4.2. NÁHODNÉ PROCESY S DISKRÉTNÍM ČASEM

V mnoha případech je náhodný proces definován pouze v určitých diskrétních časových okamžicích, např. při jeho vzorkování. Náhodný proces je pak tvořen posloupností hodnot a nazýváme jej náhodnou posloupností. Pro popis lze použít metod popsaných v kapitole 4.1, kde místo času *t* uvažujeme *n* násobky určitého časového intervalu T_v, kterým je např. perioda vzorkování.

Jako příklad uveďme např. výpočet střední hodnoty a disperze jednorozměrné náhodné posloupnosti s diskrétními hodnotami

$$a(n)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i,n)\,, \tag{4.29}$$

$$D(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-a(n)\right]^2 P(x_i,n)\,. \tag{4.30}$$

Nečastěji používanou číselnou charakteristikou 2.řádu je korelační funkce:

$$R(n_1,n_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j P(x_i,x_j,n_1,n_2). \tag{4.31}$$

Úpravou (4.20), (4.21) a (4.22) lze získat vztahy pro výpočet střední hodnoty, disperze a korelační posloupnost stacionárního ergodického diskrétního náhodného procesu:

$$\hat{a}=<x(n)>=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\,, \tag{4.32}$$

$$\hat{D}=<[x(n)-\hat{a}]^2>=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[x(n)-\hat{a}]^2\,, \tag{4.33}$$

$$\hat{R}(m)=<x(n)x(n+m)>=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)x(n+m)\,. \tag{4.34}$$

Spektrální charakteristiky dostaneme opět obměnou vztahů (4.24) a (4.25). Spektrální hustota středního výkonu pak bude:

$$G(w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{-jwm}\,, \tag{4.35}$$

kde *w* je normovaný kmitočet, který lze vyjádřit pomocí skutečného kmitočtu *W* vztahem:

$$w=WT_v\,. \tag{4.36}$$

Vztah (4.35) má spíše formální charakter, neboť v konvenčním významu ideální diskrétní signál žádný výkon nemá. Spektrální hustota výkonu spojitého procesu je dána vztahem (4.24). Budeme-li chtít tuto funkci určit ze vzorků spojitého procesu vzorkovaného s periodou T_v, použijeme vztah:

$$G_s(W)\approx\frac{T_v}{2p}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R(mT_v)e^{-jWmT_v}=\frac{T_v}{2p}G(WT_v)=\frac{T_v}{2p}G(w)\,. \tag{4.37}$$

Jedná se v podstatě o výpočet (4.24) obdélníkovou metodou, kde *t* je nahrazeno mT_v.

Upozornění: kmitočtu *w* ve vztahu (4.24) odpovídá tedy kmitočet *W* ve vztahu (4.37)! Vzhledem k tomu, že v diskrétních soustavách bývá zvykem používat normovaný čas *m* místo skutečného mT_v, je možné psát místo $R(mT_v)$ jen $R(m)$ aniž by to mělo vliv na výsledek.

Vzhledem k tomu, že spektrální hustota výkonu diskrétního náhodného procesu je spojitá a periodická s periodou $W_v = {}^{2p}\!/_{T_v}$ lze při výpočtu korelační posloupnosti integrovat v mezích od ${}^{-w_v}\!/_2$ do ${}^{w_v}\!/_2$.

Pak tedy platí:

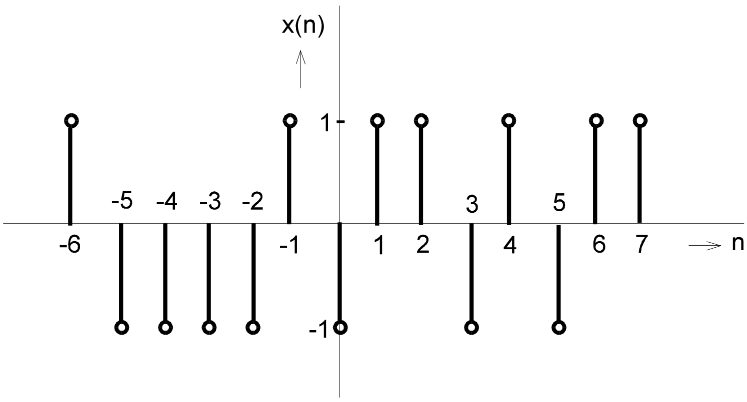
$$R(m)=\int_{-\frac{W_v}{2}}^{-\frac{W_v}{2}} G_s(W)e^{jWmT_v}dW=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} G(w)e^{jwm}dw\,. \tag{4.38}$$

ØEŠENÉ PØÍKLADY

r 4.11. Bernoulliův stacionární náhodný proces je definován vlastnostmi:
X(n)=1 s pravděpodobností *P*,
X(n)=-1 s pravděpodobností *Q*=1-*P*.
Pro *m* ¹ 0 jsou náhodné veličiny *X(n)* a *X(n-m)* statisticky nezávislé.
Určete: 1. funkci hustoty pravděpodobnosti *p(x)*,
2. střední hodnotu *a*,
3. distribuční funkci *F(x)*,
4. disperzi *D*,
5. autokorelační posloupnost *R(m)*,
6. střední výkon.

