



Úvod do elektrotechniky

Autoři:

Prof. Ing. Dalibor Bielek, CSc.,

doc. Ing. Karel Hájek, CSc.,

doc. Ing. Jan Viktorin, CSc.

Brno 1997

PŘEDMLUVA

Tato skripta jsou určena ke studiu v předmětu Základy elektrotechniky pro studenty všech elektrospecializací na VA Brno

Vzhledem k rozdílné úrovni vstupních znalostí a malým praktickým zkušenostem značné části studentů v oblasti elektrotechniky jsou skripta zpracována tak, aby úzce navazovala na středoškolskou látku. Kde je to možné, je výklad prováděn problémově a na praktických příkladech, čímž jsou vytvářeny předpoklady pro hlubší pochopení fyzikálních principů.

Výklad je rozvíjen od jednoduchých problémů k složitějším a zobecňováním již známých poznatků. Základní pojmový aparát je rozšiřován jen v nejnútnejší míře. V některých částech textu bylo nutno volit kompromis mezi přesností výkladu a jeho názorností. V místech, kde je požadováno hlubší pochopení láky a vytváření schopností řešit samostatně problémy, jsou do textu vřazovány příklady k procvičení s udanými výsledky. Za každou kapitolou či podkapitolou jsou uvedeny otázky k samostatnému studiu, které mají více funkcí. Pro studenta představují kontrolu, zda zvládl danou část látky, dále orientují studenta z hlediska důležitosti a významu jednotlivých partií a jsou též návodem k samostatnému studiu a opakování. To vše je podřízeno hlavnímu cíli - hlubšímu pochopení a nikoliv jen encyklopedickému zvládnutí základů elektrotechniky. To je předpokladem dalšího efektivního studia navazujících elektrotechnických předmětů.

Tato skripta jsou vydána jako reedice skript "Úvod do elektrotechniky" S-1618. Vzhledem k tomu, že obsahově splňují i současné požadavky, jsou vydány beze změny textu vyjma opravy některých dílčích chyb původního vydání.

V Brně, prosinec 1987
červenec 1997

Autoři

OBSAH

Předmluva	2
Obsah	3
1 ÚVOD	5
2 ELEKTRICKÝ OBVOD	6 - 18
2.1 Základní funkce a realizace elektrických obvodů	6
2.2 Elektrický náboj a jeho silové působení	7
2.3 Elektrické napětí	8
2.4 Elektrický proud	10
2.5 Rezistory (odpory) a Ohmův zákon	12
2.6 Nelineární rezistory	16
3 ODPOROVÉ OBVODY	19 - 55
3.1 Základní principy a zákony pro řešení el. obvodů	19
3.2 Základní typy jednoduchých obvodů a jejich řešení	26
3.3 Obecné metody řešení lineárních odporových obvodů	35
3.4 Řešení obvodů s nelineárními rezistory	41
3.5 Měření stejnosměrných veličin	46
4 ELEKTRICKÉ POLE. KAPACITOR	56 - 69
4.1 Základní veličiny elektrického pole	56
4.2 Elektrické pole v nevodiči	64
4.3 Kondenzátor, kapacitor	66
5 MAGNETICKÉ POLE. INDUKTOR. MAGNETICKÉ OBVODY	70 - 82
5.1 Magnetické pole	70
5.2 Magnetické obvody	79
6 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE	83 - 90
6.1 Popis elektromagnetického pole pomocí Maxwellových rovnic a zákona o zachování elektrického náboje	83
6.2 Elektrické obvody jako zjednodušení obvodů v elektromagnetickém poli	87
7 OBVODY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU	91 - 125
7.1 Úvod do harmonického ustáleného stavu	91
7.2 Pravidla pro počítání s komplexními čísly	92
7.3 Vlastnosti harmonického signálu. Fázor	96
7.4 Základní dvoj póly v harmonickém ustáleném stavu	101
7.5 Výkony v harmonickém ustáleném stavu	112
7.6 Měření střídavých veličin	116
7.7 Vícefázové obvody	122
8 OBVODY S VÍCEPÓLOVÝMI PRVKY	126 - 136
8.1 Vlastnosti více pólových prvků	126
8.2 Obvody se závislými zdroji	128

8.3 Obvody s vázanými induktory	130
8.4 Transformátory	133
9 OBVODY S NEHARMONICKÝMI ČASOVÝMI PRŮBĚHY	137 - 162
9.1 Základní pojmy	137
9.2 Přechodné jevy	139
9.3 Periodické signály a jejich spektra	154
10 ČÍSLICOVÉ OBVODY A SIGNÁLY	163 - 167
10.1 Základní logické funkce	164
10.2 Realizace číslicových (logických) obvodů	165

1 ÚVOD

Elektrotechnika je vědní disciplína, zabývající se technickým využitím fyzikálních poznatků o elektromagnetismu. Stala se jednou z nejdůležitějších součástí vědy a techniky. Ovlivňuje náš život v mnoha směrech. Využíváme ji prakticky neustále, ať už přímo (světlo, teplo, doprava, rádio, televize, telefon, gramofon, hodiny, počítače ...), nebo zprostředkovaně ve výrobcích, jejichž produkci elektrotechnika podmiňuje.

Elektrotechnika se vyvíjela a vyvíjí dvěma základními směry. Prvním je silnoproudá elektrotechnika, která se zabývá především výrobou a rozvodem elektrické energie, pohony, ohřevem apod. Druhým směrem je slaboproudá (též v užším smyslu sdělovací) elektrotechnika, jejímž cílem je především přenos a zpracování signálů, informací a zpráv (telefon, telegraf, televize apod.). Od tohoto směru se začínají oddělovat relativně samostatné další obory. Je to řídící a regulační technika pro řízení strojů a systémů, výpočetní technika, měřicí a diagnostická technika, optoelektronika, lékařská elektronika a v poslední době i bioelektronika. Souběžně s rozdělováním a štěpením do oborů probíhá i vzájemné propojování oborů, a to i využití slaboproudé elektrotechniky v silnoproudé.

