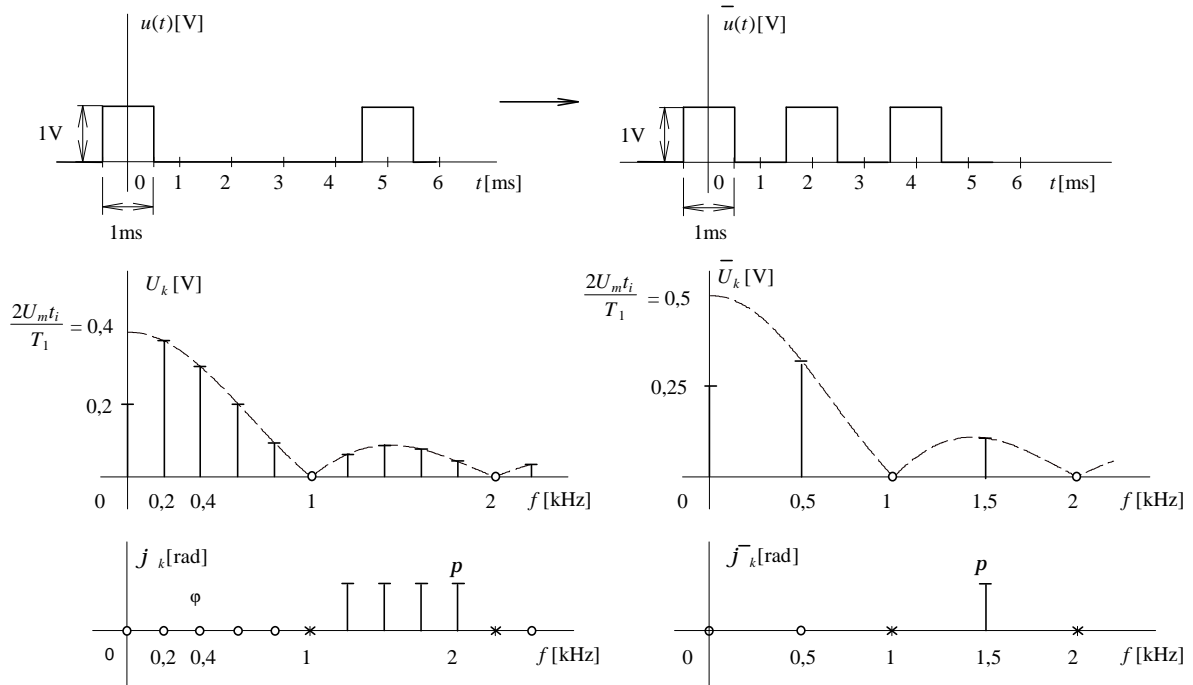


- r 1.15.** Co se stane se spektrem signálu z obr.1.12, dojde-li k zvětšení jeho opakovací frekvence na 500Hz?

p Řešení:

Viz obr.1.15



Obr.1.15. Vliv opakovací frekvence na spektrum.

& Poznátka z příkladu:

Při vzrůstu opakovací frekvence impulsů dojde k zředění spektrálních čar a k jejich proporcionálnímu zvětšení, protože vzroste i energie signálu (impulzy se častěji opakují).

- r 1.16.** Co se stane se spektrem signálu z př.1.12, dojde-li k jeho stejnosměrnému posunutí podle obr.1.16?

p Řešení:

Viz obr.1.16. Tvar signálu se nezměnil, pouze jeho stejnosměrná složka:

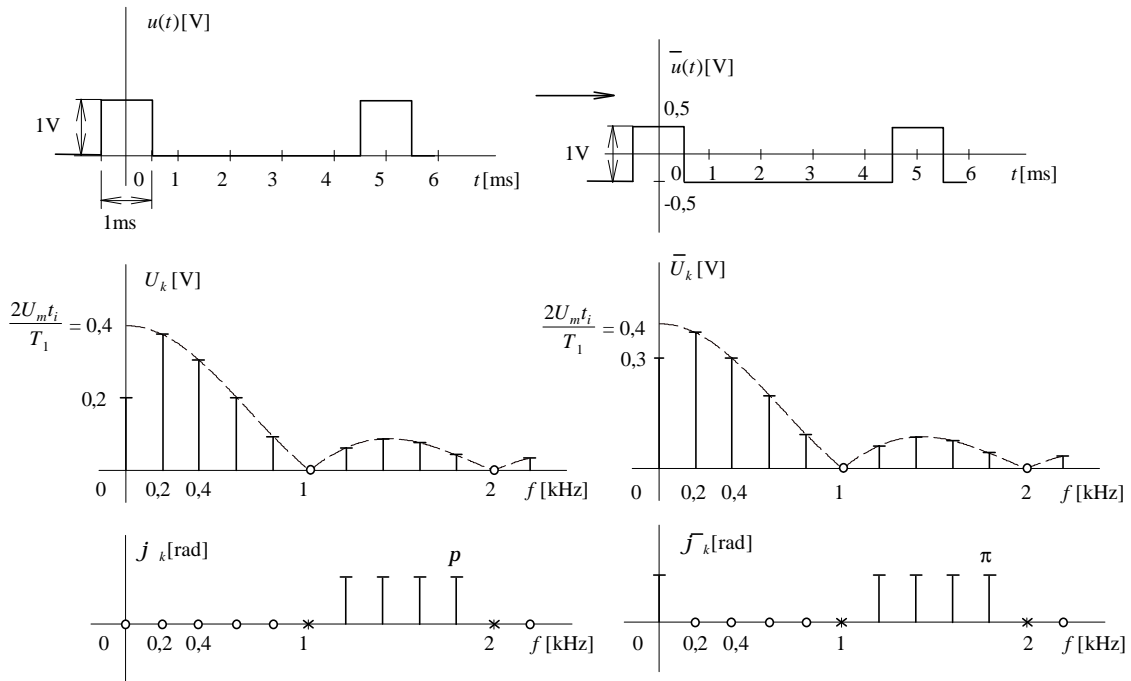
$$U_0 \cdot T = 0,5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -1,5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow U_0 = \frac{-1,5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = -0,3 \text{ V.}$$

& Poznátka z příkladu:

Změnou stejnosměrného posuvu se nemění spektrální čáry s výjimkou čáry na kmitočtu 0Hz. Posuvem je ovlivněna pouze stejnosměrná složka, vyšší harmonické počínaje první udávají tvar signálu.

- r 1.17.** Porovnejte spektra signálu před a po jeho průchodu invertujícím zesilovačem o přenosu

$$\frac{U_2}{U_1} = -5.$$



Obr.1.16. Vliv stejnosměrného posunutí signálu na jeho spektrum.

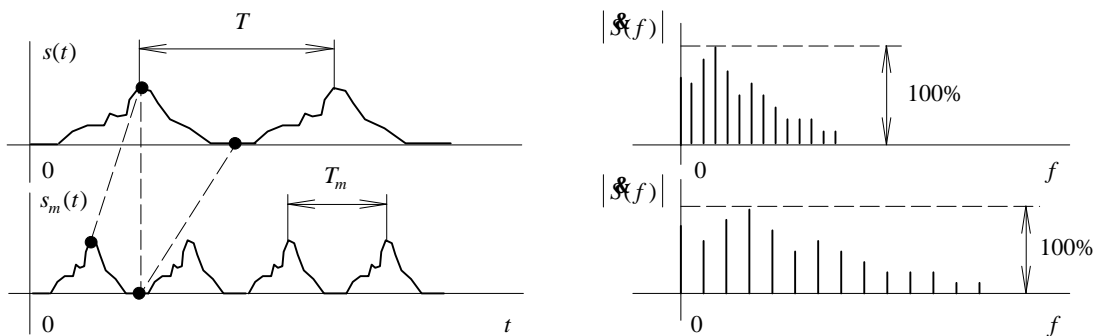
Řešení:

Všechny harmonické složky včetně stejnosměrné složky budou násobeny číslem -5.

Vliv na amplitudové spektrum: všechny amplitudové čáry se 5x prodlouží.

Vliv na fázové spektrum: fáze všech složek se změní o 180°.

1.18. Signál je nejprve zaznamenán na médium a pak přehrán dvojnásobnou rychlostí. Jak se změní spektrum?



Obr.1.17. Vliv komprimace signálu v čase na jeho spektrum.