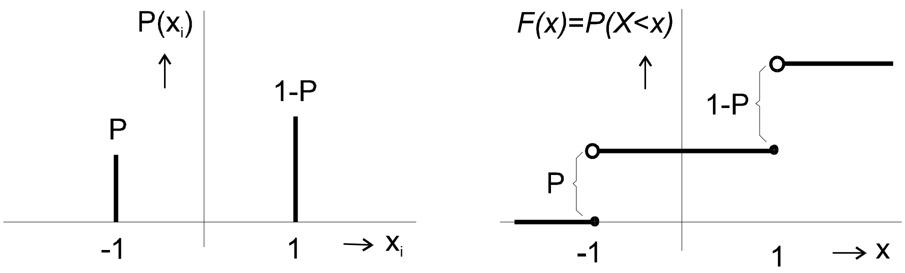
þ *Řešení*:

ad 1), ad 2)



Obr.4.7. Příklad realizace Bernoulliova procesu.

Náhodný proces nabývá dvou možných stavů:
x_1, a x_2.



Obr.4.8. Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti *P(x_i)I* a distribuční funkce *F(x)* Bernoulliova náhodného procesu.

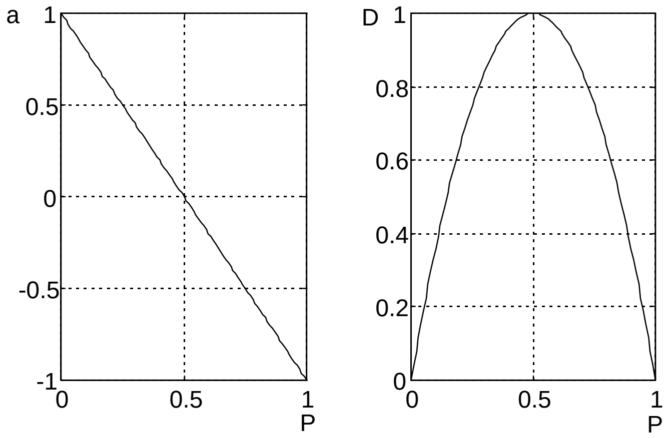
ad 3)

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = -1 \cdot P + 1 \cdot (1 - P) = 1 - 2P.$$

Průběh střední hodnoty *a=f(P)* je na obr.4.9a.

ad 4)

$$D=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-a\right]^2 P(x_i)=\left[-1-(1-2P)\right]^2 P+\left[1-(1-2P)\right]^2(1-P)=(-2+2P)^2 P+4P^2(1-P)=$$
$$=4P(1-P).$$



Obr.4.9. Průběh střední hodnoty *a* a disperze *D* Bernoulliova náhodného procesu.

ad 5)

$$R(m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i x_j P(x_i,x_j,0,m)\,.$$

a) *m=0:*

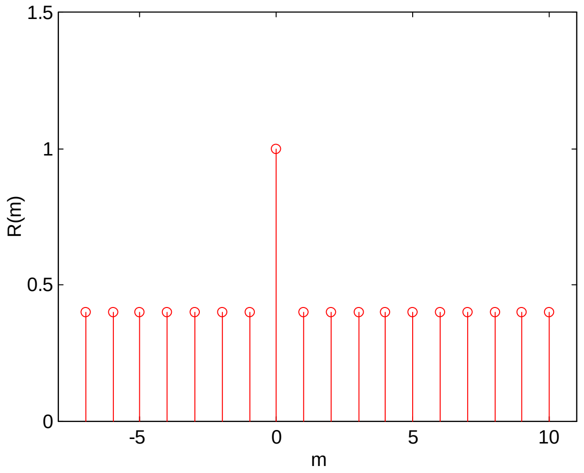
$$R(0)=\sum_{i=1}^{2}x_i^2 P(x_i)=P+(1-P)=1.$$

b) $m^{1}0$:

Dva jevy zkoumané v kroku *n* a v kroku *n+m* jsou statisticky nezávislé. Proto lze vztah pro korelační funkci upravit:

$$R(m)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i x_j P(x_i,x_j,0,\infty)=\sum_{i=1}^{2}x_i P(x_i)\sum_{j=1}^{2}x_j P(x_j)=a^2=(1-2P)^2,$$

$$R(m)=\begin{cases}1 & pro \quad m=0\\ (1-2P)^2 & pro \quad m\neq 0\end{cases}$$



Obr.4.10. Průběh autokorelační funkce v intervalu $m\in\langle -7,10\rangle$, P=0.7.

ad 6)

Střední výkon: *R(0)*=1.
Pozn. pro střední výkon platí (4.17) a (4.13)

$$R(0) = D + a^2 = 4P(1-P) + (1-2P)^2 = 4P - 4P^2 + 1 - 4P + 4P^2 = 1\,.$$

r 4.12. Dokažte, že Bernoulliův proces je bílým šumem pro *P=0.5*.