Elektrotechnika se vyvíjí i co do používaných materiálů, technologií a součástek. Od počátečních jednoduchých obvodů přešla přes elektronky a tranzistory k integrovaným obvodům . Rozšiřuje se použití optoelektronických prvků, objevuje se perspektiva širokého využití supravodivých materiálů. Tento rozvoj je obrovský, až neporovnatelný s jinými obory. Týká se to zejména výpočetní techniky. Např. cena jedné paměťové jednotky klesla více než tisíckrát při značném zmenšení rozměrů i příkonu.

Vývojem prošly i zpracovávané signály. Od prvních obvodů se stejnosměrnými proudy se přešlo k přenosu a záznamu akustických signálů (telefon, magnetofon), k modulacím vysokofrekvenčních signálů (televize, spoje), k použití impulsních signálů (radiolokace, dálkopis) a k použití číslicových signálů (výpočetní technika). Vzhledem k velkým výhodám přenosu a zpracování číslicových signálů se přechází na převod většiny spojitých signálů na číslicové signály. Tento přechod bude usnadněn další miniaturizací a rozvojem mikroprocesorové techniky.

Je tedy zřejmé, že elektrotechnika je velice obsažným a dynamicky se rozvíjejícím se oborem, který podmiňuje vědeckotechnický pokrok ve všech sférách života. Studium tohoto oboru je velmi náročné a vede k postupné specializaci. Vzhledem k úzké propojenosti všech oborů elektrotechniky je zapotřebí dobře pochopit základy elektrotechniky v plné šíři. Jedině tak lze později přistoupit k úspěšnému studiu předmětů specializace. Dalším rysem studia těchto základů je nutnost jejich hlubokého pochopení, nelze je studovat encyklopedickým způsobem. Je rovněž nutné teoretické poznatky co nejvíce spojovat s praktickými zkušenostmi a představami. Napomoci v tomto studiu je i cílem těchto skript.

2 ELEKTRICKÝ OBVOD

Využití elektřiny je obvykle realizováno pomocí elektrického obvodu. Pro práci s elektrickými obvody je nejprve nutno poznat základní způsoby jeho popisu a základní zákony vyjadřující jeho chování.

Tato kapitola obsahuje následující části :

- 2.1 Základní funkce a realizace elektrických obvodů
- 2.2 Elektrický náboj a jeho silové působení
- 2.3 Elektrické napětí
- 2.4 Elektrický proud jako pohyb elektrického náboje
- 2.5 Rezistory (odpory) a Ohmův zákon
- 2.6 Nelineární rezistory

2.1 ZÁKLADNÍ FUNKCE A REALIZACE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

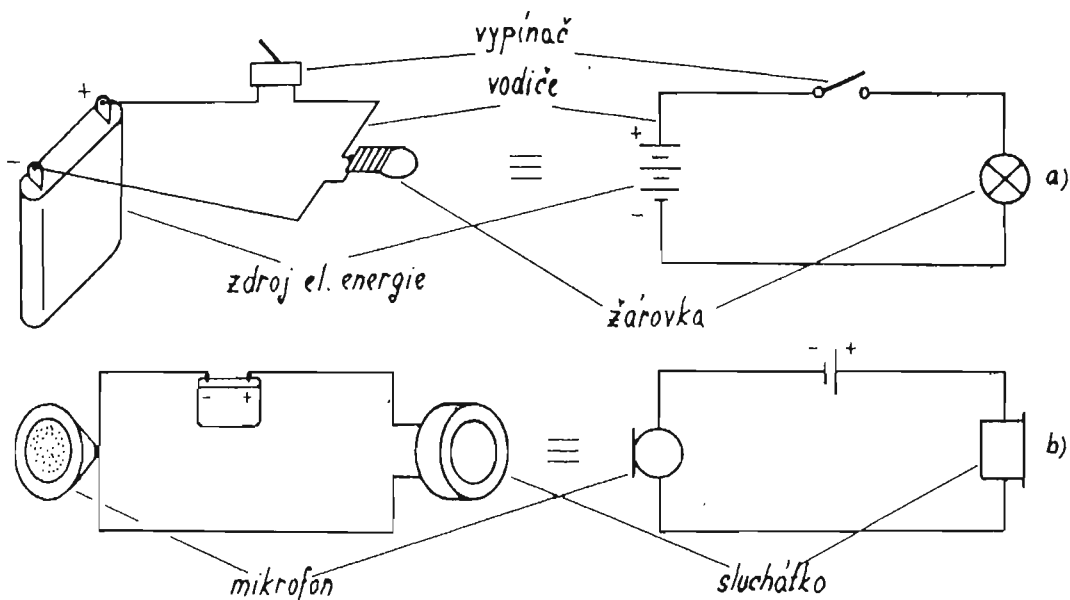
Účel použití elektrických obvodů

Konkrétní možnosti použití elektrických obvodů byly naznačeny již v úvodu. Můžeme je shrnout do dvou skupin :

- Obvody pro přenos elektrické energie ze zdroje elektrické energie do spotřebiče této energie. Takto spotřebovaná elektrická energie se mění na energii tepelnou, světelnou, mechanickou apod. Příklad : Přenos energie z generátoru rozvodnou sítí do elektrospotřebičů v domácnosti, přenos energie z akumulátoru do žárovky v automobilu, přenos energie ze suchého monočlátku do žárovečky v přenosné svítilně.

- Obvody pro přenos elektrického signálu ze zdroje signálu do spotřebiče signálu. Tyto obvody přenášejí signál buď bez jeho podstatné změny nebo se změnou jeho tvaru. Přenos signálu bez jeho podstatné změny realizuje např. telefon. Zdrojem signálu je mikrofon, spotřebičem telefonní sluchátko, signál může být veden po jednoduchém vedení. Taktéž např. rozsvícení signalizační žárovky je přenosem jednoduchého signálu. Pro přenos signálu se změnou jeho tvaru slouží složitější obvody. Např. obvod mikrofonu, zesilovače a reproduktoru upravuje signál tím způsobem, že malý signál z mikrofonu jako zdroje zvětšuje (zesiluje) pomocí zesilovače tak, aby spotřebič, t.j. reproduktor, vydával dostatečně velký akustický signál. Ještě složitějším obvodem je radiopřijímač. Zde je zdrojem signálu anténa a její radiový signál je přijímačem zesílen, filtrován, převáděn, detekován a opět zesílen, aby na výstupu byl v reproduktoru dostatečně velký akustický signál.