Řešení:

$$s_m(t) = s(mt); \quad m > 1 \quad \mathbf{L} \text{ komprimace v čase (zrychlení); } T_m = \frac{T}{m}; \quad W_m = \frac{2p}{T_m} = \frac{2p}{T} m = W \cdot m$$

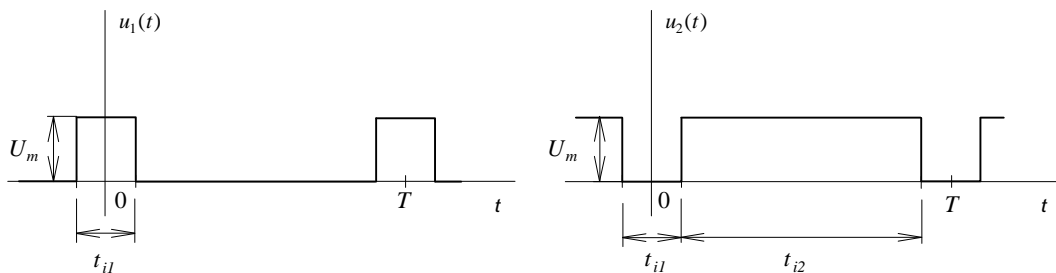
$m < 1$ **K** expanze v čase (zpomalení)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,m} &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} s_m(t) e^{-jkW_m t} dt = \frac{1}{\frac{T}{m}} \int_{\frac{T}{m}} s(mt) e^{-jkW_m t} dt = \left| \begin{array}{l} mt = a \\ da = m dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{m}{T} \int_T s(a) e^{-jkW a} \frac{da}{m} = \left| \begin{array}{l} a = t \\ da = dt \end{array} \right| = \mathcal{F}_k. \end{aligned}$$

& Poznátka z příkladu:

Při časové kompresi (expanzi) signálu s faktorem m se kmitočet každé harmonické ve spektru m krát zvětšuje (zmenšuje). Dochází tedy k přemístování harmonických po kmitočtové ose beze změny jejich velikostí a fázových posuvů.

r 1.19. Dokažte, že oba uvedené signály mají naprosto stejné spektrum amplitud počínaje 1.harmonickou složkou.



Obr.1.18. Analyzované signály.

p Řešení:

Součet obou signálů dává stejnosměrný signál U_m :

$$\begin{aligned} u_1(t) + u_2(t) &= U_m \Rightarrow \\ u_2(t) &= -u_1(t) + U_m. \end{aligned}$$

Signál $u_2(t)$ je tedy invertovaný signál $u_1(t)$ se změnou stejnosměrnou složkou. Prostá inverze signálu nemá vliv na amplitudové spektrum (viz př.1.17). Proto rozdíl v amplitudových spektrech obou signálů bude jen v stejnosměrné složce.

& Poznátka z příkladu:

Průběh amplitudových spekter je u obou obdélníkových signálů stejný pro $k > 0$, kde k je pořadí harmonické. Pro šířku spektra je tedy rozhodující nejen šířka impulsu, ale stejně tak i šířka mezery mezi impulsy.

r 1.20. Jak se změní spektrum periodického signálu po průchodu ideálním zpožďovacím vedením, jestliže pro vstupní a výstupní signál vedení platí vztah

$$s_2(t) = s_1(t - t),$$

$t > 0$ je zpoždění.

p Řešení:

Zpoždíme-li periodický signál o čas t , posuneme o čas t všechny jeho harmonické složky, z nichž je složen, beze změny amplitud. Amplitudové spektrum se tedy nezmění.

Zpoždění 1.harmonické složky o čas t znamená její fázový posuv o $-Wt$.

Zpoždění k -té harmonické složky o čas t znamená její fázový posuv o $-k \cdot Wt$.

Matematické odvození:

$$\mathfrak{K}_{k,1} = \frac{1}{T} \int_T s_1(t) e^{-jkWt} dt,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{k,2} &= \frac{1}{T} \int_T s_2(t) e^{-jkWt} dt = \frac{1}{T} \int_T s_1(t-t) e^{-jkWt} dt = \left| \begin{array}{l} t-t = a \\ dt = da \end{array} \right| = \frac{1}{T} \int_T s_1(a) e^{-jkW(a+t)} da = \\ &= e^{-jkWt} \frac{1}{T} \int_T s_1(a) e^{-jkWa} da = e^{-jkWt} \mathfrak{K}_{k,1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|\mathfrak{K}_{k,2}| = |\mathfrak{K}_{k,1}|,$$

$$j_2 = \arg \mathfrak{K}_{k,2} = \arg \mathfrak{K}_{k,1} - kWt = j_1 - kWt.$$

r 1.21. Určete spektrální složky periodického sledu Diracových impulsů $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(t - kT_1)$.

p Řešení:

$$\mathfrak{K}_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s(t) e^{-jkWt} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} d(t) e^{-jkWt} dt = \frac{1}{T_1} \Rightarrow \text{filtrační účinek Diracova impulsu, viz vzorec}$$

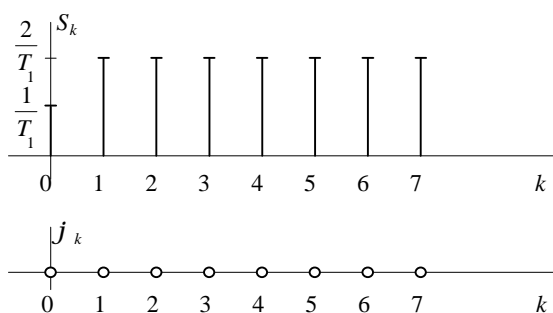
(1.80).

