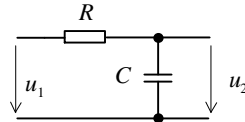


ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

- r 2.1.** Odvoďte přenosovou funkci a komplexní přenos RC článku na obr.2.3, je-li vstupem napětí u_1 a výstupem napětí u_2 . Uvažujte $R = 10\text{k}\Omega$ a $C = 100\text{nF}$.



Obr.2.3. Analyzovaný obvod 1.řádu.

p Řešení:

Článek vybudíme harmonickým napětím

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + j_1),$$

které je popsáno Fourierovým koeficientem

$$\&_1 = \frac{U_1}{2} e^{j j_1}.$$

Obvod přejde do harmonického ustáleného stavu, výstupní napětí bude

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + j_2)$$

a bude mu příslušet koeficient

$$\&_2 = \frac{U_2}{2} e^{j j_2}.$$

Jde o dělič napětí tvořený rezistorem o odporu R a kapacitorem o reaktanci $1/(j\omega C) = 1/(pC)$. Proto

$$K(p) = \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC} = \left(\begin{array}{l} RC = \tau = 1 \text{ ms} \quad \dots \text{časová konstanta} \\ 1/RC = \omega_m = 1 \text{ krad/s} \quad \dots \text{mezní kmitočet} \end{array} \right) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_m}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{1000}},$$

$$\frac{\&_2}{\&_1} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{1000}}.$$

- r 2.2.** Nakreslete amplitudovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku článku z př.2.1.

p Řešení:

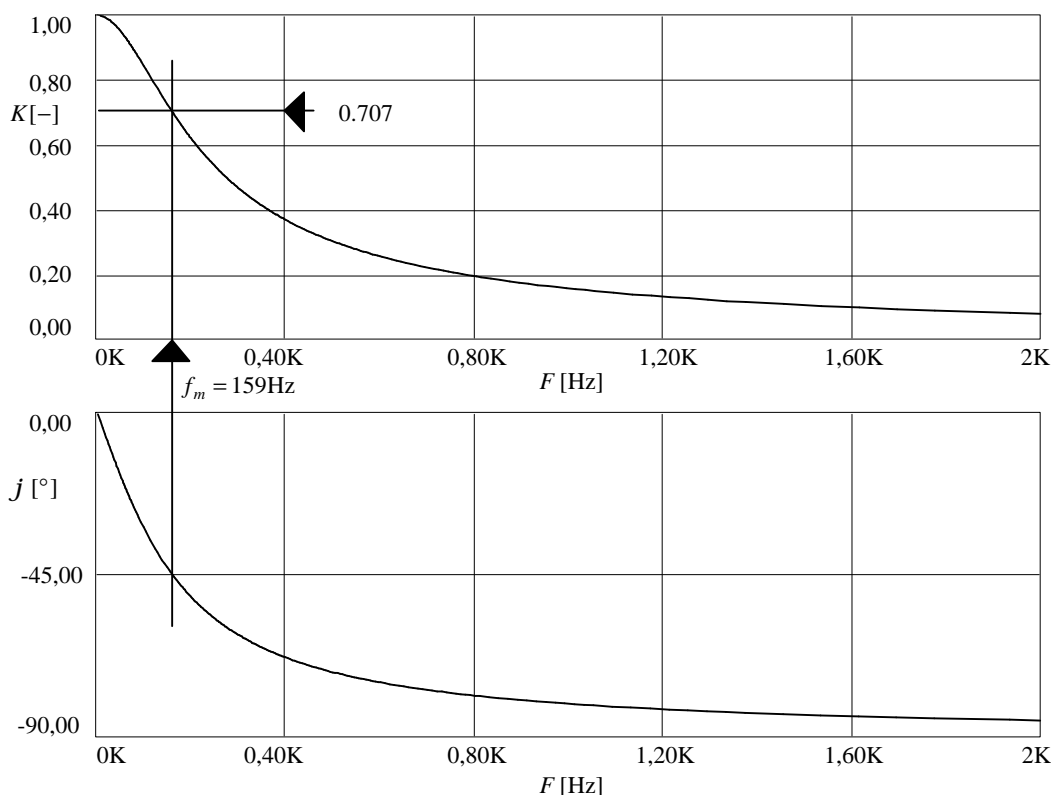
$$\frac{\&_2}{\&_1} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\omega_m}} \Rightarrow$$

matematický popis amplitudové kmitočtové charakteristiky:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}},$$

matematický popis fázové kmitočtové charakteristiky:

$$j(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_m} = -\arctg \frac{\omega}{1000}.$$



Obr.2.4. Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika obvodu z obr.2.3.

& Poznátky z příkladů 2.1 a 2.2:

- RC článek s výstupem na kapacitoru se chová jako filtr typu dolní propust. Za hranici mezi propustným a útlumovým pásmem se považuje mezní kmitočet

$$\omega_m = \frac{1}{\text{časová konstanta}} = \frac{1}{RC}, \text{ resp. } f_m = \frac{1}{2\pi RC}, \quad (2.8)$$

při němž poklesne přenos na $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ hodnoty přenosu na kmitočtu 0Hz. Fázový posuv článku na mezním kmitočtu je -45° .

- Filtr je 1.řádu, protože obvod obsahuje jediný akumulární prvek a nejvyšší mocnina operátoru p v přenosové funkci je 1.

• Příklad programu v MATLABu pro vykreslení kmitočtových charakteristik:

```
a=[1e-3 1];           % zadání koeficientů jmenovatele přenosové funkce K(p)
b=[0 1];             % zadání koeficientů čitatele přenosové funkce K(p)
f=0:5:2e3;          % zadání rozsahu kmitočtů a kroku výpočtu
omega=2*pi*f;       % přepoččet na kruhový kmitočet
h=freqs(b,a,omega); % výpočet komplexní kmitočtové charakteristiky (funkce z Signal
                    % Processing Toolboxu)
```

mag=abs(h);	% výpočet amplitudové kmitočtové charakteristiky
plot(f,mag);	% vykreslení amplitudové kmitočtové charakteristiky
% phase=angle(h);	% případný výpočet fázové kmitočtové charakteristiky
% plot(f,phase);	% případné vykreslení fázové kmitočtové charakteristiky

r 2.3. Vypočítejte reaktanci kapacitoru v př.2.1 na mezním kmitočtu.

p Řešení:

$$\omega_m = \frac{1}{RC} = 10^3 \text{ rad/s} \Rightarrow f_m = 159,2 \text{ Hz.}$$

$$X_c = \frac{1}{j\omega_m C} = \frac{1}{j \frac{1}{RC}} = -jR = -j10 \text{ k}\Omega = 10 \text{ k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega.$$

& Poznatek z příkladu:

Na mezním kmitočtu RC článku z příkladu 1 je velikost reaktance kapacitoru stejná jako odpor rezistoru. Přenos napětí tohoto RC děliče však není 0,5, nýbrž $1/\sqrt{2} \approx 0,707$, protože napětí na R a na C nejsou ve fázi, nýbrž jsou vzájemně posunuta o 90° .

r 2.4. Nakreslete amplitudovou kmitočtovou charakteristiku článku z př.2.1 v logaritmických souřadnicích: osa kmitočtu logaritmická, přenos v decibelech ($K_{\text{dB}} = 20 \log K$).

p Řešení:

(Viz obr.2.5.)

$$K_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \approx \begin{cases} 0 & \dots \omega \ll \omega_m \\ -20 \log \frac{\omega}{\omega_m} & \dots \omega \gg \omega_m \\ -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB} & \dots \omega = \omega_m \end{cases}$$

& Poznátky z příkladu:

Logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika obvodu 1.řádu se dá dobře aproximovat dvěma asymptotami - lomenou čarou s kmitočtem lomu ω_m , nad ω_m pokles se strmostí 20dB/dekádu ($\approx 6\text{dB/oktávu}$).