Vidíme, že elektrické obvody jsou velmi různorodé. Jsou složeny minimálně z dvou, obvykle z více prvků, v případech číslicových obvodů mohou obsahovat integrované obvody až a tisíce či desetitisíce prvky. Příklady nejjednodušších obvodových prvků a jejich schématického vyjádření jsou uvedeny na obr. 2-1.



Obr. 2-1 Příklady elektrických obvodů a jejich schématického vyjádření; a) elektrická svítilna, b) jednoduchý telefon

Z obrázků a z uvedeného textu vyplývá, že elektrický obvod obsahuje především tyto prvky :

- zdroje (energie či signálu)
- spotřebiče
- spojovací vodiče
- - - - -
- vypínače
- odpory
- kondenzátory
- ⋮

tyto prvky musí obsahovat každý elektrický obvod (především pro přenos energie)

běžně obsahují obvody pro přenos a zpracování signálu

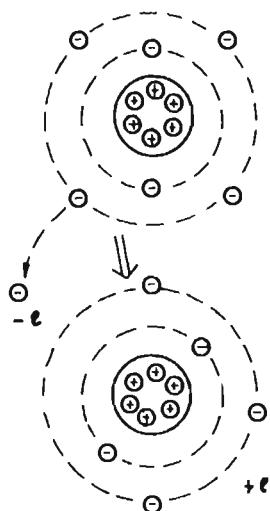
2.2 ELEKTRICKÝ NÁBOJ A JEHO SILOVÉ PŮSOBNÍ

Funkce všech elektrických obvodů je založena na existenci a vzájemném působení elektrických nábojů. Množství elektrického náboje označujeme symbolem q . Poznatky z fyziky nám vysvětlují, že atomy jsou složeny z jadra s neutrálními neutrony a kladnými protony a z obalu, vytvořeného z obíhajících elektronů, které mají záporný náboj. Velikost elektrického náboje elektronu označme $-e$. Velikost elektrického náboje jednoho protonu je shodná, ale opačné polaritě, proto má hodnotu $+e$. Vzhledem k tomu, že u normálního atomu je shodný počet elektronů a protonů, jeví se atom jako celek neutrálně, bez elektrického náboje.

Mějme případ, kdy se elektron od atomu oddělí. Pak samotný elektron má záporný náboj q o hodnotě $-e$, zbytek atomu se jeví jako elektrický náboj q o hodnotě $+e$, jak je to zřejmé z modelu atomu uhlíku na obr. 2-2.

Základní jednotkou (množstvím) elektrického náboje je jeden coulomb [C]. Je nutné určit jeho vztah k nejmenší hodnotě elektrického náboje, t.j. náboje jednoho elektronu. Tento vztah je

$$1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e \quad \text{nebo naopak} \quad 1 e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} .$$



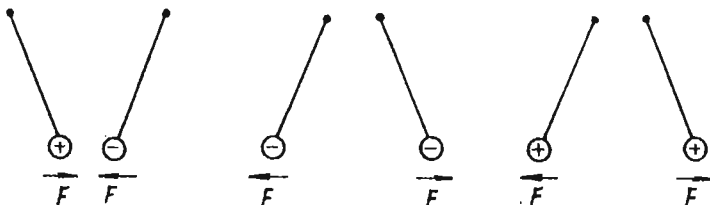
atom uhlíku bez náboje

$$q = \sum_{i=1}^{12} q_i = +6e - 6e = 0$$

atom uhlíku s kladným nábojem

$$q = \sum_{i=1}^{11} q_i = +6e - 5e = +e$$

Obr. 2-2 Model atomu uhlíku



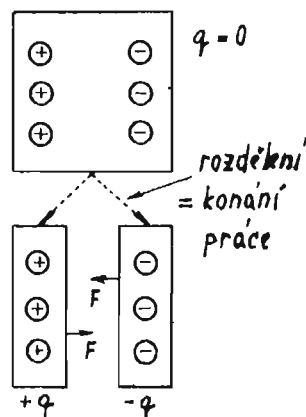
Obr. 2-3

Proto při oddělování elektronu od jádra je nutno působit silou proti přitažlivé síle mezi elektronem a kladně nabitým jádrem. Na oddělení elektronu je nutno vykonat práci. Rozdělení nábojů na $+q$ a $-q$ je výsledek konání práce Λ . Bylo tak vytvořeno elektrické napětí u (potenciál φ), to je schopnost konat práci při přemístění náboje.

látky s atomy, u nichž lze snadno oddělit elektron od jádra, se nazývají vodiče (většinou jsou to kovy). Látky s atomy, kde je oddělení obtížné, jsou polovodiče a látky, kde elektrony oddělit nelze, jsou izolanty.

Silové působení elektrických nábojů

Z různých pokusů lze zjistit, jak na sebe elektrické náboje působí. Dva náboje s rozdílnou polaritou se přitahují, dva náboje se shodnou polaritou se odpuzují (obr. 2-3).



Obr. 2-4

2.3 ELEKTRICKÉ NAPĚTÍ u

Na základě předchozích úvah můžeme elektrické napětí definovat vztahem

$$u = \frac{\Lambda}{q} \quad \left[\frac{\text{Joule}}{\text{coulomb}} \right] = [\text{V}] \quad (\text{volt}) \quad (2-1)$$

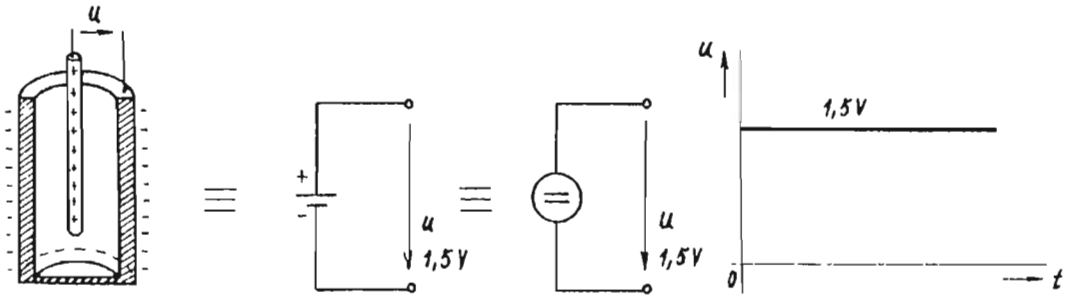
Napětí tak vyjadřuje práci Λ potřebnou na vytvoření nábojového rozdílu $+q$ a $-q$. Mimo základní jednotku 1 V se používají i odvozené jednotky 1 kV = 10^3 V, 1 mV = 10^{-3} V, 1 μ V = 10^{-6} V.

