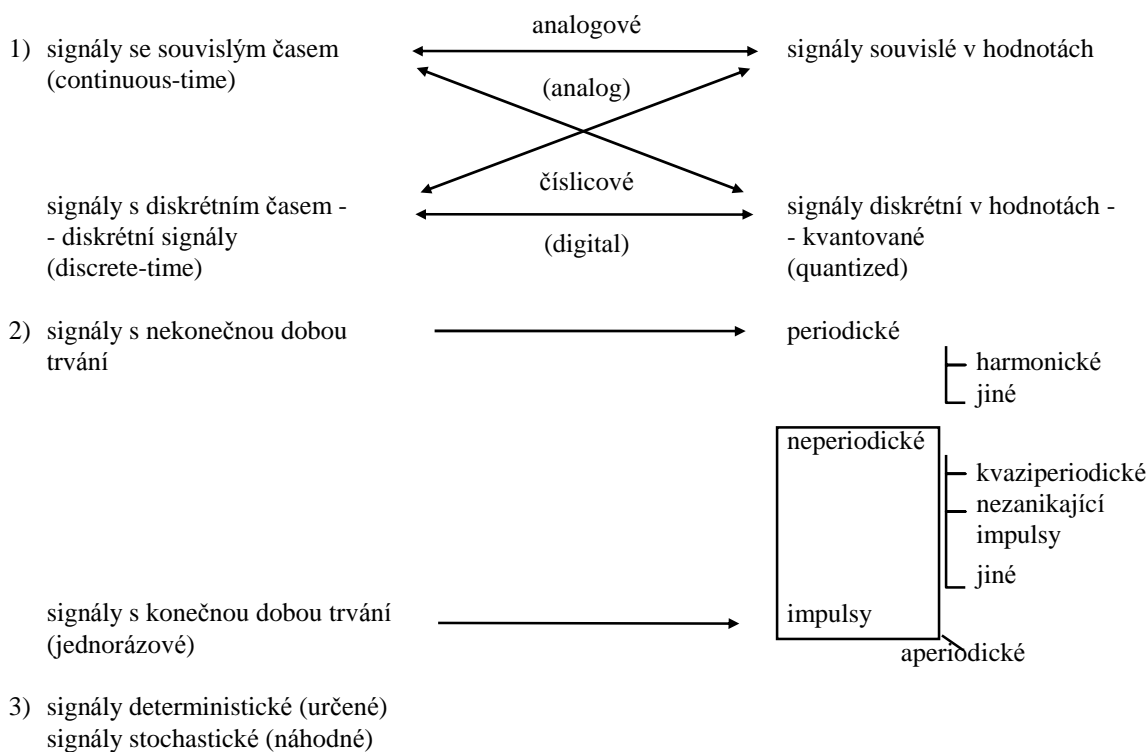


ELEKTRICKÉ SIGNÁLY

Komunikace mezi lidmi - ať už přímá nebo zprostředkovaná stroji - je založena na přenosu **informace**. Informace je produkována zdrojem obvykle v neelektrické podobě, které se říká **zpráva** nebo **sdělení** (řeč, hudba, obraz, text ...). Zpráva se pro účely přenosu na dálku, uchování, zabezpečení atd. převádí na **signál**, což je fyzikální vyjádření zprávy. Často se signálem zúženě chápe časový průběh fyzikální veličiny, nesoucí informaci. Je-li fyzikální veličinou napětí nebo proud, hovoříme o **elektrických signálech**.

Každý pokus o popis skutečně existujícího signálu v matematické nebo grafické formě vede na tvorbu jeho **modelu**. Analýzou modelu pak zjišťujeme vlastnosti skutečného signálu více či méně přesně podle toho, s jak přesným modelem pracujeme.

Dělení signálů a jejich modelů:



Reálné signály jsou většinou náhodné aperiodické, protože parametry technicky generovaných signálů jsou náhodně ovlivňovány prostředím. S velkou přesností je však mnohdy můžeme nahradit deterministickými modely, např. modely periodických signálů.

1. SIGNÁLY SE SOUVISLÝM ČASEM

1.1. PERIODICKÉ SIGNÁLY

Vykazují periodicitu podle vzorce

$$s(t) = s(t + T_1). \quad (1.1)$$

Nejmenší číslo T_1 [s] splňující vzorec (1.1) je **opakovací perioda** signálu. Reciproká hodnota

$$F_1 = \frac{1}{T_1} \text{ [Hz]} \quad (1.2)$$

je opakovací kmitočet.

$$W_1 = 2\pi F_1 \text{ [rad/s]} \quad (1.3)$$

je kruhový opakovací kmitočet.