Stejnoseměrná složka: $S_0 = \frac{1}{T_1}.$

k -tá harmonická složka: $S_k = 2|\mathfrak{K}_k| = \frac{2}{T_1},$

$$j_k = 0 \Rightarrow$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{K}_k e^{jkWt} = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkWt} = \frac{1}{T_1} + \frac{2}{T_1} \cos(kWt).$$

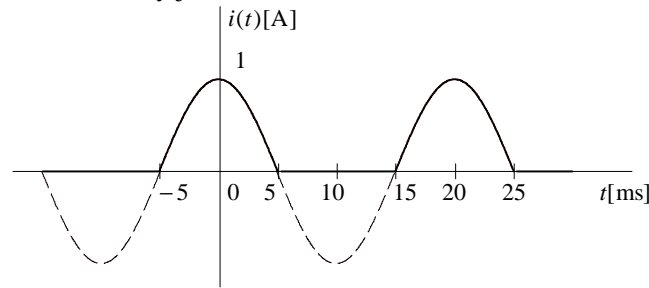


Obr.1.19. Spektrum periodického sledu Diracových impulsů.

& Poznátka z příkladu:

Periodický sled Diracových impulsů s opakovací periodou T_1 se skládá ze ss. složky $1/T_1$ a nekonečného počtu kosinových harmonických o stejně velkých amplitudách $2/T_1$. Takovýto signál by zaručil nekonečně široké kmitočtové pásmo.

r 1.22. Určete spektrální složky jednocestně usměrněného harmonického signálu podle obr.1.20.



Obr.1.20. Jednocestně usměrněný kosinový signál.

p Řešení:

$B_k = 0$ (sudý signál); $T = 20\text{ms} \Rightarrow F = 50\text{Hz}$, $W = 2p \cdot 50 \text{ rad/s}$,

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} i(t) \cos(kWt) dt = \frac{1}{T} \int_{-5 \cdot 10^{-3}}^{5 \cdot 10^{-3}} \cos(Wt) \cos(kWt) dt.$$

Využijeme toho, že

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b).$$

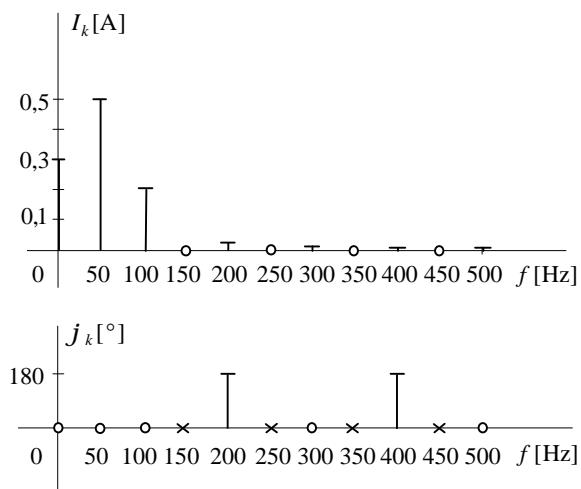
$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T/4}^{T/4} \cos[(k+1)Wt] dt + \int_{-T/4}^{T/4} \cos[(k-1)Wt] dt \right\} = \frac{1}{2T} \left[\frac{\sin[(k+1)Wt]}{(k+1)W} + \frac{\sin[(k-1)Wt]}{(k-1)W} \right]_{-T/4}^{T/4} = \\ &= \frac{1}{2WT} \left\{ \frac{\sin\left[(k+1)W\frac{T}{4}\right] + \sin\left[(k+1)W\frac{T}{4}\right]}{k+1} + \frac{\sin\left[(k-1)W\frac{T}{4}\right] + \sin\left[(k-1)W\frac{T}{4}\right]}{k-1} \right\} = \\ &= \frac{2}{4p} \left\{ \frac{\sin\left[(k+1)\frac{p}{2}\right]}{k+1} + \frac{\sin\left[(k-1)\frac{p}{2}\right]}{k-1} \right\} = \text{úprava} = -\frac{\cos\left(k\frac{p}{2}\right)}{p(k^2-1)}, \quad k \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Pro $k = 1$:

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2(Wt) dt = \frac{1}{4} \text{ A}.$$

Počínaje 3. harmonickou složkou jsou všechny liché harmonické složky nulové.

k	A_k [A]	I_k [A]	j_k [°]
0	0,3183	0,3183	0
1	0,25	0,5	0
2	0,1061	0,2122	0
3	0	0	x
4	-0,0212	0,0424	180
5	0	0	x
6	0,0091	0,0182	0
7	0	0	x
8	-0,0051	0,0102	180
9	0	0	x
10	0,0032	0,0064	0
M	M	M	M



Obr.1.21. Spektrum signálu z obr.1.20.

& Poznátka z příkladu:

Jednocestně usměrněný harmonický signál lze poměrně přesně aproximovat stejnosměrnou složkou a prvními dvěma harmonickými. Tento signál není zdrojem silných rušivých vyšších harmonických.

r 1.23. Určete vzájemnou korelační funkci $R_{12}(t)$ signálů $s_1(t) = C\cos(Wt)$ a $s_2(t) = C\sin(Wt)$, $C = 1V$, $W = 2\pi F = 2\pi \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, $T = 10\mu\text{s}$, $F = 100\text{kHz}$. Signál $s_2(t)$ vznikl zpožděním signálu $s_1(t)$ o $1/4$ periody = $2,5\mu\text{s}$.

p Řešení:

$$\begin{aligned}
 R_{12}(t) &= \frac{1}{T} \int_T s_1(t)s_2(t+t)dt = \frac{C^2}{T} \int_T \cos(Wt)\sin[W(t+t)]dt = \\
 &= \left| \cos a \sin b = \frac{1}{2} \sin(a+b) - \frac{1}{2} \sin(a-b) \right| = \frac{C^2}{2T} \int_T \sin[W(2t+t)]dt + \frac{C^2}{2T} \int_T \sin(Wt)dt = \\
 &= \frac{C^2}{2T} \frac{1}{2W} [-\cos W(2t+t)]_T + \frac{C^2}{2T} \sin(Wt) \cdot T = \left(\frac{C}{\sqrt{2}} \right)^2 \sin(Wt) = S_{ef}^2 \sin(Wt).
 \end{aligned}$$

& Poznátka z příkladu:

K maximální shodě (zde k totožnosti) obou signálů dojde, je-li signál $s_2(t)$ posunut na ose času zpět o $1/4$ periody. Proto $R_{12}(t)$ vykazuje maximum při $t = T/4$; protože oba signály jsou periodické s periodou T , vykazuje periodicitu i vzájemná korelační funkce.

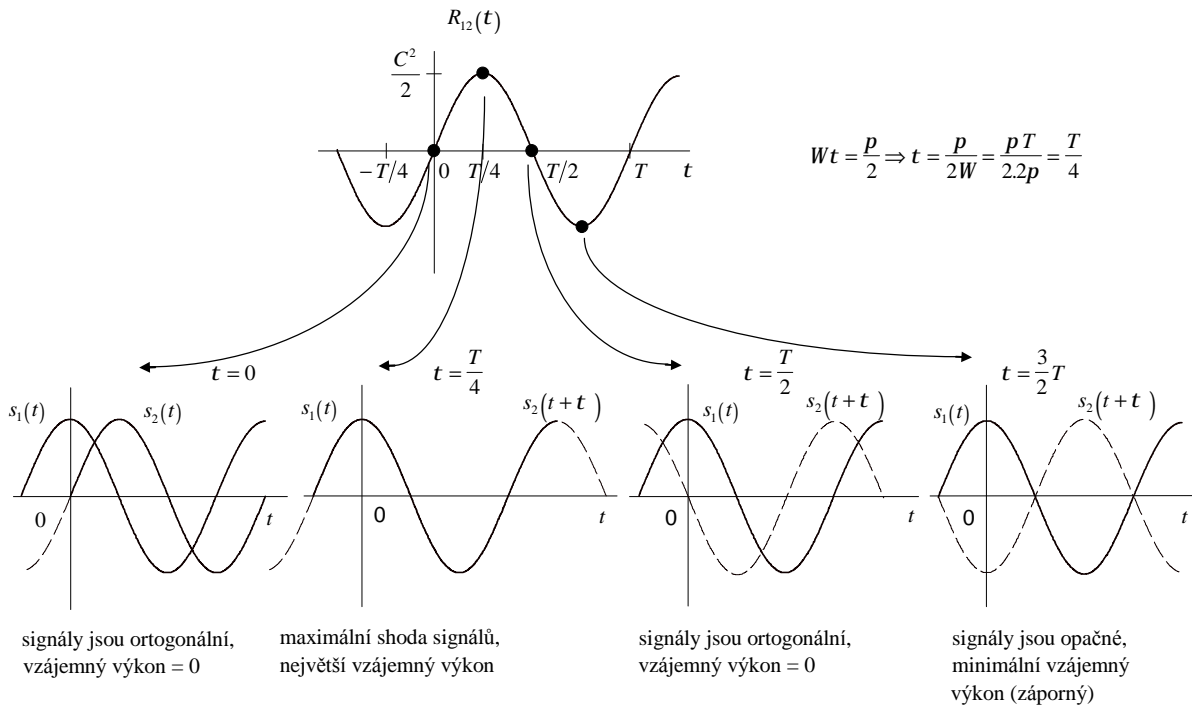
V případě posouvání signálu $s_1(t)$ při fixním $s_2(t)$ bychom obdrželi funkci $R_{21}(t) = -R_{12}(t)$.

