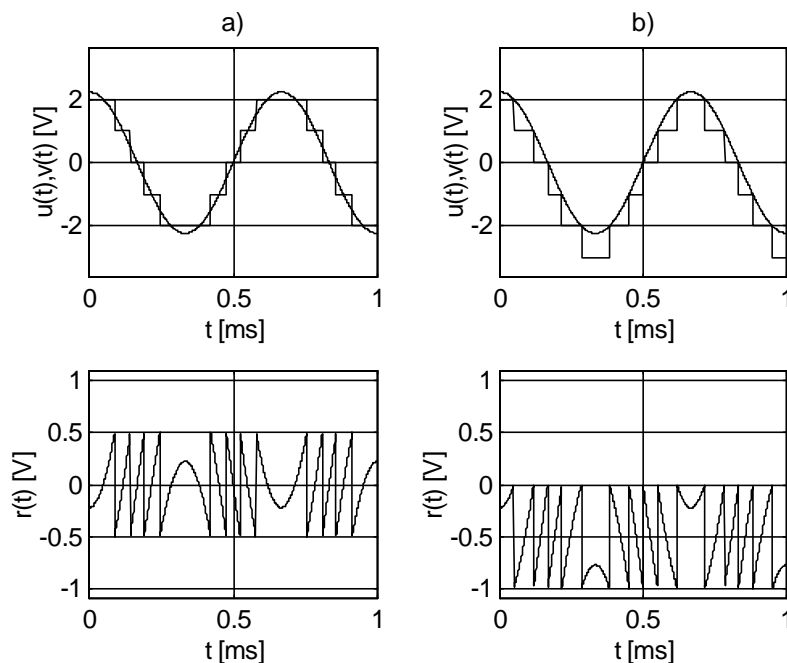
$$\frac{1}{2p} R(t) = C d(t) \Rightarrow R(t) = 2p C d(t).$$

Pro výpočet střední hodnoty použijeme vztah (4.18)

$$R(\infty) = a^2 = 0.$$

r 4.9. Určete střední hodnotu a disperzi kvantovacího šumu, který by vznikl při digitalizaci signálu $u(t) = 2,2 \cos(2\pi 1500t)$ V. Signál by byl vyjádřen ve dvojkovém doplňku třemi bity (jeden bit znaménkový). Rovněž určete poměr výkonu signálu k výkonu tohoto šumu.

Uvažte jak by se lišily obě číselné charakteristiky, jestliže by A/D převodník pracoval tak, že výsledné binární slovo by vzniklo jednak zaokrouhlením a jednak ořezáním přesného vyjádření hodnoty na požadovaný počet bitů. Napěťový rozdíl DU dvou sousedních hladin je 1V (viz obr.4.6).



Obr.4.6. Kvantování signálu $u(t)=2,2\cos(2\pi 1500t)$ na osm hladin vzdálených o 1V
a) zaokrouhlováním, b) ořezáváním.

Řešení:

Průběhy kvantovaných signálů $v(t)$ a rozdílových signálů $r(t)=v(t)-u(t)$ jsou na obrázku 4.6. Signál $r(t)$ považujeme pro obecný průběh napětí $u(t)$ za náhodný stacionární proces a označujeme jej jako kvantovací šum. Výsledný kvantovaný signál $v(t)$ pak lze chápat jako součet původního signálu a kvantovacího šumu.

a) Kvantování se zaokrouhlením

Budeme-li řešit úlohu pravděpodobnostním přístupem označíme kvantovací šum jako náhodný proces $R(t)$.

V obou případech má jeho funkce hustoty pravděpodobnosti rovnoměrné rozložení v intervalu $-0.5V$ až $0.5V$.

Při dodržení podmínky (4.4a) dostaneme

$$p(r) = \begin{cases} 1 & \text{pro } r \leq |0.5V|, \\ 0 & \text{pro } r > |0.5V|, \end{cases}$$

$$a = E\{R(t)\} = \int_{-0.5}^{0.5} r dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{-0.5}^{0.5} = 0,$$

$$D = E\{[R(t)-a]^2\} = \int_{-0.5}^{0.5} r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-0.5}^{0.5} = 0.0833 \text{ [V}^2\text{]}.$$

Výkon harmonického signálu určíme podle vztahu: $P_U = \frac{U_{ef}^2}{R}$. (pozor, nezaměnit hodnotu rezistoru R s procesem $R(t)$!).

Výkon náhodného procesu určíme jako: $P_R = \frac{E\{R^2(t)\}}{R}$.

Úpravou dostaneme: $P_R = \frac{E\{R^2(t)\}}{R} = \frac{D+a^2}{R}$.

Poměr výkonu signálu k výkonu šumu pak bude: $\frac{P_U}{P_R} = \frac{U_{ef}^2}{D + a^2} = \frac{2.2^2}{2 \cdot 0.083} = 29.04$.

a) Kvantování s ořezáním:

$$p(r) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \leq r \leq 0, \\ 0 & \text{pro } r < -1, r > 0, \end{cases}$$

$$a = E\{R(t)\} = \int_{-1}^0 r dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{-1}^0 = -0.5 \text{ [V]},$$

$$D = E\{[R(t) - a]^2\} = \int_{-1}^0 (r + 0.5)^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{4} \right]_{-1}^0 = 0.0833 \text{ [V}^2\text{]},$$

$$\frac{P_U}{P_R} = \frac{U_{ef}^2}{D + a^2} = \frac{2.2^2}{\sqrt{2} \cdot (0.0833 + 0.5^2)} = 7.26.$$

Je vidět, že při zaokrouhlování lze dosáhnout 4× lepší poměr výkonu signálu k výkonu šumu.

r 4.10. Řešte předchozí příklad pro obecné zadání: $u(t) = C \cos(\omega t)$, velikost kvantovací hladiny DU .

Ü Výsledky:

$$\text{a) } a = 0, \quad D = \frac{(DU)^2}{12}, \quad \frac{P_U}{P_R} = \frac{6 \cdot C^2}{(DU)^2}.$$

$$\text{b) } a = \frac{-DU}{2}, \quad D = \frac{(DU)^2}{12}, \quad \frac{P_U}{P_R} = \frac{3 \cdot C^2}{2 \cdot (DU)^2}.$$

Z výsledků je patrné, že pro snížení výkonu kvantovacího šumu je nutné zmenšit velikost DU a tedy při konstantním rozsahu vstupního signálu A/D převodníku zvětšit počet kvantovacích úrovní, nebo zvětšit amplitudu vstupního signálu. Ta však nesmí překročit vstupní rozsah převodníku U_{IN} .