Pro obvod n-tého řádu

$$\text{strmost poklesu} = 20 \cdot n \text{ dB / dekádu} . \quad (2.9)$$

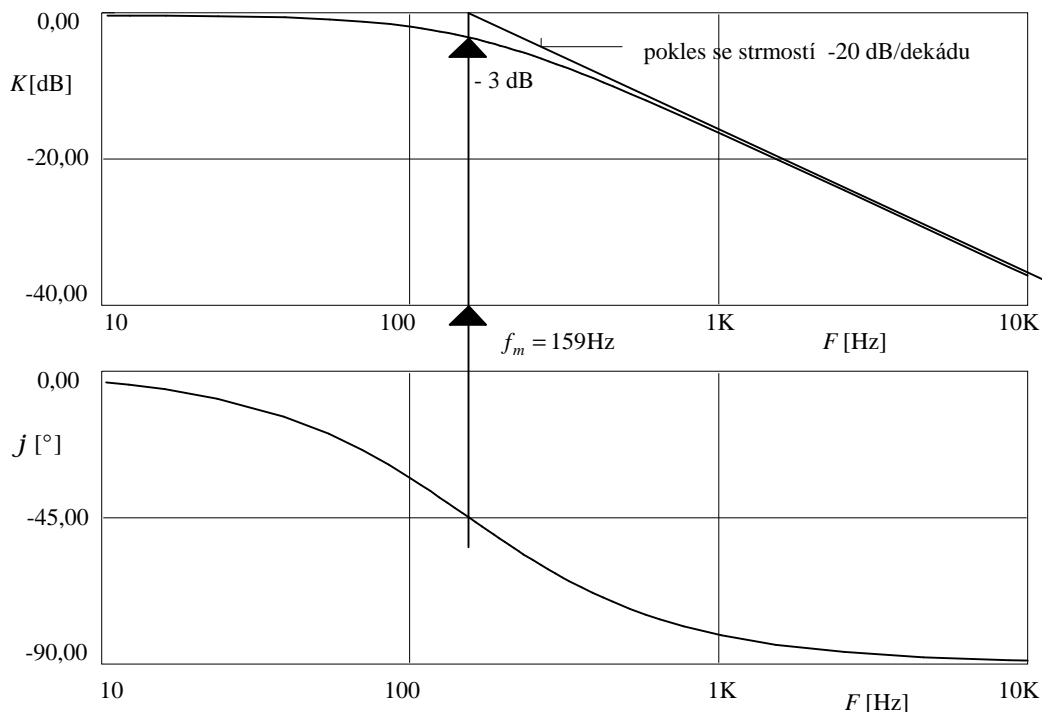
Na mezním kmitočtu je ve skutečnosti pokles o 3dB.

• Příklad programu v MATLABu pro vykreslování logaritmických kmitočtových charakteristik:

a=[1e-3 1];	% zadání koeficientů jmenovatele přenosové funkce K(p)
b=[0 1];	% zadání koeficientů čitatele přenosové funkce K(p)
f=10:20:1e4;	% zadání rozsahu kmitočtů a kroku výpočtu
omega=2*pi*f;	% přepočítání na kruhový kmitočtet
h=freqs(b,a,omega);	% výpočet komplexní kmitočtové charakteristiky (funkce z Signal Processing Toolboxu)

```

mag=abs(h);           % výpočet amplitudové kmitočtové charakteristiky
magdb=20*log10(mag); % přepočítání na decibely
semilogx(f,magdb);   % vykreslení amplitudové kmitočtové charakteristiky v log. ose
                    % kmitočtu
% phase=angle(h);    % případný výpočet fázové kmitočtové charakteristiky
% semilogx(f,phase); % případné vykreslení fázové kmitočtové charakteristiky
    
```



Obr.2.5. Kmitočtové charakteristiky obvodu z obr.2.3 v logaritmicích souřadnicích.

r 2.5. Na vstup RC článku z př.2.1 přivedeme harmonické napětí

$$u_1(t) = 2 \cos(\omega t) \text{ [V]}, \quad \omega = 2\pi F, \quad F = 1 \text{ kHz.}$$

Na základě znalosti přenosové funkce z př.2.1 vypočítejte napětí u_2 a napětí na rezistoru.

p Řešení:

Komplexní přenos na kmitočtu $F = 1 \text{ kHz}$:

$$\underline{K} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2p \cdot 10^3}{10^3}\right)^2} e^{-j \arctg \frac{2p \cdot 10^3}{10^3}} = 0,157 e^{-j81^\circ}.$$

Proto

$$\underline{U} = \frac{2}{2} = 1 \text{ V,}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{K} \cdot \underline{U} = 0,157 e^{-j81^\circ} \text{ V} \Rightarrow C_2 = 2|\underline{U}_2| = 0,314 \text{ V, } j_2 = -81^\circ \Rightarrow$$

$$u_2(t) = 0,314 \cos(\omega t - 81^\circ) \text{ V,}$$

$$u_R(t) = u_1(t) - u_2(t) \Rightarrow \underline{u}_R = \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = 1 - 0,157e^{-j81^\circ} - 0,988e^{j9,04^\circ} \Rightarrow C_R = 2|\underline{u}_R| = 1,975V \Rightarrow u_R(t) = 1,975\cos(\omega t + 9,04^\circ)V.$$

& Poznátky z příkladu:

- Kmitočet vstupního signálu 1kHz je podstatně vyšší než mezní kmitočet článku $1/(2pRC) \approx 159\text{Hz}$, takže výstupní napětí je již značně utlumeno a prakticky celé vstupní napětí je na rezistoru.
- Budeme-li výstupní napětí odebírat z rezistoru, dostaneme filtr typu horní propust.

r 2.6. Vypočítejte přenosovou funkci RC článku z př.2.1 za předpokladu, že výstupní napětí je odebráno z rezistoru.

p Řešení:

$$K(p) = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1 + pRC} = \frac{\frac{p}{\omega_m}}{1 + \frac{p}{\omega_m}} = \frac{\frac{p}{1000}}{1 + \frac{p}{1000}}.$$

& Poznátky z příkladu:

- Přenosová funkce obvodu 1.řádu je obecně ve tvaru

$$K(p) = \frac{a_1 p + a_0}{p + b_0}.$$

- Koeficient b_0 představuje kruhový mezní kmitočet obvodu. Čitatelem je dán typ filtru:

- U dolní propusti je

$$a_1 = 0.$$

- U horní propusti je

$$a_0 = 0.$$

- U fázovacího článku je

$$a_0 = -a_1 b_0.$$

r 2.7. Na vstup RC článku z př.2.1 přivedeme součet napětí

$$u_1(t) = 10\cos(\omega_1 t) + 0,1\cos(\omega_2 t), \quad \omega_1 = 2\pi F_1, F_1 = 5\text{Hz}, \quad \omega_2 = 2\pi F_2, F_2 = 5\text{kHz}.$$

Vypočítejte napětí na kapacitoru a na rezistoru v harmonickém ustáleném stavu.

p Řešení:

Označme symboly $\underline{K}_C = K_C e^{j\varphi_C}$ a $\underline{K}_R = K_R e^{j\varphi_R}$ komplexní přenosy ze vstupu na kapacitor a na rezistor. Příklad vyřešíme pomocí principu superpozice.

Signál $10\cos(\omega_1 t)$ vyvolá napětí na kapacitoru

$$u_{C1} = 10K_C(\omega_1) \cos[\omega_1 t + \varphi_C(\omega_1)] = 9,995\cos(\omega_1 t - 1,8^\circ)V$$

a na rezistoru

$$u_{R1} = 10K_R(\omega_1) \cos[\omega_1 t + \varphi_R(\omega_1)] = 0,314\cos(\omega_1 t + 88,2^\circ)V.$$

Podobně signál $0,1\cos(\omega_2 t)$ vyvolá napětí na kapacitoru

$$u_{C2} = 0,1K_C(W_2) \cos[W_2t + j_C(W_2)] \approx 3,181 \cdot 10^{-3} \cos(W_2t - 88,2^\circ) \text{ V}$$

a na rezistoru

$$u_{R2} = 0,1K_R(W_2) \cos[W_2t + j_R(W_2)] \approx 0,0999 \cos(W_2t + 1,8^\circ) \text{ V.}$$

Podle principu superpozice tedy bude výsledek

$$u_C = u_{C1} + u_{C2} \approx 9,995 \cos(W_1t - 1,8^\circ) + 3,181 \cdot 10^{-3} \cos(W_2t - 88,2^\circ) \text{ V,}$$

$$u_R = u_{R1} + u_{R2} \approx 0,314 \cos(W_1t + 88,2^\circ) + 0,0999 \cos(W_2t + 1,8^\circ) \text{ V.}$$

& Poznátky z příkladu:

- Obě harmonické složky, přicházející na vstup RC článku současně, se rozdělí takto:
 - prakticky celé napětí nízkého kmitočtu 5Hz se objeví na kapacitoru (výstup DP),
 - prakticky celé napětí vyššího kmitočtu 5kHz se objeví na rezistoru (výstup HP).
Obvod tedy funguje jako „kmitočtová výhybka“.

r 2.8. Jednocestně usměrněný harmonický signál $u(t)$ má tvar kladných půlvln s opakovacím kmitočtem F . Tento signál je vyhlazován RC členem typu dolní propust, který má mezní kmitočet poloviční než je kmitočet pulsů:

$$f_m = \frac{w_m}{2p} = \frac{F}{2}.$$

Usměrněný signál je dobře popsatelný svou stejnosměrnou složkou, první a druhou harmonickou (viz př.1.22):

$$u(t) \approx 3,7 + 5,5 \cos(2p Ft) + 2,1 \cos(4p Ft) [\text{V, s}].$$

Vypočítejte spektrum výstupního signálu a pomocí Fourierovy řady nakreslete časový průběh.

p Řešení:

Pro výpočet Fourierovy řady výstupního signálu použijeme vzorec amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky článku z příkladu 2.2. Postupným dosazováním kmitočtů $w/w_m = 0, 2$ a 4 získáme hodnoty přenosu amplitudy a fázového posuvu stejnosměrné složky, první a druhé harmonické. Z těchto údajů určíme členy Fourierovy řady výstupního signálu

$$u'(t) \approx 3,7 + 2,475 \cos(2p Ft - 63^\circ) + 0,504 \cos(4p Ft - 76^\circ) [\text{V, s}]$$

a nakreslíme časový průběh. Celý postup je schématicky znázorněn na obr.2.6.

r 2.9. Za jakých podmínek se bude chování RC článku z př.2.1 blížit chování ideálního přenosového článku?

p Řešení:

Jestliže kmitočtové spektrum vstupního signálu bude rozloženo do oblasti kmitočtů

$$f \ll f_m,$$

kde f_m je mezní kmitočet článku. V této oblasti je amplitudová kmitočtová charakteristika přibližně konstantní a fázová charakteristika přibližně lineární - viz obr.2.7:

$$K \approx 1,$$

$$j \approx -\frac{w}{w_m} = -wt.$$

Obr.2.6. Schématické znázornění řešení příkladu 2.8.

Pak signál projde článkem prakticky beze změny tvaru, bude pouze na výstupu zpožděn oproti vstupu o posunutí

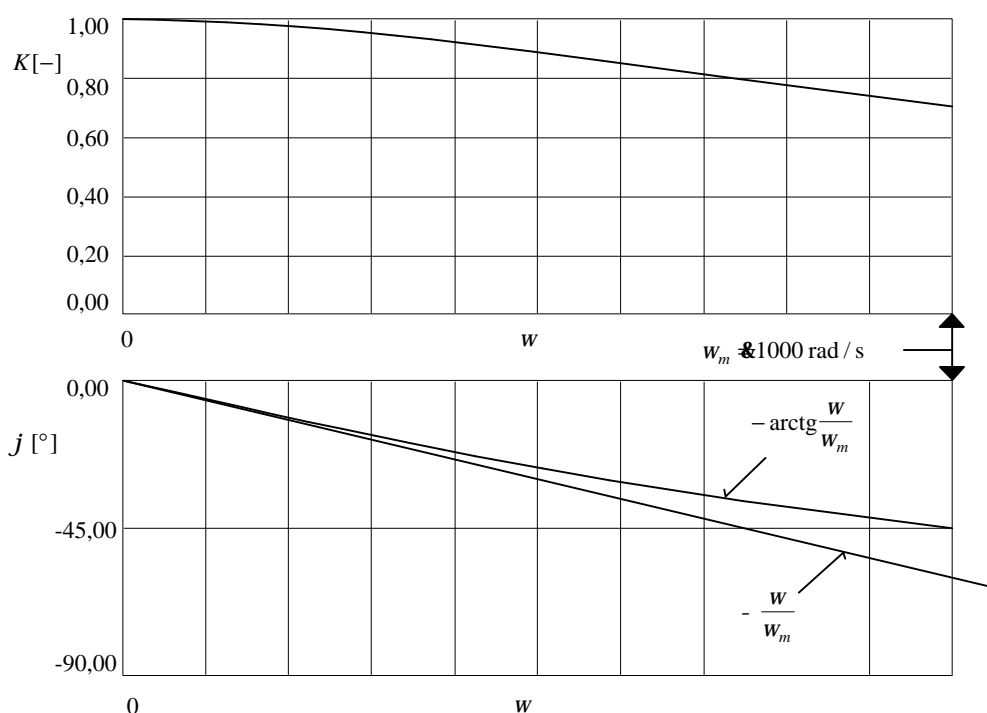
$$Dt = -\frac{j}{w} = t = RC = 1\text{ms}.$$