r 1.24. Určete autokorelační funkci signálu $u(t) = U_m[1 + \cos(Wt)]$, $U_m = 5V$.

p Řešení:

Autokorelační funkce:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \frac{1}{T} \int u(t)u(t+t)dt = \frac{U_m^2}{T} \int (1 + \cos Wt)[1 + \cos W(t+t)]dt = \\
 &= \frac{U_m^2}{T} \int [1 + \cos W(t+t) + \cos(Wt) + \cos(Wt)\cos W(t+t)]dt = \\
 &= \frac{U_m^2}{T} \left[T + \frac{1}{2} \int_T [\cos(2Wt + Wt) + \cos(Wt)]dt \right] = \frac{U_m^2}{T} \left[T + \frac{1}{2} \cos(Wt) \cdot T \right] = \\
 &= U_m^2 \left[1 + \frac{\cos(Wt)}{2} \right].
 \end{aligned}$$



Obr.1.22. Vzájemná korelační funkce signálů typu sinus a kosinus.

& Poznatek z příkladu:

K největší shodě obou signálů dochází při nulovém posunutí $t = 0$. Pak

$$R(0) = R_{\max} = \frac{1}{T} \int u^2(t)dt = U_{ef}^2.$$

Kontrola: $R(0) = 1,5 U_m^2$; efektivní hodnota signálu $U_m[1 + \cos(Wt)]$ je $\sqrt{1,5}U_m$.

r 1.25. Signál $u(t) = 5\cos(Wt) + 2\sin(2Wt)$, $W = 2\pi/T = 2\pi F$, $T = 1\text{ms}$, $F = 1\text{kHz}$ je periodický s opakovací periodou 1ms. Vypočítejte jeho harmonické složky metodou DFT (10-ti bodové).

p Řešení:

Opakovací periodu rozdělíme na 10 dílů po 0,1 ms a vypočteme vzorky signálu $u(0)$, $u(T/10)$, $u(2T/10)$, ..., $u(9T/10)$, neboli použijeme vzorce:

$$u_k = u\left(k \frac{T}{10}\right) = 5\cos\left(k \frac{p}{5}\right) + 2\sin\left(k \frac{2p}{5}\right) \text{ pro } k = 0 \text{ až } 9.$$

Z těchto 10 vzorků pak vypočteme 10 koeficientů DFT a z nich amplitudy a počáteční fáze harmonických.

: Řešení můžeme provést například pomocí MATLABu:

```
k=0:9; % definice čísel vzorků
u=5*cos(k*pi/5)+2*sin(k*2*pi/5) % výpočet 10 vzorků signálu v 1 periodě
u =
Columns 1 through 7
    5.0000    5.9472    2.7207   -2.7207   -5.9472   -5.0000   -2.1430
Columns 8 through 10
   -0.3695    0.3695    2.1430
x=fft(u) % výpočet 10 koeficientů DFT
x =
Columns 1 through 4
    0.0000    25.0000 - 0.0000i    0.0000 -10.0000i    0.0000 - 0.0000i
Columns 5 through 8
    0.0000 + 0.0000i    0.0000 - 0.0000i    0.0000 - 0.0000i    0.0000 - 0.0000i
Columns 9 through 10
    0.0000 +10.0000i    25.0000 + 0.0000i
```