þ *Řešení*:

Vlastnosti bílého šumu: 1. nulová střední hodnota,
2. konstantní spektrální hustota výkonu.

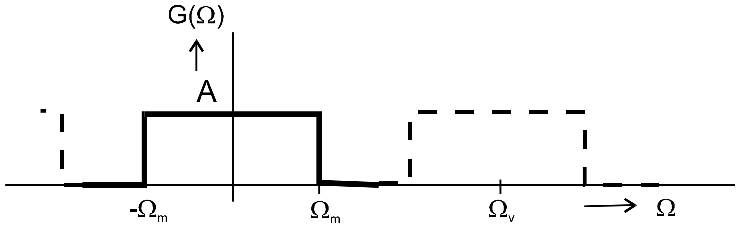
ad 1)

$$a = 1 - 2P = 1 - 2\cdot 0.5 = 0\,.$$

ad 2)

$$G(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{-jwm} = \left| R(m) = \begin{cases} 1 & pro \quad m = 0 \\ a^2 = 0 & pro \quad m \neq 0 \end{cases} \right| = R(0) = 1.$$

r 4.13. Bílý šum byl navzorkován s kmitočtem f_v=8kHz a přiveden na vstup ideální dolní propustí o mezním kmitočtu f_m=3kHz. Načrtněte autokorelační posloupnost na výstupu dolní propusti.



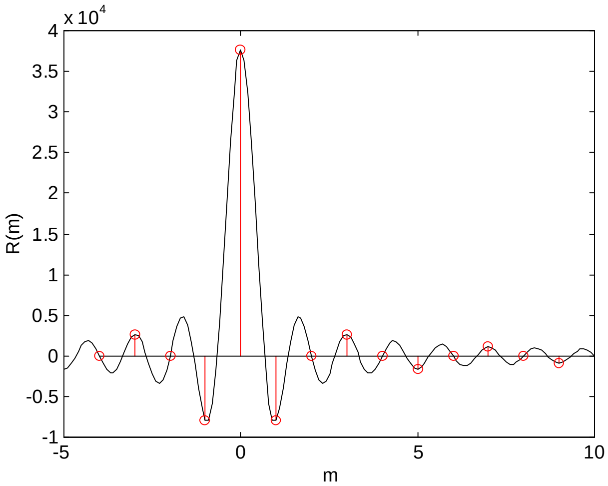
Obr.4.11. Spektrální hustota výkonu navzorkovaného bílého šumu po projití ideální dolní propustí.

þ ***Řešení*:**
Bílý šum má konstantní spektrální hustotu výkonu. Označme ji např. $G'(W) = A$. Po projití ideální dolní propustí bude na jejím výstupu posloupnost se se spektrální hustotou podle obrázku 4.11.

G(W)=*A*=konst. pro $|\Omega| < \Omega_m$.

$$R(m) = \int_{-\frac{W_V}{2}}^{\frac{W_V}{2}} G_s(W) e^{jWmT_v}\, dW = \int_{-W_m}^{W_m} A e^{jWmT_v} = A\left[\frac{e^{jWmT_v}}{jmT_v}\right]_{-w_m}^{w_m} = \frac{2A}{mT_v}\sin(W_m mT_v) =$$

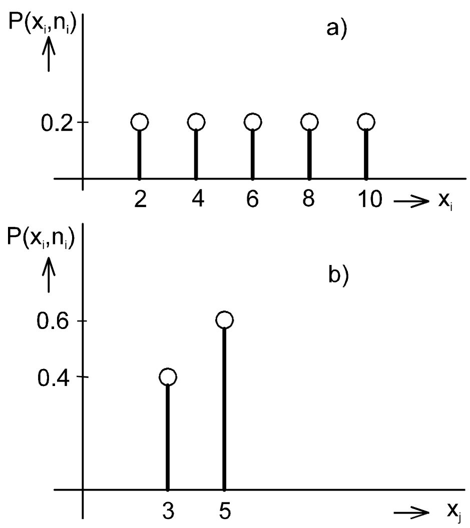
$$= 2Aw_m \mathrm{sinc}(W_m mT_v) = 2Aw_m \mathrm{sinc}(2pm\frac{f_m}{f_v}) = 2Aw_m \mathrm{sinc}(0.75kp).$$



Obr.4.12. Autokorelační posloupnost bílého šumu na výstupu dolní propusti, *A*=1.