Zdroje elektrického napětí (zdroje elektrické energie)

Vzhledem k zákonu zachování energie musí tyto zdroje vytvářet elektrickou ener-

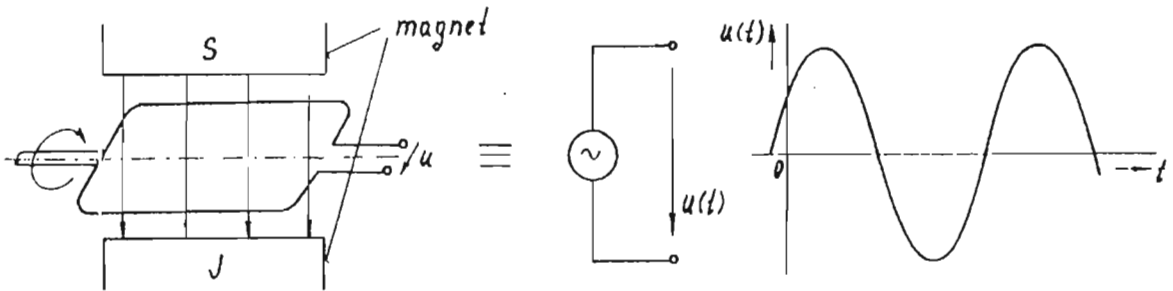
gii na úkor jiného typu energie. Nejčastěji se využívá přeměny chemické energie a mechanické energie.

Elektrochemické zdroje. Typickým příkladem tohoto zdroje je suchý článek, jehož napětí je 1,5 V. Tak je ukázáno na obr. 2-5, jeho napětí je nezávislé na čase.



Obr. 2-5

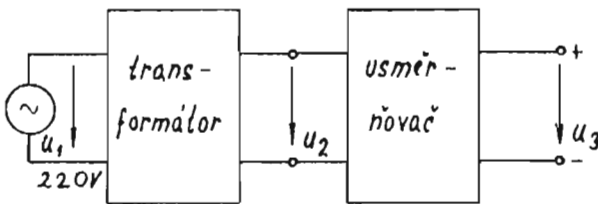
Elektromechanické zdroje (alternátory, dynama) vytvářejí elektrické napětí mechanickým otáčením závitu vodiče (obvykle většího počtu závitů) v magnetickém poli, vytvořeném magnetem. Vzniká tak elektrické napětí, které je vzhledem k otá-



Obr. 2-6

čivému pohybu vodiče (rotoru) proměnné - střídavé, jak je zřejmé z obr. 2-6. Tento zdroj energie je nejjednodušší, a proto většinu elektrické energie získáváme tímto způsobem v elektrárnách.

Často potřebujeme výkonné zdroje stejnosměrného napětí, kdy je nevhodné používat chemické zdroje. Tak používáme rozvod střídavého napětí 220 V, které upravujeme transformátory a usměrňovači na stejnosměrné napětí požadované velikosti.

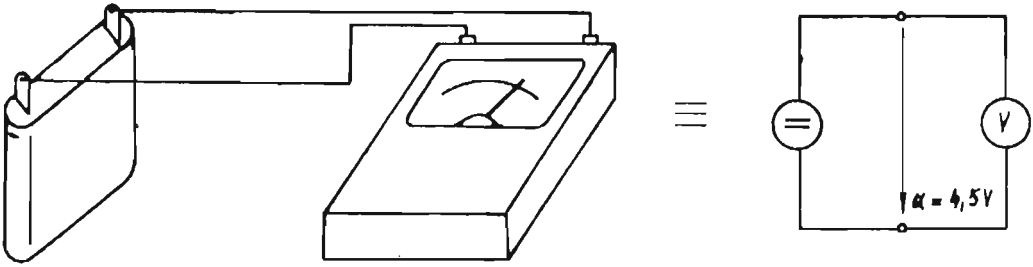


Obr. 2-7

Mimo tyto běžné zdroje elektrického napětí existují i další zdroje, např. tzv. sluneční články, vytvářející elektrickou energii z energie světelné.

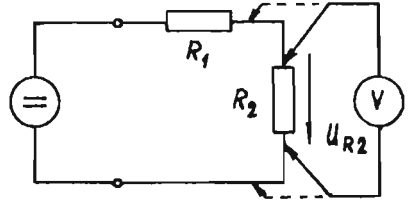
měření elektrického napětí

U měření elektrického napětí využíváme speciální přístroje zvané voltmetry. Příklad měření napětí tzv. ploché baterie je na obr. 2-8. Voltmetr se připojuje



Obr. 2-8

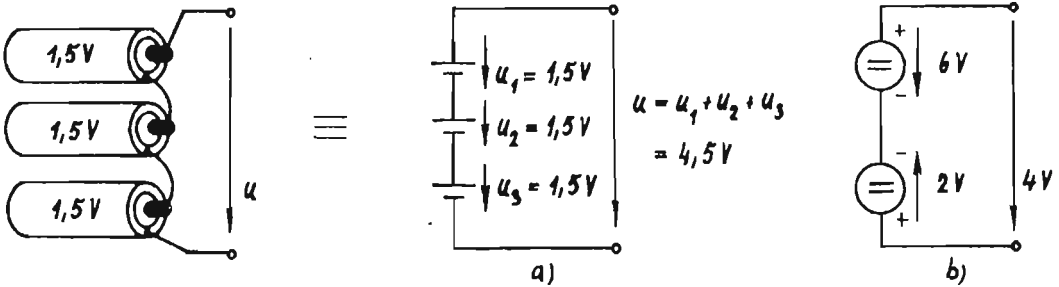
paralelně k bodům (uzlům), mezi nimiž má být měřeno napětí. Napětí lze měřit nejen na zdrojích, ale i na rezistorech. Příklad měření napětí na rezistoru je ukázán na obr. 2-9. Vzhledem k tomu, že uvažujeme nulový odpor vodičů, je jedno, v kterém místě vodiče voltmetr připojíme.