G Trocha teorie:

Linearitu fázové charakteristiky můžeme dobře sledovat tím, že ji zderivujeme podle kmitočtu. Dostaneme kmitočtovou závislost tzv. skupinového zpoždění (group delay) t_s :

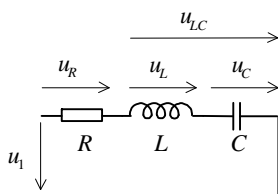
$$t_s = -\frac{d}{dw}j(w). \quad (2.10)$$

V případě lineární fázové charakteristiky vychází skupinové zpoždění konstantní nezávislé na frekvenci. Závislost skupinového zpoždění na kmitočtu znamená fázové zkreslení signálu.



Obr.2.7. Detail kmitočtových charakteristik RC článku typu DP v oblasti počátku souřadnic.

- r 2.10.** Určete přenosové funkce filtrů 2. řádu, je-li výstupní napětí odebíráno z těchto součástek:
 a) C , b) L , c) R , d) sériová kombinace L a C . Uvažujte tyto parametry součástek:
 $L = 1\text{H}$, $C = 100\text{nF}$, $R = 100\Omega$.



Obr.2.8. Analyzovaný obvod 2.řádu - sériový rezonanční obvod.

p Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } K_{1,C}(p) &= \frac{\frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC + p^2 LC} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{10^7}{p^2 + 100p + 10^7}, \\ \text{b) } K_{1,L}(p) &= \frac{pL}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 LC}{1 + pRC + p^2 LC} = \frac{p^2}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{p^2}{p^2 + 100p + 10^7}, \\ \text{c) } K_{1,R}(p) &= \frac{R}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1 + pRC + p^2 LC} = \frac{p\frac{R}{L}}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{100p}{p^2 + 100p + 10^7}, \\ \text{d) } K_{1,LC}(p) &= \frac{pL + \frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 LC + 1}{1 + pRC + p^2 LC} = \frac{p^2 + \frac{1}{LC}}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{p^2 + 10^7}{p^2 + 100p + 10^7}. \end{aligned}$$

& Poznátky z příkladu:

- Přenosová funkce je racionální lomená funkce komplexního kmitočtu $p = j\omega$.
- Jmenovatel všech přenosových funkcí jednoho systému je stejný, nezávisí na volbě výstupu.
- Nejvyšší mocnina komplexního kmitočtu ve jmenovateli udává řád systému.
- Čítec přenosové funkce závisí na výběru výstupu, nejvyšší mocnina komplexního kmitočtu v čitateli je maximálně rovna řádu, t.j. nemůže být větší než ve jmenovateli.

G Trocha teorie - systémy 2. řádu:

Jmenovatel je ve tvaru

$$p^2 + \frac{w_r}{Q} p + w_r^2, \quad (2.11)$$

kde

w_r ... rezonanční kmitočet (pro náš příklad $w_r = 1/\sqrt{LC} \approx 3162 \text{ rad/s} \Rightarrow f_r \approx 503 \text{ Hz}$),

Q ... činitel jakosti (pro náš příklad $Q = w_r L/R = \sqrt{L/C}/R \approx 31,6$).

Dojde-li k náhlé změně úrovně signálu na vstupu obvodu 2. řádu, bude obvod dokmitávat do nového ustáleného stavu. Dokmitý budou mít nižší kmitočet než je rezonanční kmitočet:

$$w_{kmit} = w_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < w_r. \quad (2.12)$$

Při $Q = 0,5$ vychází $w_{kmit} = 0$. Pro $Q \leq 0,5$ bude systém tak utlumený, že bude reagovat na změny buzení monotónně, nikoliv kmitavě, i když se jedná o kmitavý obvod. Hovoříme pak o aperiodickém režimu.

V našem příkladu vychází $Q \approx 31,6$, obvod je tedy nastaven na kmitavý režim.

r **2.11.** Určete, jaký typ filtru (DP, HP, PP, PZ) představuje obvod 2.řádu z př.2.10 při různých volbách výstupu.

p Řešení:

Pro nízké kmitočty ($f \rightarrow 0$) induktor představuje zkrat a kapacitor rozpojení \Rightarrow

$$u_L = 0, u_C = u_1, u_R = 0, u_{LC} = u_1.$$

Pro vysoké kmitočty ($f \rightarrow \infty$) induktor představuje rozpojení a kapacitor zkrat \Rightarrow

$$u_L = u_1, u_C = 0, u_R = 0, u_{LC} = u_1.$$

Pro rezonanční kmitočet ($f = 1/\sqrt{LC} \approx 503\text{Hz}$) sériová kombinace induktoru a kapacitoru představuje zkrat \Rightarrow

$$u_{LC} = 0, u_R = u_1, U_L = U_C = QU_1 \approx 31,6U_1$$

(obvod je v sériové rezonanci).

Proto:

a) DP, b) HP, c) PP, d) PZ.

Poznámka:

Ověření tvrzení, že při rezonanci je na L a C Q -krát větší napětí než na vstupu: Vypočteme přenosovou funkci $K_{1,L}$ ze vstupu na induktor pro rezonanční kmitočet. Použijeme výsledku z př.2.10:

$$K_{1,L}(w = w_r) = \frac{(jw_r)^2}{(jw_r)^2 + jw_r \frac{R}{L} + w_r^2} = \frac{-w_r^2}{jw_r \frac{R}{L}} = jw_r \frac{L}{R} = jQ.$$

Obdobně vyjde

$$K_{1,C}(w = w_r) = -jQ.$$

Napětí na akumulacních prvcích v rezonanci má tedy Q krát větší amplitudu než vstupní napětí a je zde také fázový posun $\pm 90^\circ$.

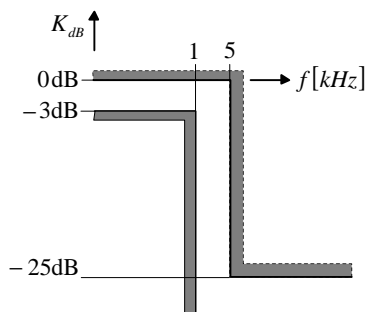
Příklad je možné vyřešit i tak, že se vykreslí amplitudové kmitočtové charakteristiky jednotlivých zapojení.

r 2.12. Programem NAF byl navržen filtr dle Čebyševovy aproximace, který splňuje požadavky dané tolerančním polem na obrázku. Přenosová funkce filtru je ve tvaru

$$K(p) = \frac{1,97861 \cdot 10^7}{p^2 + 4,05202 \cdot 10^3 p + 2,79487 \cdot 10^7}.$$

Vypočtete:

- Rezonanční kmitočet a činitel jakosti
- Přenos filtru na kmitočtu 0Hz
- Přenos filtru na kmitočtu 1kHz
- Přenos filtru na rezonančním kmitočtu.