Globální charakteristiky periodických signálů - energie, výkon, střední hodnota, efektivní hodnota

Vyčísľují se integrálem signálu přes jednu opakovací periodu, přičemž je lhostejné, kde zvolíme počáteční bod integrace.

Okamžitý výkon signálu (normovaný)

$$p(t) = s^2(t). \quad (1.4)$$

Je to výkon, přeměňovaný v teplo na normované zátěži 1Ω , působí-li na tuto zátěž signál $s(t)$ ve formě napětí nebo proudu.

Energie v jedné periodě signálu (normovaná)

$$W = \int_{T_1} p(t) dt = \int_{T_1} s^2(t) dt \text{ [J]}. \quad (1.5)$$

Střední výkon za jednu periodu signálu (normovaný)

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} p(t) dt = \frac{W}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s^2(t) dt \text{ [W]}. \quad (1.6)$$

Střední hodnota za jednu periodu (stejnoseměrná složka)

$$S_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s(t) dt \text{ [jednotka signálu]}. \quad (1.7)$$

Efektivní hodnota (druhá odmocnina ze středního výkonu)

$$S_{ef} = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_{T_1} s^2(t) dt} \text{ [jednotka signálu]}. \quad (1.8)$$

Vzájemná energie dvou periodických signálů s_1 a s_2 se soudělnými periodami (T_1 je větší z obou period)

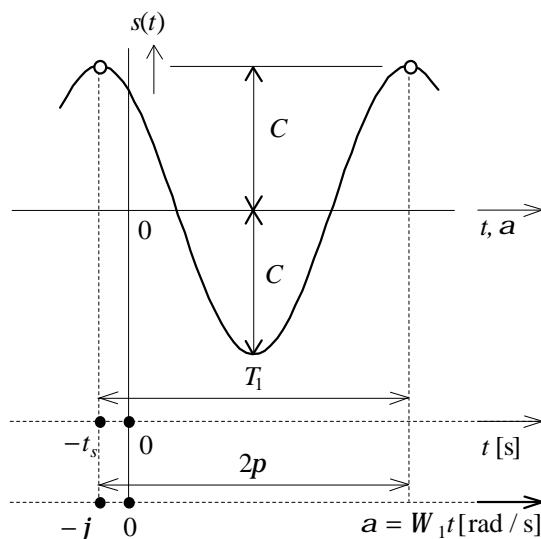
$$W_{12} = W_{21} = \int_{T_1} s_1(t) s_2(t) dt \text{ [J]}. \quad (1.9)$$

Vzájemný střední výkon dvou periodických signálů s_1 a s_2 se soudělnými periodami

$$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s_1(t) s_2(t) dt \quad [\text{W}]. \quad (1.10)$$

Jsou-li vzájemné energie (výkony) nulové, pak jsou signály s_1 a s_2 vůči sobě **ortogonální**.

Harmonický signál



Obr.1.1. Harmonický signál a jeho základní parametry.

Jeho 3 základní parametry: amplituda C ($C \geq 0$)
 opakovací frekvence F [Hz]
 počáteční fáze j [$^\circ$ nebo rad]

Další související parametry: velikosti kosinové a sinové složky A a B
 (viz obr. a další text) kruhová opakovací frekvence W_1
 opakovací perioda T_1
 časový posuv t_s

Globální charakteristiky harmonického signálu:

Střední hodnota za jednu periodu

$$S_0 = 0. \quad (1.11)$$

Střední hodnota kladné půlvlny

$$S_+ = \frac{2}{p} C \approx 0,6366 C. \quad (1.12)$$

Efektivní hodnota

$$S_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} C \approx 0,7071 C. \quad (1.13)$$

Matematické modely harmonického signálu:

$$s(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \geq 0!}}{C} \cos(W_1 t + j) = \underset{s_c(t)}{A \cos W_1 t} + \underset{s_s(t)}{B \sin W_1 t}, \quad (1.14)$$

kde $s_c(t)$ - kosinová složka,
 $s_s(t)$ - sinová složka.

Přepočítávací vztahy:

$$j = W_1 t_s; \quad W_1 = 2\pi F_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (1.15)$$

$$A = C \cos j \quad j = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{B}{A}, & \mathbf{K} A \geq 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{B}{A} + \pi, & \mathbf{K} A < 0 \end{cases}$$

$$B = -C \sin j$$

Komplexní vyjádření harmonického signálu (založeno na $\cos a = \frac{1}{2}e^{ja} + \frac{1}{2}e^{-ja}$) - proti sobě rotující fáze

$$s(t) = \frac{C}{2} e^{j\omega t} e^{jW_1 t} + \frac{C}{2} e^{-j\omega t} e^{-jW_1 t} = \mathbf{K} e^{jW_1 t} + \mathbf{K} e^{-jW_1 t}$$

$$\mathbf{K} = \frac{C}{2} e^{j\omega t} \Rightarrow |\mathbf{K}| = \frac{C}{2}, \arg \mathbf{K} = j$$

Stejnoseměrný signál jako zvláštní případ harmonického signálu pro $W_1 = 0$:

Stejnoseměrný signál $C > 0$ ($C < 0$) je zvláštním případem harmonického signálu o amplitudě $|C|$, počáteční fázi $j = 0$ ($j = 180^\circ$) a kmitočtu $W_1 = 0$ rad/s.