Obr. 2-9

Spojování zdrojů napětí

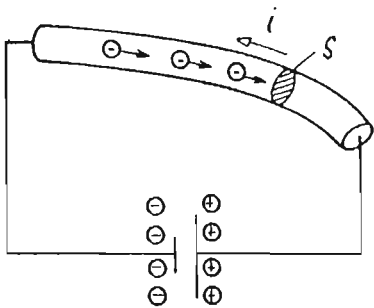
Zdroje napětí je možné různě spojovat; nejčastěji je spojujeme za sebou, v sérii. Pak se jejich napětí sčítá, pokud jsou ve stejném směru, jak je to vidět na obr. 2-10a. V případě, že jsou zapojeny opačně (obr. 2-10b), je výsledné napětí rozdílem jejich hodnot.



Obr. 2-10

2.4 ELEKTRICKÝ PROUD

Elektrický proud je projevem pohybu elektrických nábojů. Máme-li dva náboje opačné polaroty, existuje mezi nimi napětí, které vyvolává sílu přitahující oba náboje k sobě. Jsou-li tyto náboje volné, začnou se pohybovat k sobě a vzniká tak elektrický proud. Volné náboje jsou ve vodičích a za určitých podmínek v polovodičích. Elektrický proud tedy může vznikat ve vodičích nebo v polovodičích.



Obr. 2-11

Hodnota proudu 1 A je poměrně velká jednotka, proto často používáme jednotky 1 mA = 10⁻³ A a 1 μA = 10⁻⁶ A.

K toku kladných nábojů dochází např. ve vodičích plynech či kapalinách, kde atomy nejsou pevně vázány. Jako tok kladných nábojů je možné vysvětlit tok nábojů v polovodičích, kde dochází k postupnému předávání elektronu od jednoho atomu k druhému a tedy i posunu místa s kladným nábojem.

Při proměnné rychlosti toku elektronů je ve vztahu (2-2) nutno zkracovat časovou jednotku, takže tento vztah přejde v derivaci

$$i = \frac{dq_s}{dt} \quad [A] \quad (2-3)$$

Při působení zdroje střídavého napětí pak dochází i k střídavému toku proudu.

V některých případech potřebujeme vyjádřit velikost proudu vzhledem k ploše průřezu vodiče. Tuto veličinu vyjadřujeme jako proudovou hustotu J podle vztahu

$$J = \frac{i}{S} \quad \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad (2-4)$$

V praxi se častěji používá jednotka A/mm² a průřez vodiče je vhodné volit tak, aby byla proudová hustota 1 + 5 A/mm².

Zdroje elektrického proudu

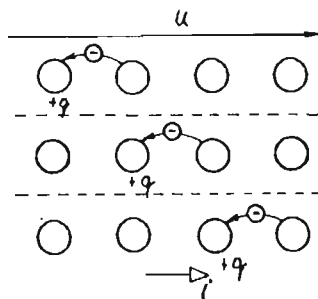
Zdroje elektrické energie se chovají obvykle jako zdroje elektrického napětí, jejichž hodnota napětí se příliš nemění v závislosti na velikosti odebíraného proudu. V některých případech se zdroje elektrické energie chovají více jako zdroje elektrického proudu, tzn. že hodnota proudu z těchto zdrojů je

konstantní a podle zátěže se mění napětí zdroje. Pro idealizovaný zdroj proudu si zaveďme značku podle obrázku 2-13. Napětí tohoto zdroje se může měnit, ale proud má konstantní

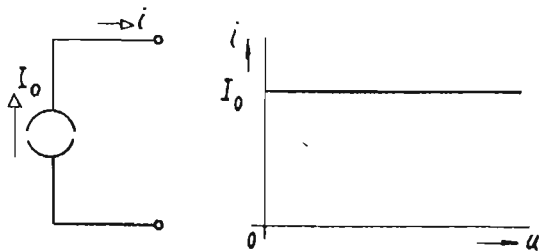
Velikost elektrického proudu i je veličina, která se vyjadřuje množstvím elektrického náboje q_s , prošlého plochou průřezu vodiče za jednotku času.

$$i = \frac{q_s}{t} \quad \left[\frac{C}{s} \right] = [A] \quad (\text{ampér}) \quad (2-2)$$

Směr tohoto proudu je označován šipkou \rightarrow a je orientován ve směru toku kladných nábojů. Tok záporných nábojů - elektronů, což je nejčastější případ, má tedy opačný směr než chápeme kladný směr proudu, označený šipkou \rightarrow .



Obr. 2-12

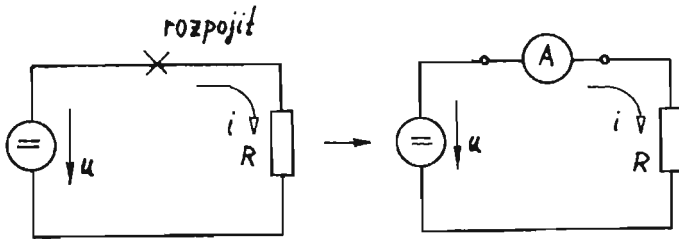


Obr. 2-13.

hodnotu. Takovýto zdroj lze vytvořit pomocí složitých elektronických obvodů ze zdroje napětí.

Měření elektrického proudu

Hodnotu elektrického proudu měříme pomocí měřicího přístroje ampérmetru, menší proudy pomocí miliampérmetru. Vzhledem k tomu, že měřený proud musí téci přes ampérmetr, musíme obvod rozpojit a vřadit ampérmetr do obvodu, jak je to na obr. 2-14.