Program provedl výpočet komplexních koeficientů DFT podle (1.29) s následujícími výsledky:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_1 &= 25, \\ X_2 &= -10j, \\ X_3 &= 0, \\ X_4 &= 0, \\ X_5 &= 0, \\ X_6 &= 0, \\ X_7 &= 0, \\ X_8 &= 10j, \\ X_9 &= 25. \end{aligned}$$

Harmonické složky určíme podle (1.30):

$$\begin{aligned} \text{Stejnosečná složka:} \quad U_0 &= \frac{X_0}{N} = 0V. \\ \text{1.harmonická složka:} \quad U_1 &= \frac{2}{N} |X_1| = 0,2 \cdot 25 = 5V, \\ & \quad j_1 = 0^\circ. \\ \text{2.harmonická složka:} \quad U_2 &= \frac{2}{N} |X_2| = 0,2 \cdot 10 = 2V, \\ & \quad j_2 = \arg X_2 = -90^\circ. \end{aligned}$$

Další harmonické jsou nulové. Nenulové koeficienty č. 8 a 9 neznamenaají nenulovou 8. a 9. harmonickou, jsou nenulové díky periodicitě koeficientů DFT.

Výsledek analýzy plně odpovídá tomu, že signál má pouze 1. a 2. harmonickou o amplitudách 5V a 2V a počátečních fázích 0 a -90° .

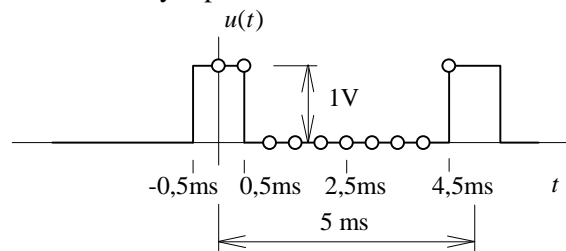
& Poznátky z příkladu:

- Spektrální složky vyšly přesně (ale díky tomu, že je splněna podmínka vzorkovacího teorému).
- Koeficienty DFT vykazují symetrii:

$$\mathfrak{X}_{N-n} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-jk(N-n)\frac{2p}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-jk2p} e^{jkn\frac{2p}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{jkn\frac{2p}{N}} = \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}_n^*$$

takže pro výpočet spektrálních složek jsou upotřebitelné jen do $N/2$.

- r 1.26.** Určete pomocí DFT spektrální složky obdélníku na obr.1.23. Srovnajte výsledky s příkladem 1.12, v němž bylo provedeno řešení klasickou metodou.



Obr.1.23. Periodický signál a volba 10 bodů pro výpočet 10-ti bodové DFT.

p Řešení:

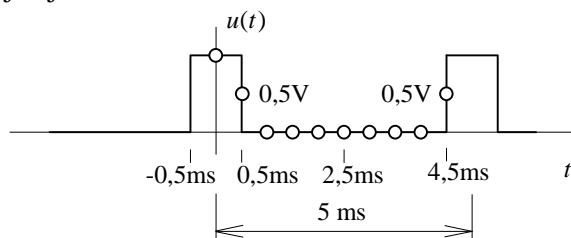
- Příklad použití MATLABu:

```
s=[1 1 0 0 0 0 0 0 1];
x=fft(s)
x =
Columns 1 through 4
3.0000    2.6180 + 0.0000i    1.6180 + 0.0000i    0.3820 + 0.0000i
Columns 5 through 8
-0.6180 - 0.0000i   -1.0000 - 0.0000i   -0.6180 - 0.0000i    0.3820 - 0.0000i
Columns 9 through 10
1.6180 - 0.0000i    2.6180 - 0.0000i
```

Výsledky jsou zapsány do tabulky (jsou označeny vlnovkou) spolu se správnými hodnotami získanými z př.1.12.

k	\mathfrak{X}_k	\tilde{U}_k [V]	\tilde{J}_k [rad]	U_k [V]	J_k [rad]
0	3	0,3	0	0,2	0
1	2,618	0,5236	0	0,3742	0
2	1,618	0,2236	0	0,3027	0
3	0,382	0,0764	0	0,2018	0
4	-0,618	0,01236	π	0,0935	0
5	-1	0,2	π	0	x
6	-0,618				
7	0,382				
8	1,618				
9	2,618				

Vidíme značné rozdíly mezi správnými hodnotami a údaji vypočtenými pomocí DFT. Chyba je v tom, že jsme zvolili příliš malý počet bodů na opakovací periodu. Při tak malém počtu bodů hraje mj. důležitou roli volba velikosti tzv. přechodového vzorku v místě nespojitosti signálu, v našem případě jsou to vzorky č. 1 a 9. Nejpřesnějšího výsledku v rámci daného počtu bodů dosáhneme volbou přechodových vzorků tak, jak je naznačeno na obrázku 1.24.