Obr.2.9. Toleranční schéma amplitudové kmitočtové charakteristiky filtru z př.2.12.

p Řešení:

a) $w_r = \sqrt{2,79487 \cdot 10^7} \approx 5286,7 \text{ rad/s} \Rightarrow f_r \approx 841,4 \text{ Hz},$

b) $\frac{w_r}{Q} = 4,05202 \cdot 10^3 \Rightarrow Q \approx 1,305,$

c) $K(p = jw = 0) = \frac{1,97861 \cdot 10^7}{2,79487 \cdot 10^7} \approx 0,708 \approx -3 \text{ dB},$

d) $K(p = jw = j2p \cdot 10^3) \approx 0,708 e^{-j114,4^\circ},$

e) $K(p = jw_r = j5286,7) \approx 0,924 e^{-j90^\circ} \approx -0,69 \text{ dB} + \text{fázový posuv } -90^\circ.$

r 2.13. Nakreslete amplitudovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku filtru dle Čebyševovy aproximace z př.2.12 v rozsahu kmitočtů 100Hz÷10kHz, znáte-li přenosovou funkci filtru z př.2.12.

p Řešení:

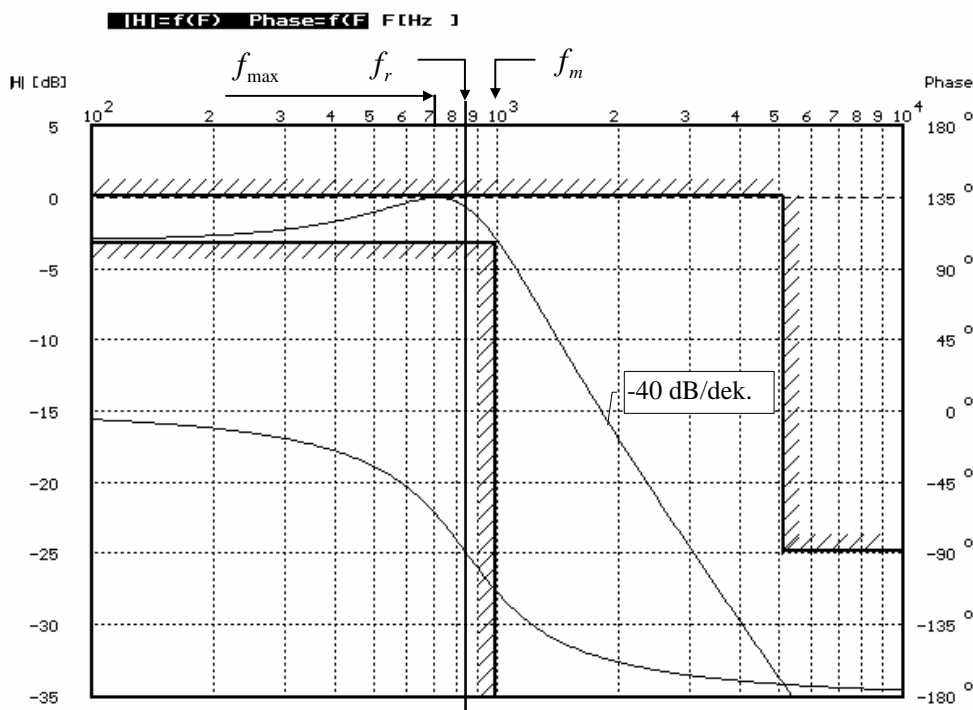
$$|K(w)|_{\text{dB}} = 20 \log \left\{ \frac{1,97861 \cdot 10^7}{\sqrt{(2,79487 \cdot 10^7 - w^2)^2 + (4,05202 \cdot 10^3 w)^2}} \right\},$$

$$j(w) = -\arctg \frac{4,05202 \cdot 10^3 w}{2,79487 \cdot 10^7 - w^2} \begin{cases} +180^\circ, & \text{je-li jmenovatel záporný} \\ +0^\circ, & \text{je-li jmenovatel kladný} \end{cases}$$

Vypočteme a vykreslíme pomocí počítače dosazováním do vzorců za $w = 2\pi f, f \in \langle 100, 10k \rangle \text{ Hz}$ s logaritmičtým proměnným krokem výpočtu (viz obr.2.10 - výstup z programu NAF).

• Příklad programu v MATLABu pro vykreslení kmitočtových charakteristik:

```
a=[1 4.05202e3 2.79487e7]; % zadání koeficientů jmenovatele přenosové funkce K(p)
b=[0 0 1.97861e7]; % zadání koeficientů čitatele přenosové funkce K(p)
f=1e2:5:1e4; % zadání rozsahu kmitočtů a kroku výpočtu
omega=2*pi*f; % přepočítání na kruhový kmitočet
h=freqs(b,a,omega); % výpočet komplexní kmitočtové charakteristiky (funkce z Signal Processing Toolboxu)
mag=abs(h); % výpočet amplitudové kmitočtové charakteristiky
magdb=20*log10(mag); % přepočítání na decibely
semilogx(f,magdb); % vykreslení amplitudové kmitočtové charakteristiky v log. ose kmitočtu
% phase=angle(h); % případný výpočet fázové kmitočtové charakteristiky
% semilogx(f,phase); % případné vykreslení fázové kmitočtové charakteristiky
```



Obr.2.10. Kmitočtové charakteristiky filtru z př.2.13.

& Poznátka z příkladu:

- Mezní kmitočet filtru (pro pokles o 3dB) 1kHz je větší než rezonanční kmitočet f_r (841,4Hz).
- Na rezonančním kmitočtu f_r není maximum amplitudové kmitočtové charakteristiky. Toto maximum je na nižším kmitočtu f_{max} (707Hz).
- Fázová charakteristika probíhá od 0° do -180° , na rezonančním kmitočtu je fázový posuv přesně -90° .

G Trocha teorie:

U DP 2.řádu je maximum amplitudové kmitočtové charakteristiky na kmitočtu

$$w_{max} = w_r \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}, \tag{2.13}$$

tedy

$$w_r > w_{kmit} > w_{max}.$$

Toto maximum má velikost

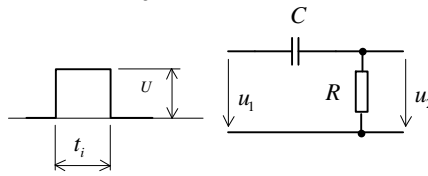
$$K_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} K_0, \tag{2.14}$$

kde K_0 je přenos obvodu na nízkých kmitočtech ($f \rightarrow 0$).

r 2.14. RC článek typu horní propust je vybuzen obdélníkovým impulsem o výšce $U = 100V$ a šířce $t_i = 1ms$:

$$u_1(t) = U[1(t) - 1(t - t_i)].$$

Před přivedením impulsu byl kapacitor v článku vybit. Vypočtete spektrální funkci výstupního signálu $u_2(t)$. Uvažujte $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 10\text{nF}$.