Fourierova řada periodického signálu

Je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $s_p(t)$ s opakovacím kmitočtem F_1 lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $k.F_1, k = 1, 2, 3, \dots$:

$$s_p(t) = S_0 + S_1 \cos(W_1 t + j_1) + S_2 \cos(2.W_1 t + j_2) + \mathbf{K} + S_k \cos(k.W_1 t + j_k) + \mathbf{K} =$$

$$= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos(k W_1 t + j_k), \quad (1.17)$$

kde S_0 - střední hodnota (stejnoseměrná složka),
 S_k - amplituda k -té harmonické složky ($S_k \geq 0$),
 $k W_1$ - opakovací kmitočet k -té harmonické složky,
 j_k - počáteční fáze k -té harmonické složky.

Výpočet S_k pomocí Fourierových koeficientů typu C_k , A_k , B_k & (různé tvary Fourierovy řady):

$$s_p(t) = \underbrace{\frac{C_0}{S_0}}_{\substack{\text{kosinový} \\ \text{tvar Fourierovy řady}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{C_k}{S_k}}_{\substack{\text{složkový} \\ \text{tvar Fourierovy řady}}} \cos(kW_1 t + j_k) = \underbrace{\frac{C_0}{S_0}}_{\substack{\text{kosinový} \\ \text{tvar Fourierovy řady}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{2 \frac{C_k}{S_k}}_{\substack{\text{složkový} \\ \text{tvar Fourierovy řady}}} \cos(kW_1 t + \arg(\underbrace{C_k}_{j_k})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{C_k}_{\substack{\text{komplexní} \\ \text{tvar Fourierovy řady}}} e^{jkW_1 t} = \quad (1.18)$$

$$= \frac{A_0}{S_0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kW_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kW_1 t).$$

Výpočet Fourierových koeficientů z časového průběhu signálu během jedné opakovací periody

$$A_k = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} s_p(t) \cos(kW_1 t) dt \dots\dots\dots = 0 \text{ pro liché signály: } s_p(t) = -s_p(-t),$$

$$B_k = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} s_p(t) \sin(kW_1 t) dt \dots\dots\dots = 0 \text{ pro sudé signály: } s_p(t) = s_p(-t), \quad (1.19)$$

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s_p(t) e^{-jkW_1 t} dt \dots\dots\dots = \frac{A_k - jB_k}{2}.$$

Obecné vlastnosti Fourierovy řady periodického signálu

a) Linearita ($s_1(t)$ a $s_2(t)$ musí mít stejnou opakovací periodu):

signál	koeficienty C_k
$s_1(t)$	$C_{1,k}$
$s_2(t)$	$C_{2,k}$
$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$	$a_1 C_{1,k} + a_2 C_{2,k}$

(1.20)

b) Posun periodického signálu v čase:

signál	koeficienty C_k
$s(t)$	C_k
$s(t - t)$	$C_k e^{-jkW_1 t}$

(1.21)

c) Posun spektrálních čar:

signál	koeficienty C_k
$s(t)$	C_k
$s(t) e^{jmW_1 t}$, m celé	C_{k-m}

(1.22)

d) Přesměrování toku času:

signál	koeficienty $\&_k$
$s(t)$	$\&_k$
$s(-t)$	$\&_{-k} = \&_k^*$

(1.23)

e) Derivace periodického signálu:

signál	koeficienty $\&_k$
$s(t)$	$\&_k$
$\frac{d}{dt}s(t)$	$jkW_1\&_k$

(1.24)

f) Součin dvou signálů se stejnou opakovací periodou:

signál	koeficienty $\&_k$
$s_1(t)$	$\&_{1,k}$
$s_2(t)$	$\&_{2,k}$
$s_1(t)s_2(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \&_{1,n} \&_{2,k-n}$

(1.25)

g) Konvoluční součin dvou periodických signálů v rámci 1 periody:

signál	koeficienty $\&_k$
$s_1(t)$	$\&_{1,k}$
$s_2(t)$	$\&_{2,k}$
$\int_{T_1} s_1(x)s_2(t-x)dx$	$\&_{1,k} \&_{2,k}$

(1.26)

Spektrum periodického signálu

je tvořeno množinou jeho harmonických složek. Graficky se spektrum znázorňuje spektrálními čarami jako *amplitudové* a *fázové spektrum*.