Obr. 2-14

Poznámka :

Napětí a proud se s časem obvykle mění. Budeme je označovat malými písmeny. Chceme-li zdůraznit, že napětí a proud jsou konstantní (např. u obvodů napájených z baterie), můžeme použít velká písmena U, I.

2.5 REZISTORY (ODPORY) A OHMŮV ZÁKON

V předešlém bylo uvedeno, že elektrický proud může protékat vodiči, popř. i polovodiči. Ovšem každý z těchto materiálů má tuto vlastnost v různé míře. Obecně lze říci, že k tomu, aby protékal vodičem elektrický proud, musí být k němu připojen zdroj napětí. Jak je naznačeno na obr. 2-15, velikost proudu závisí při konstantní hodnotě napětí na délce vodiče l, na ploše jeho průřezu S a na měrné vodivosti daného materiálu :

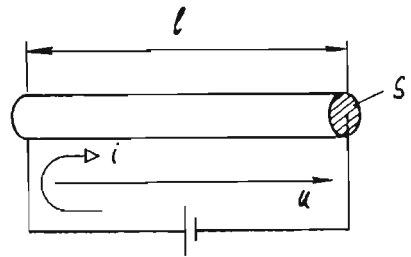
$$i = G \cdot u \quad (2-5)$$

$$G = \sigma \cdot \frac{S}{l} \quad (2-6)$$

Schopnost vést proud - vodivost materiálu - častěji vyjadřujeme převrácenou hodnotou, t.j. odporem vodiče, který klade průchodu proudu :

$$u = R \cdot i \quad (2-7)$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (2-8)$$



Obr. 2-15

, $\rho = 1/\sigma$ je měrný odpor.

Tab. 2-1

materiál	ρ $\Omega \text{mm}^2/\text{m}$	σ 10^6 S/m
stříbro	0,017	59
měď	0,0178	56
manganin	0,43	2,3
uhlík	65	0,015

Jak vyplývá z Tab. 2-1, nejlepším vodičem je stříbro. Vzhledem k jeho vysoké ceně se však častěji používají měď a hliník, které mají měrný odpor o něco vyšší. Některé kovy a slitiny jsou však horšími vodiči, např. manganin. Proto se používají tam,

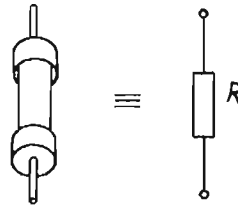
kde potřebujeme vyšší hodnoty odporů. Použití vodivých materiálů je následující :

vodivý materiál → spojovací vodiče (Cu, Al) - odpor co nejnižší
 rezistory (C, ...) - je potřebný vyšší odpor s definovanou a stálou hodnotou

Příklad skutečného provedení rezistoru je ukázán na obr. 2-16.

Běžně používané jednotky odporu jsou :

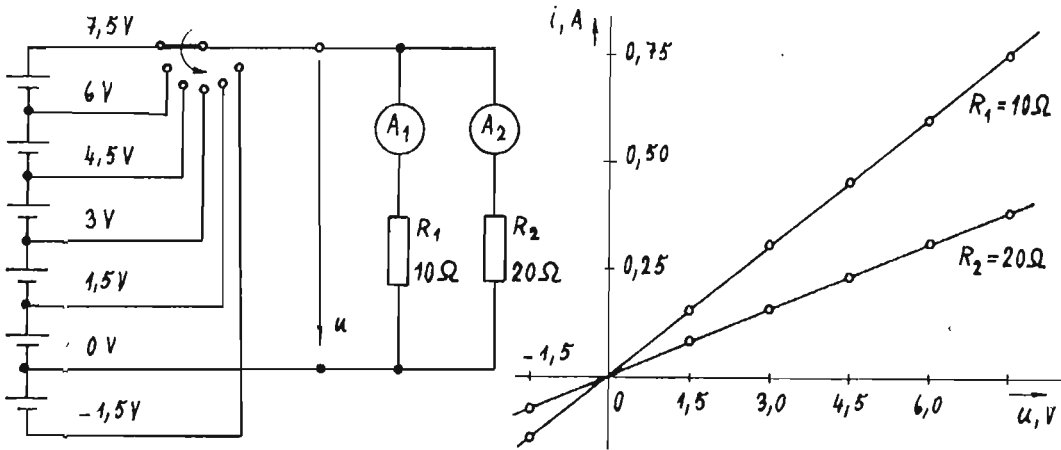
$$\begin{aligned} m\Omega &= 10^{-3}\Omega \\ k\Omega &= 10^3\Omega \\ M\Omega &= 10^6\Omega \end{aligned}$$



Obr. 2-16

Ohmův zákon - vztah mezi napětím a proudem na rezistoru

Tento vztah ukazuje obr. 2-15 a vztahy (2-5) a (2-6). Jiný pohled nám ukazuje obr. 2-17. Zde je na rezistory s konstantní hodnotou odporu R_1 a R_2 přiváděno různé napětí. Naměřené hodnoty proudu pro oba rezistory jsou vyneseny do grafu. Jak



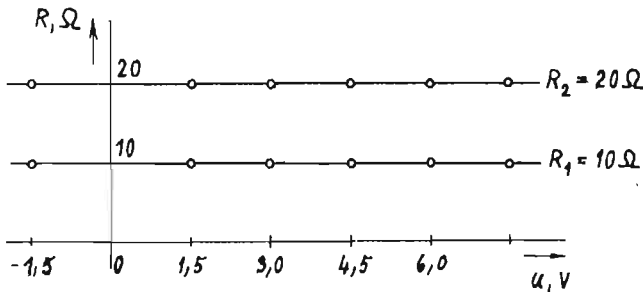
Obr. 2-17

je zřejmé, jde o závislost ve tvaru

$$i = \frac{1}{R} \cdot u = G \cdot u \quad (2-9)$$

Z tohoto vztahu lze vypočítat hodnotu odporu

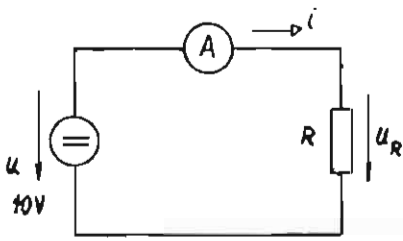
$$R = \frac{u}{i} \quad (2-10)$$



Obr. 2-18

Pro příklad z obr. 2-17 je možné vypočítat hodnoty pro naměřené velikosti u a i a vynést závislost vypočítaného odporu na napětí, jak je to provedeno na obr. 2-18. Je zřejmé, že hodnota odporu je konstantní a nezávisí na hodnotách napětí a proudů.