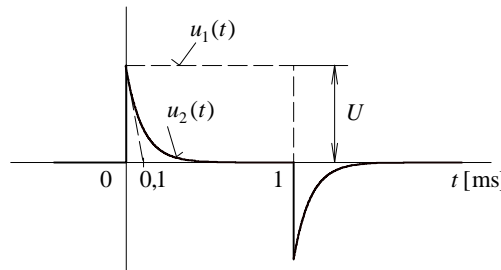


Obr.2.11. RC článek typu HP buzený obdélníkovým impulsem.

p Řešení:

Použití vztahu (2.3).

Odezva na obdélníkový impuls bude ve tvaru dvou „jehlovitých“ exponenciálních impulsů - viz obr.2.12. Dá se očekávat přesun energie signálu z nízkofrekvenční části spektra do oblastí vyšších kmitočtů.



Obr.2.12. Reakce článku z obr.2.11 na obdélníkový impuls.

Výpočet:

$$\mathcal{U}_1(w) = F\{u_1(t)\} = U t_i \text{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) e^{-j w \frac{t_i}{2}},$$

$$\mathcal{K}(w) = \frac{jwRC}{1 + jwRC},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2(w) &= F\{u_2(t)\} = \mathcal{K}(w) \mathcal{U}_1(w) = \frac{jwRC}{1 + jwRC} U t_i \text{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) e^{-j w \frac{t_i}{2}} = \\ &= \frac{j \frac{w}{10^4}}{1 + j \frac{w}{10^4}} 10^{-2} \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} w) e^{-j 5 \cdot 10^{-4} w}. \end{aligned}$$

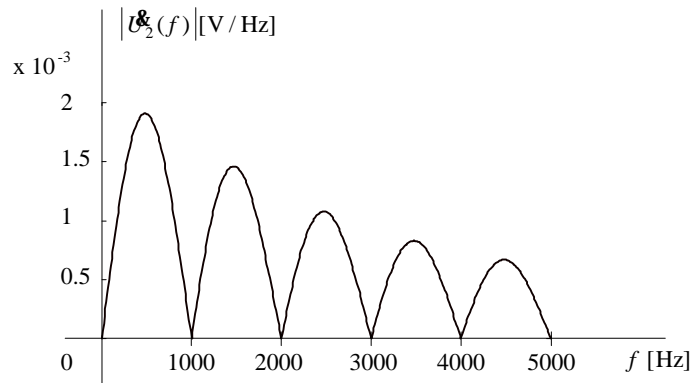
$$|\mathcal{U}_2(w)| = \frac{10^{-6} w}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{10^4}\right)^2}} \left| \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} w) \right| = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\left| \sin(5 \cdot 10^{-4} w) \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{10^4}\right)^2}}.$$

r 2.15. Vypočtete a nakreslete závislost jednostranné spektrální hustoty energie vstupního a výstupního impulsu RC článku z př.2.14 v kmitočtovém rozsahu 0÷10kHz.

p Řešení:

$$L_{1,j}(w) = \frac{1}{p} |\mathcal{U}_1(w)|^2 = \frac{U^2 t_i^2}{p} \left| \text{sinc}\left(w \frac{t_i}{2}\right) \right|^2 = \frac{10^{-4}}{p} \left| \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} w) \right|^2 \left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}} \right],$$

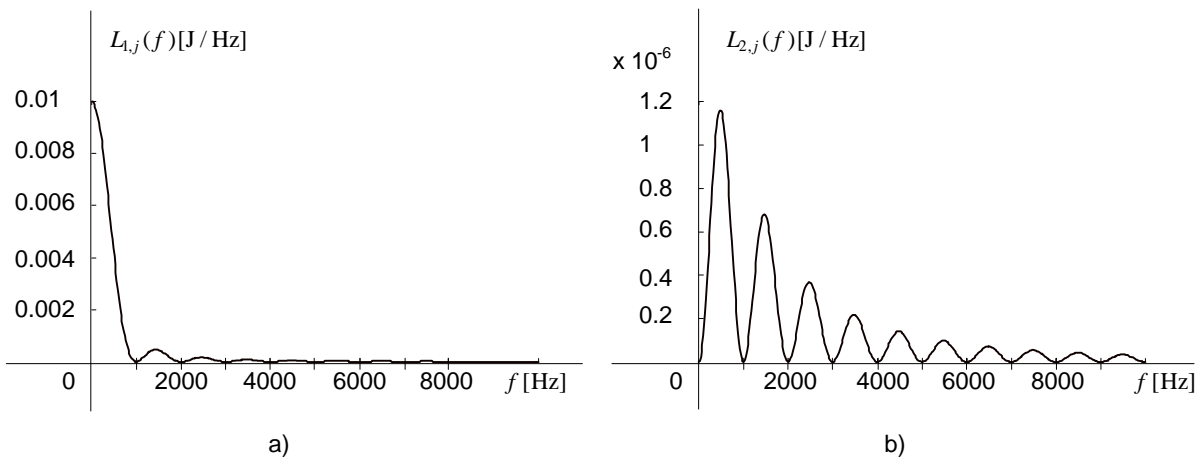
$$L_{2,j}(w) = \frac{1}{P} |\mathcal{U}_2(w)|^2 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \left| \sin(5 \cdot 10^{-4} w) \right|^2}{1 + \left(\frac{w}{10^4} \right)^2} \left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}} \right].$$



Obr.2.13. Modul spektrální funkce odezvy RC článku na obdélníkový impuls.

& Poznátka z příkladu:

Z obrázků je zřejmé, že průchodem impulsu filtrem typu horní propust došlo k značnému přesunu energie do vyšších spektrálních pásem. Spektrální hustoty na výstupu dosahují o několik řádů nižších hodnot než na vstupu, což svědčí o konzumaci značné části energie impulsu samotným filtrem, konkrétně vnitřním rezistorem.



Obr.2.14. Spektrální výkonová hustota energie impulsu na a) vstupu b) výstupu RC článku typu horní propust.

r 2.16. Vypočítejte energii vstupního a výstupního impulsu RC článku z př.2.14.

p Řešení:

Energie nejprve určíme z časových průběhů vstupního a výstupního signálu a pak ze spektrálních hustot energií.