Parsevalův teorém pro periodické signály

Kvadrát efektivní hodnoty (= normovaný výkon) periodického signálu se rovná součtu kvadrátů efektivních hodnot jeho harmonických složek:

$$S_{ef}^2 = S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{S_k}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (1.27)$$

Zápis pomocí Fourierových koeficientů:

$$S_{ef}^2 = \frac{C_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2). \quad (1.28)$$

Vztah Fourierovy řady periodického signálu a DFT

Pomocí algoritmu DFT (diskrétní Fourierovy transformace) lze s danou přesností vypočítat spektrální složky periodického signálu z vzorků tohoto signálu.

DFT - předpis pro výpočet N spektrálních čar signálu z N vzorků signálu.

Děje se nepřímě ve dvou krocích:

1) Výpočet komplexních koeficientů DFT:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-jkn2\pi/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (1.29)$$

$s_k = s(k T_1/N)$... k -tý vzorek signálu v periodě

2) Výpočet harmonických složek z koeficientů DFT:

stejnoseměrná složka: $S_0 = X_0/N = X_0/N$

n -tá harmonická: amplituda $S_n = 2|X_n|/N$ (1.30)

fáze $j_n = \arg(X_n)$

Koeficienty DFT vykazují symetrii a periodicitu podle vzorce

$$X_n = X_{N-n}^*, \quad (1.31)$$

takže hodláme-li vypočít m spektrálních čar, musíme zvolit počet bodů $N \geq 2m$.

Poznámka: Výpočet spektrálních čar periodického signálu pomocí DFT není přesný, pokud signál nespĺňuje vzorkovací podmínku (viz kapitola 5). Pak chyba výpočtu obecně klesá při růstu počtu bodů N .

Korelační funkce periodických signálů

Na vzájemnou podobnost signálů lze usuzovat pomocí jejich vzájemných energií, resp. výkonů. Mnohdy však stačí jeden ze signálů posunout oproti druhému a míra „podobnosti“ se naprosto změní. Funkční závislost vzájemných středních výkonů dvou signálů za jednu periodu na vzájemném posunutí signálů t je **korelační funkce**. Jedná-li se o dva stejné signály, hovoříme o **autokorelační funkci**.

Vzájemná korelační funkce periodických signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$:

$$R_{12}(t) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s_1(t) s_2(t+t) dt \quad \dots \text{posouváme } s_2(t) \text{ vůči } s_1(t), \quad (1.32)$$

$$R_{21}(t) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s_2(t) s_1(t+t) dt \dots \text{posouváme } s_1(t) \text{ vůči } s_2(t). \quad (1.33)$$

Platí

$$R_{21}(t) = R_{12}(-t). \quad (1.34)$$

Korelační funkce periodických signálů je periodická se stejnou opakovací periodou T_1 . Proto ji lze rozložit do Fourierovy řady:

$$R_{12}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{c}_{k,1}^* \mathfrak{c}_{k,2} e^{jkW_1 t}, \quad R_{21}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{c}_{k,1} \mathfrak{c}_{k,2}^* e^{jkW_1 t}, \quad (1.35)$$

kde $\mathfrak{c}_{k,1}$ a $\mathfrak{c}_{k,2}$ jsou komplexní Fourierovy koeficienty signálů $s_1(t)$ a $s_2(t)$.

Autokorelační funkce signálu $s(t)$:

$$R(t) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s(t) s(t+t) dt. \quad (1.36)$$

Je sudou funkcí posunutí t :

$$R(-t) = R(t). \quad (1.37)$$

Nabývá maxima pro $t = 0$:

$$R_{\max} = R(0) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} s^2(t) dt = S_{ef}^2. \quad (1.38)$$

Je periodická s opakovací periodou $T_1 \Rightarrow$ existuje její Fourierova řada (zobecnění Parsevalova teoremu):

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathfrak{c}_k|^2 e^{jkW_1 t} = |\mathfrak{c}_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\mathfrak{c}_k|^2 \cos(kW_1 t) = S_0^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{S_k}{\sqrt{2}} \right)^2}_{S_{k,ef}^2} \cos(kW_1 t) \quad (1.39)$$

- Všechny harmonické složky autokorelační funkce jsou kosinusové (důsledek sudosti) s nulovými počátečními fázemi. Amplituda k -té harmonické je kvadrátem efektivní hodnoty k -té harmonické signálu $s(t)$.
- Ne každá periodická funkce tedy může být autokorelační funkcí signálu.
- Periodické signály se stejným amplitudovým a různými fázovými spektry mají stejnou autokorelační funkci.