Př. 2-1 : Nalezněte závislost proudu i na hodnotách odporu R rezistoru. Hodnoty měňte po 1 ohmu od 1 do 10Ω .



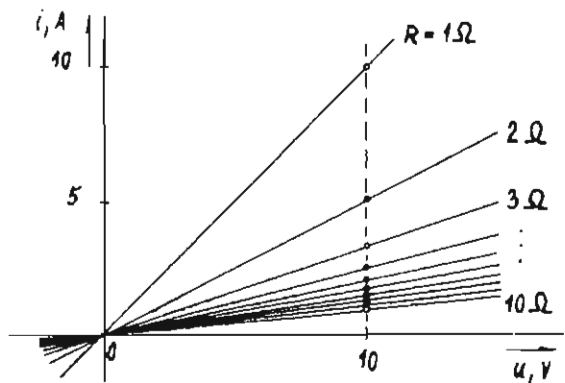
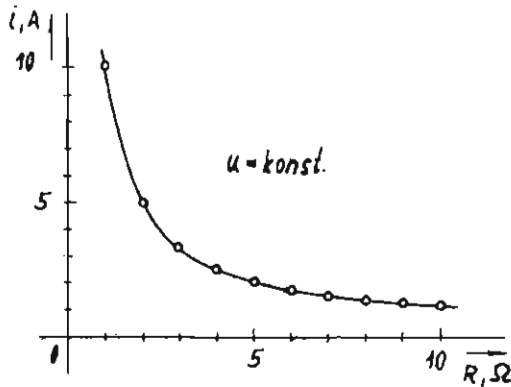
Řešení : Výchází bude Ohmův zákon

$$i = u_R / R = \frac{10 \text{ V}}{R}$$

Pro dosazené hodnoty R lze sestavit tabulku

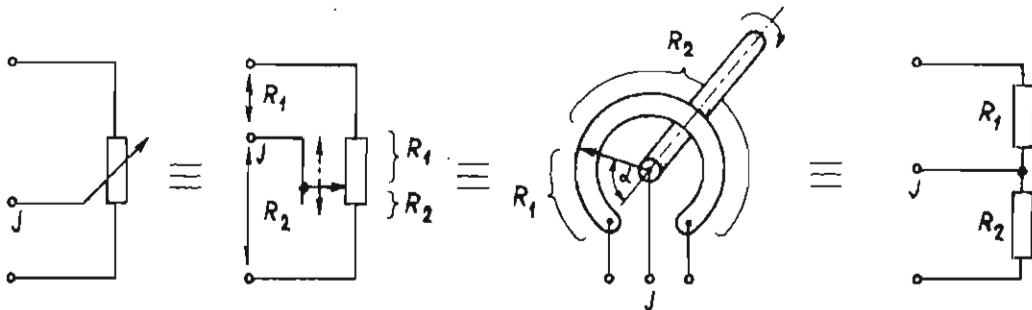
$R [\Omega]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i [\text{A}]$	10	5	3,3	2,5	2	1,7	1,4	1,3	1,1	1

Hodnoty z tabulky lze vynést do grafu. Je možné vynést i závislosti proudu na napětí (ampérvoltové charakteristiky) pro jednotlivé hodnoty rezistorů.



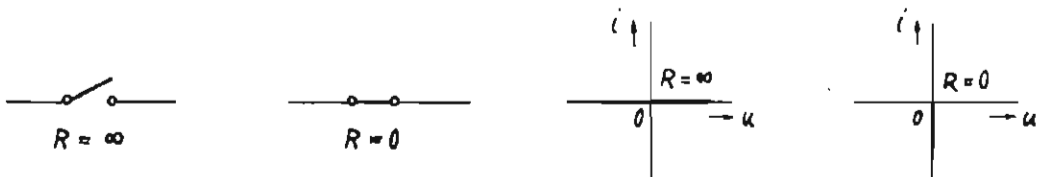
Proměnný rezistor

V některých případech potřebujeme plynule měnit hodnotu odporu rezistoru. Pak je k rezistoru připojen třetí vývod, jehož kontakt je pohyblivý a rozděljuje celý rezistor na dvě proměnné části. Na obr. 2-19 je ukázána i praktická realizace proměnného rezistoru - potenciometru. Zvláštním případem proměnného rezistoru



Obr. 2-19

je vypínač. Má jen dvě krajní polohy - vypnuto a zapnuto (obr. 2-20).



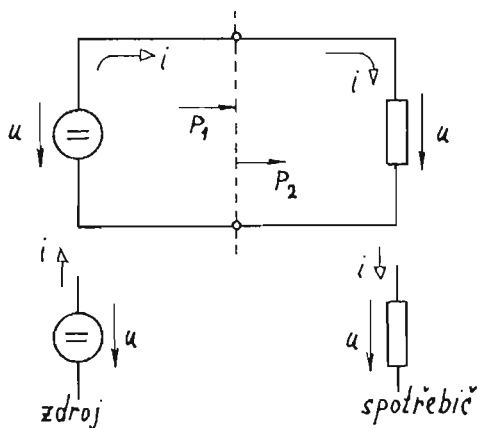
Obr. 2-20

Příklady k procvičení

- 2-1 Vypočtete proud tekoucí rezistorem o $R = 25 \Omega$, je-li připojen k zdroji napětí 100 V. Jaká bude hodnota tohoto proudu, zvýšíme-li odpor na $25 \text{ k}\Omega$?
Výsledek : 4 A, 4 mA.
- 2-2 Jaké je napětí zdroje, připojeného k rezistoru $R = 100 \Omega$, teče-li tímto rezistorem proud 0,1 A ?
Výsledek : 10 V.
- 2-3 Vypočtete odpor automobilové žárovky, teče-li jí proud 4 A při napětí 12 V a odpor normální žárovky, teče-li jí proud 0,2 A při napětí 220 V. Porovnejte jejich odpory.
Výsledek : 3Ω , 1100Ω .
- 2-4 Odpor lidského těla se mění a závisí na mnoha okolnostech. Vypočtete jeho odpor pro případ, že byl naměřen proud $25 \mu\text{A}$ při napětí 12 V.
Výsledek : 480 k Ω .