Výpočet z časových průběhů:

Energie vstupního impulsu:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2(t) dt = \int_0^{t_i} U^2 dt = U^2 t_i = 0,1 \text{ J}.$$

Energie výstupního impulsu (následující výpočet vyžaduje znalosti z oblasti matematického popisu přechodných jevů v obvodech 1.řádu):

$t \in \langle 0, t_i \rangle$:

$$u_2(t) = U e^{-\frac{t}{t_i}} \Rightarrow W_{21} = \int_0^{t_i} u_2^2(t) dt = \int_0^{t_i} U^2 e^{-\frac{2t}{t_i}} dt = U^2 \frac{t_i}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t_i}{t_i}} \right) \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ J},$$

$t \in \langle t_i, \infty \rangle$:

$$u_2(t) = -U \left(1 - e^{-\frac{t_i}{t_i}} \right) e^{-\frac{t-t_i}{t_i}} \Rightarrow W_{22} = \int_{t_i}^{\infty} u_2^2(t) dt = U^2 \left(1 - e^{-\frac{t_i}{t_i}} \right)^2 \int_0^{t_i} e^{-\frac{2(t-t_i)}{t_i}} dt = U^2 \frac{t_i}{2} \left(1 - e^{-\frac{t_i}{t_i}} \right) \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

$$W_2 = W_{21} + W_{22} = U^2 t_i \left(1 - e^{-\frac{t_i}{t_i}} \right) \approx 10^{-2} \text{ J}.$$

Energie impulsu vycházejícího z RC článku je 10-krát menší než energie impulsu do něj vstupující.

Výpočet ze spektrálních hustot energie:

Energie vstupního impulsu:

$$W_1 = \int_0^{+\infty} L_{1,j}(w) dw = \frac{10^{-4}}{P} \int_0^{+\infty} \left[\text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} w) \right]^2 dw.$$

Použijeme vzorec z numerické matematiky:

$$\int_0^{+\infty} \left[\text{sinc}(ax) \right]^2 dx = \frac{P}{2a}.$$

Pak

$$W_1 = 0,1 \text{ J}.$$

Energie výstupního impulsu:

$$W_2 = \int_0^{+\infty} L_{2,j}(w) dw = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{P} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(5 \cdot 10^{-4} w)}{1 + \left(\frac{w}{10^4} \right)^2} dw.$$

Použijeme vzorec z matematiky:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(acx)}{1 + (cx)^2} dx = \frac{P}{4c} (1 - e^{-2a}), \quad a > 0.$$

Pak

$$W_2 = 0,01(1 - e^{-10}) \approx 0,01 \text{ J}.$$

r 2.17. Vypočtete, jak je rozdělena energie vstupního a výstupního impulsu z př.2.14 do kmitočtových pásem:

a) (0÷1) kHz, b) (1÷2) kHz, c) (2÷3) kHz, d) (3÷∞) kHz.

Řešení provedte pomocí MATLABu.

p Řešení:

Energie v kmitočtovém pásmu (w_1, w_2):

Vstupní impuls:

$$W_1(w_1, w_2) = \int_{w_1}^{w_2} L_{1,j}(w) dw = \frac{10^{-4}}{P} \int_{w_1}^{w_2} [\text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} w)]^2 dw.$$

Výstupní impuls:

$$W_2(w_1, w_2) = \int_{w_1}^{w_2} L_{2,j}(w) dw = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{P} \int_{w_1}^{w_2} \frac{\sin^2(5 \cdot 10^{-4} w)}{1 + \left(\frac{w}{10^4}\right)^2} dw.$$

Určité integrály vypočteme v MATLABu pomocí příkazu

`quad('hustota', omega1, omega2)`

kde *hustota* je název funkce, definující vzorec spektrální hustoty energie v M-souboru, *omega1* a *omega2* jsou dolní a horní integrační mez.

Výsledky výpočtů jsou shrnuty v tabulce.

kmitočtový rozsah [kHz]	vstupní impuls		výstupní impuls	
	W[mJ]	% z celkové energie	W[mJ]	% z celkové energie
0÷1	90,280	90,280	3,613	36,13
1÷2	4,712	4,712	2,131	21,31
2÷3	1,647	1,647	1,162	11,62
3÷∞	3,361	3,361	3,094	30,94

& Poznatek z příkladu:

Vstupní obdélníkový impuls má v kmitočtovém rozsahu (0, 1/šířka impulsu) = (0, 1)kHz soustředěno přes 90% své energie. Po průchodu horní propustí 1.řádu se energie ve spektru přeskupí do vyšších kmitočtů. V uvažovaném kmitočtovém rozsahu bude nyní jen asi 36% celkové energie výstupního impulsu. Celková energie na výstupu je jen 10% z energie přiváděné do článku, 90% se tedy přemění v teplo ve filtru.

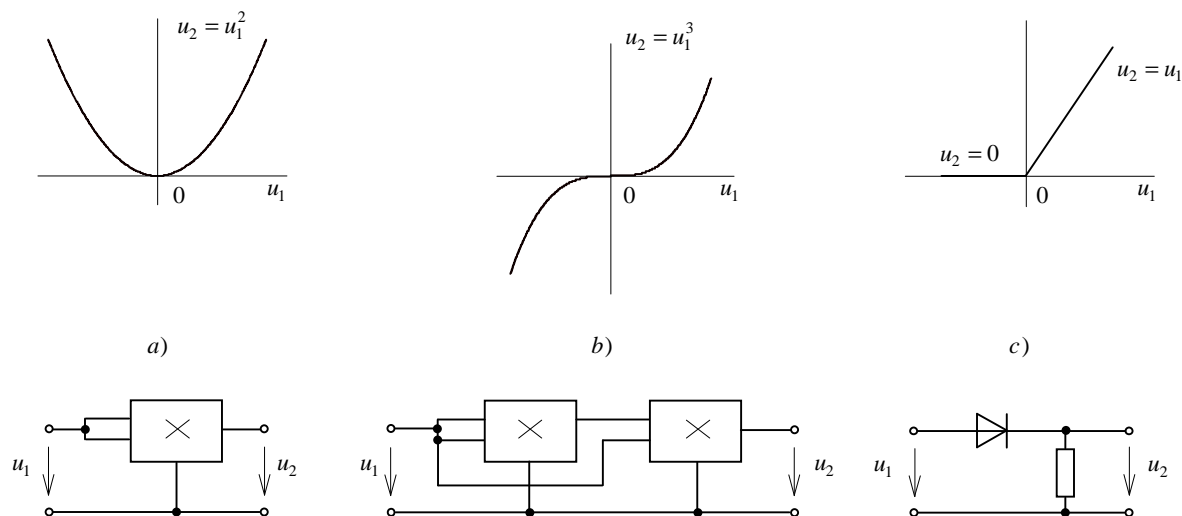
r 2.18. Uvažujte nelineární obvody se statickými převodními charakteristikami podle obr.2.15. Na vstup působí harmonický signál

$$u_1(t) = U \cos(Wt), \quad U = 1V, \quad W = 2\pi F, \quad F = 1\text{kHz}.$$

Vypočtete časový průběh výstupního napětí a zjistěte jeho spektrální složky.

p Řešení:

$$a) u_2(t) = u_1^2(t) = U^2 \cos^2(Wt) = \frac{U^2}{2} + \frac{U^2}{2} \cos(2Wt) = 0,5 + 0,5 \cos(2Wt) [V].$$



Obr.2.15. Příklady nelineárních převodních charakteristik a jejich obvodových realizací.