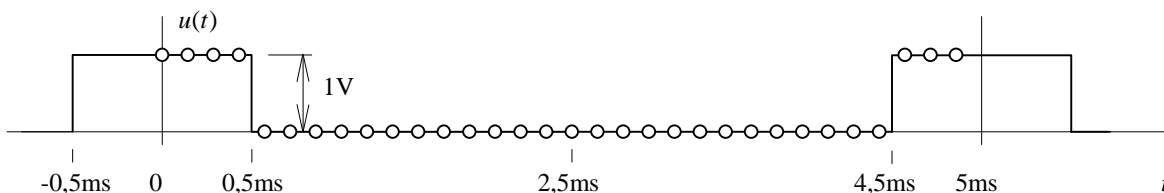


Obr.1.24. Optimální volba přechodových vzorků.

Provedeme-li opět výpočet koeficientů DFT, získáme výsledky z tabulky:

k	\tilde{x}_k	\tilde{U}_k [V]	\tilde{J}_k [rad]	U_k [V]	J_k [rad]
0	2	0,2	0	0,2	0
1	1,809	0,3618	0	0,3742	0
2	1,309	0,2618	0	0,3027	0
3	0,691	0,1382	0	0,2018	0
4	0,191	0,0382	0	0,0935	0
5	0	0	x	0	x

Chyba zejména u vyšších harmonických je však stále velká. Další obrázek ukazuje volbu bodů pro 32-bodovou DFT s výsledky v tabulce.



Obr.1.25. Volba bodů pro 32-bodovou DFT.

k	\tilde{x}_k	\tilde{U}_k [V]	\tilde{J}_k [rad]	U_k [V]	J_k [rad]
0	7	0,21875	0	0,2	0
1	6,4723	0,4045	0	0,3742	0
2	5,0273	0,3142	0	0,3027	0
3	3,0381	0,18988	0	0,2018	0
4	1	0,0625	0	0,0935	0
5	-0,6158	0,03849	π	0	x
6	-1,4966	0,09354	π	0,06237	π
7	-1,5687	0,09804	π	0,08649	π
8	-1	0,0625	π	0,07568	π
9	-0,1268	0,007925	π	0,04158	π
10	0,6682	0,04176	0	0	x

Výsledky DFT pro $N = 50$ s optimální volbou přechodových vzorků:

k	$\&$	\tilde{U}_k [V]	\tilde{J}_k [rad]	U_k [V]	J_k [rad]	% chyba amplitudy
0	10	0,2	0	0,2	0	0
1	9,3426	0,3737	0	0,3742	0	-0,13
2	7,5284	0,3011	0	0,3027	0	-0,53
3	4,9856	0,19942	0	0,2018	0	-1,18
4	2,2893	0,09157	0	0,0935	0	-2,06
5	0	0	x	0	x	0
6	-1,4846	0,05938	π	0,06237	π	-4,79
7	-2,0211	0,08084	π	0,08649	π	-6,53
8	-1,73	0,0692	π	0,07568	π	-8,56
9	-0,9262	0,03705	π	0,04158	π	-10,89
10	0	0	x	0	x	0

& Poznátka z příkladu:

- Při spektrální analýze periodických signálů, které vykazují prudké změny nebo dokonce body nespojitosti má velký význam volba tzv. přechodových vzorků. Tyto vzorky by se měly volit jako průměrné hodnoty limit zleva a zprava v bodech nespojitosti.
- Chybu, kterou jsou zatíženy vypočtené spektrální složky, lze snižovat zvětšováním počtu bodů DFT.
- Chybou jsou více zatíženy vyšší harmonické než nižší.

V praxi se volí N jako celočíselná mocnina čísla 2 pro urychlení výpočtů (algoritmus FFT). Běžně používané hodnoty N jsou 256, 512 a 1024.

- K velkým výpočetním chybám může rovněž dojít, není-li perioda signálu rozdělena výpočetními body na celistvý počet dílů.