<u>Poznámka</u>:
Střední výkon pro *a*=0 je roven disperzi náhodného procesu pro *A*=0 je $R(0)=2Aw_m$= 3,33·10^4.

r **4.14.** Bylo zjištěno, že soubor náhodných posloupností nabýval v okamžicích n_1, n_2 =±1, ±2, ±3,... diskrétních hodnot s danou pravděpodobností podle obrázku:



Obr.4.13. Funkce rozložení pravděpodobnosti a) pro n_1, n_2 lichá,
b) pro n_1, n_2 sudá.

Nareslete korelační posloupnost tohoto procesu za předpokladu, že náhodné veličiny $X(n_i)$ a $X(n_j)$ jsou statisticky nezávislé pro n_1 ¹ n_2.

þ ***Řešení*:**

$$R(1,1)=E\left\{X(1)X(1)\right\}=\sum_{i=1}^{5}x_i^2P(x_i,1)=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot 0.2=42.4\,,$$

$$R(1,2)=E\left\{X(1)X(2)\right\}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2}x_ix_jP(x_i,x_i,1,2)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2}x_iP(x_i,1)x_jP(x_j,2)=$$

$$=2\cdot 0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)+4\cdot 0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)+6\cdot 0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)+8\cdot 0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)+$$

$$+10\cdot 0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)=0.2\cdot(3\cdot 0.4+5\cdot 0.6)\cdot(2+4+6+8+10)=25.2,$$

$$R(1,3)=E\left\{X(1)X(3)\right\}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}x_ix_jP(x_i,x_i,1,3)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}x_iP(x_i,1)x_jP(x_j,3)=$$

$$=(2+4+6+8+10)\cdot 0.2\cdot(2+4+6+8+10)\cdot 0.2=36,$$

$$R(1,4)=E\left\{X(1)X(4)\right\}=R(1,2)=25.2,$$

$$R(2,1)=E\left\{X(2)X(1)\right\}=R(1,2)=25.2\,,$$

$$R(2,2)=E\left\{X(2)X(2)\right\}=\sum_{i=1}^{2}x_i^2P(x_i,2)=3^2\cdot 0.4+5^2\cdot 0.6=18.6,$$

$$R(2,3)=E\left\{X(2)X(1)\right\}=R(2,1)=25.2,$$

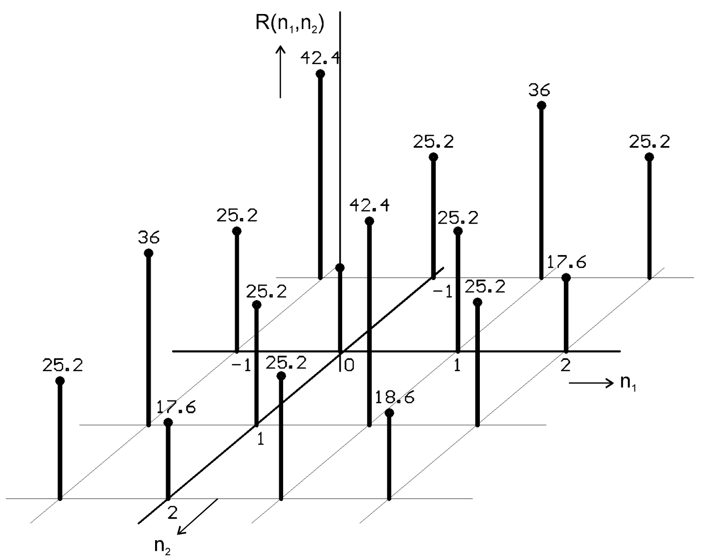
$$R(2,4)=E\left\{X(2)X(4)\right\}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_ix_jP(x_i,x_i,2,4)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_iP(x_i,2)x_jP(x_j,4)=$$

$$=(0.4\cdot 3+0.6\cdot 5)\cdot(0.4\cdot 3+0.6\cdot 5)=17.64.$$

Při výpočtu jsme použili vztahu (4.31)

Dále zřejmě platí
$$R(n_1,n_2)=\begin{cases} R(1,1) & pro\quad n_1=n_2:liché\\ R(2,2) & pro\quad n_1=n_2:sudé\\ R(1,2) & pro\quad n_2=n_1+1\pm 2k\\ R(1,3) & pro\quad n_2=n_1\pm 2k, n_1:liché\\ R(2,4) & pro\quad n_2=n_1\pm 2k, n_1:liché \end{cases}$$

kde $k=1,2,3,\ldots$ a n_1, n_2 =±1,±2,±3...



Obr.4.14. Korelační funkce $R(n_1,n_2)$.