Ve výstupním signálu se objeví stejnosměrná složka a harmonická složka na dvojnásobném kmitočtu než je kmitočet buzení.

$$b) u_2(t) = u_1^3(t) = U^3 \cos^3(Wt) = \frac{3}{4}U^3 \cos(Wt) + \frac{1}{4}U^3 \cos(3Wt) = \\ = 0,75 \cos(Wt) + 0,25 \cos(3Wt) \text{ [V].}$$

Ve výstupním signálu se objeví harmonická složka na stejném a harmonická složka na trojnásobném kmitočtu než je kmitočet buzení.

$$c) u_2(t) = u_1(t) \mathbb{I}[u_1(t)].$$

Vstupní signál bude mít ořezané záporné půlvlny, bude jednocestně usměrněn. Fourierova řada takového signálu je řešena v příkladu 1.22 a obecný vzorec je ve výsledcích př. 1.48k):

$$u_2(t) = \frac{U}{p} + \frac{U}{2} \cos(Wt) + \frac{2U}{p} \left(\frac{1}{1.3} \cos(2Wt) - \frac{1}{3.5} \cos(4Wt) + \frac{1}{5.7} \cos(6Wt) - \dots \right) \& \\ \& 0,3183 + 0,5 \cos(Wt) + 0,2122 \cos(2Wt) - 0,0424 \cos(4Wt) + 0,0184 \cos(6Wt) - \dots \text{ [V].}$$

Ve výstupním signálu se objeví stejnosměrná složka a nekonečný počet harmonických složek na celistvých násobcích kmitočtu budícího signálu.

& Poznatky z příkladu:

- Průchodem harmonického signálu nelineárním obvodem došlo k rozšíření původního jednočárového spektra o přídavné harmonické složky, které nebyly přítomny ve vstupním signálu.
- Záleží na typu nelinearity, jaký bude charakter rozšíření spektra: polynomiální hladké závislosti výstupu na vstupu vedou na konečný počet spektrálních čar, ostrá ořezání vyvolají větší rozšíření.
- Systém a) je přímo použitelný v aplikaci zdvojnásobce kmitočtu.

r 2.19. Uvažujte nelineární obvody se statickými převodními charakteristikami z př.2.18a). Na vstup působí dvojice harmonických signálů

$$u_1(t) = U_1 \cos(W_1 t), \quad U_1 = 1 \text{ V}, \quad W_1 = 2\pi F_1, \quad F_1 = 10 \text{ kHz},$$

$$u_2(t) = U_2 \cos(W_2 t), \quad U_2 = 1 \text{ V}, \quad W_2 = 2\pi F_2, \quad F_2 = 1 \text{ kHz}.$$

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí a zjistěte jeho spektrální složky.

p Řešení:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= u_1^2(t) = [U_1 \cos(W_1 t) + U_2 \cos(W_2 t)]^2 = \\
 &= \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_1^2}{2} \cos(2W_1 t) + \frac{U_2^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} \cos(2W_2 t) + 2U_1 U_2 \cos(W_1 t) \cos(W_2 t) = \\
 &= \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} + \frac{U_1^2}{2} \cos(2W_1 t) + \frac{U_2^2}{2} \cos(2W_2 t) + U_1 U_2 \cos[(W_1 + W_2)t] + U_1 U_2 \cos[(W_1 - W_2)t] = \\
 &= 1 + 0,5 \cos(2W_1 t) + 0,5 \cos(2W_2 t) + \cos[(W_1 + W_2)t] + \cos[(W_1 - W_2)t] [\text{V}].
 \end{aligned}$$

Ve výstupním signálu se objeví stejnosměrná složka, harmonické složky na dvojnásobcích kmitočtu vstupních signálů (2kHz a 20kHz) a složky na součtovém a rozdílovém kmitočtu (11kHz a 9kHz).

- r 2.20.** Na výstup systému z př.2.19, obr. 2.15a) zapojíme pásmovou propust naladěnou na 9kHz s šířkou pásma 1kHz. Zapište časový průběh výstupního signálu pásmové propusti v ustáleném stavu.

& Řešení:

Využijeme výsledku př.2.19. Na výstupu PP mohou být pouze spektrální složky z intervalu 8,5kHz až 9,5kHz:

$$u_{PP}(t) = U_1 U_2 \cos[(W_1 - W_2)t] = \cos[(W_1 - W_2)t] [\text{V}].$$

Na vstupu systému působí dva harmonické signály o kmitočtech 1kHz a 10kHz, z výstupu odebíráme harmonický signál o rozdílovém kmitočtu 9kHz. Takovému zařízení se říká směšovač.

- r 2.21.** Na výstup systému z obr.2.15a) zapojíme pásmovou propust naladěnou na 10kHz s šířkou pásma 2,2kHz. Zapište časový průběh výstupního signálu pásmové propusti v ustáleném stavu.

p Řešení:

Využijeme výsledku př.2.19. Na výstupu PP mohou být pouze spektrální složky z intervalu od 8,9kHz do 11,1kHz:

$$u_{PP}(t) = U_1 U_2 \cos[(W_1 + W_2)t] + U_1 U_2 \cos[(W_1 - W_2)t] = \cos[(W_1 + W_2)t] + \cos[(W_1 - W_2)t] [\text{V}].$$

Na vstupu systému působí dva harmonické signály o kmitočtech 1kHz a 10kHz, z výstupu odebíráme součet dvou harmonických signálů o součtovém a rozdílovém kmitočtu 11kHz a 9kHz. Na výstupu je tedy amplitudově modulovaný signál s potlačenou nosnou na kmitočtu 10kHz a dvěma postranními pásmy. Zařízení představuje AM modulátor DSB-SC, signál u_1 je nosná, signál u_2 je modulační signál.

- r 2.22.** Na vstup nelineárního obvodu s kubickou převodní charakteristikou z př.2.18 b) přivádíme harmonický signál

$$u_1(t) = U_1 \cos(Wt), \quad U_1 = 100 \text{ mV}, \quad W = 2\pi F, \quad F = 50 \text{ kHz}.$$

Vypočtete činitel harmonického zkreslení THD výstupního signálu.

p Řešení:

Výpočet výstupního signálu:

$$\begin{aligned}u_2(t) = u_1^3(t) &= U_1^3 \cos^3(Wt) = \frac{3}{4}U_1^3 \cos(Wt) + \frac{1}{4}U_1^3 \cos(3Wt) = \\ &= 0,75 \cos(Wt) + 0,25 \cos(3Wt) [\text{mV}].\end{aligned}$$

Výstupní signál je zkreslen pouze 3.harmonickou, která je však poměrně výrazná (1/3 první harmonické).

Výpočet THD - vzorec (2.5):

$$THD = \frac{\sqrt{\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{0,75}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} \approx 33,3\% .$$