Výkon a energie na rezistoru

V částech 2.2 a 2.3 jsme ukázali, že zdroj napětí rozděljuje kladné a záporné náboje a tím jim dodává energii. Po připojení rezistoru k zdroji napětí dochází k



Obr. 2-21

P_1 je výkon dodávaný zdrojem a P_2 je výkon odebíraný spotřebičem. Vzhledem k orientaci šipek napětí a proudu je

$$P_1 < 0 \quad , \quad P_2 > 0 \quad .$$

Dvojpól jako spotřebič má tedy souhlasně orientované šipky, dvojpól jako zdroj má nesouhlasně orientované šipky směru napětí a proudu. Pro označení záporného výkonu, dodávaného ze zdroje, používáme pojem příkon.

V případě, že známe hodnotu odporu R rezistoru, můžeme počítat výkon takto :

$$P = u \cdot i = u \cdot \frac{u}{R} = \frac{u^2}{R} \quad , \quad (2-12)$$

$$p = u \cdot i = R \cdot i \cdot i = R i^2 \quad . \quad (2-13)$$

Z nich vyplývá i fakt, že hodnota výkonu při konstantním odporu je závislá na mocnině napětí či proudu.

k průtoku elektrického proudu. Po přechodu elektronů k opačnému pólu zdroje dochází k ztrátě jejich původní energie. Tato energie se přeměňuje při průchodu elektronů rezistorem v teplo. V případě vzniku vysoké teploty může dojít i k přeměně na světelnou energii, což je případ žárovky. Vztah pro výkon na rezistoru lze vyvodit ze vztahu 2-1, kdy platí $\Lambda = q \cdot u$. Vzhledem k tomu, že výkon je práce za jednotku času, platí
$$P = \frac{u \cdot q}{t} = u \cdot i \quad [W] \quad . \quad (2-11)$$

Důležité je rozlišovat dodávaný a odebíraný výkon. Na obr. 2-21 vidíme, že

Příklady k procvičení

- 2-5 Vypočítejte výkon elektrického topného tělesa, které při napětí 220 V odebírá proud 9 A.
Výsledek : 1980 W = 1,98 kW.
- 2-6 Žárovka odebírá po připojení na 220 V výkon 60 W. Jak velký proud jí teče ?
Výsledek : 0,273 A.
- 2-7 Malou žárovkou teče proud 0,2 A při napětí 3 V. Jak se zvýší proud a jak výkon, připojíme-li ji na napětí 6 V ? Jaký bude mít následek toto zvýšení napětí, byla-li žárovka určena pro napětí 3 V ?
Výsledek : $i_2 = 0,4$ A, $P_2 = 2,4$ W = $4 \cdot P_1$. Přílišné zvýšení výkonu způsobí přepálení žárovky.

Energie spotřebovaná na rezistoru

Energie neboli vykonaná práce je přímo dána vztahem (2-1), který lze upravit

$$W_E = A = u \cdot q = u \cdot i \cdot t = P \cdot t \text{ [joule]} = [Ws]$$

V praxi jsou využívány i jednotky 1 watthodina [Wh] = 3600 Ws a 1 kWh = $3,6 \cdot 10^6$ Ws. Při proměnné hodnotě výkonu $p(t)$ je nutno energii počítat podle vztahu

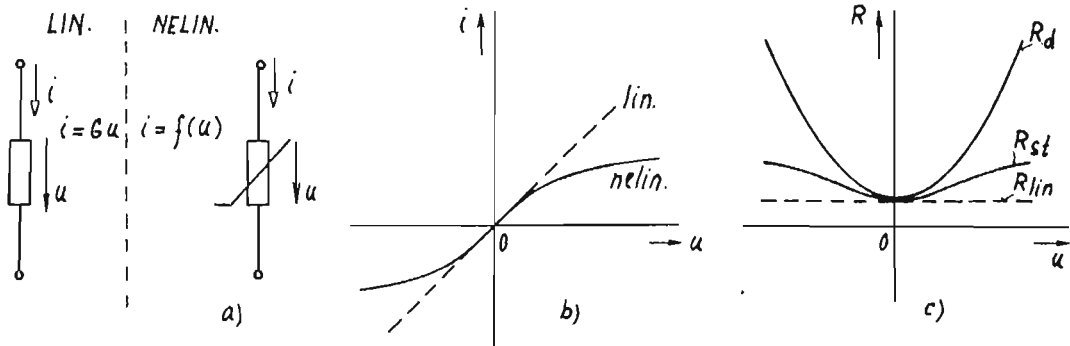
$$W_E = \int_0^t p(t) dt$$

Příklady k procvičení

- 2-8 Jakou energii má nabitý akumulátor s napětím 12 V, byl-li nabíjen proudem 5 A po dobu 10 hodin ?
Výsledek : 600 Wh = 0,6 kWh.
- 2-9 O kolik stupňů ohřeje elektrický ohříváč o příkonu 1 kW 100 litrů vody za osm hodin provozu, když k ohřevu 1 litru vody o 1 °C je zapotřebí energie asi 1 kcal = 4187 J ?
Výsledek : 0 68,8 stupňů.
- 2-10 Kolik stojí energie 1 kWh získané ze suchých článků 1,5 V, když článek dodá proud 0,2 A po dobu 1 hodiny a jeho cena je 1,50 Kčs ?
Výsledek : 5000 Kčs.

2.6 NELINEÁRNÍ REZISTORY

Vzájemná závislost napětí a proudu je u těchto rezistorů nelineární, jak je zřejmé z obr. 2-22 b. Schématická značka z obr. 2-22 a) pro nelineární rezistor je obecná. Konkrétní nelineární prvky, jako např. dioda na obr. 2-24, mají svou vlastní značku. Problematická je nyní definice odporu takového rezistoru. Hodnota odporu je závislá na napětí a proudu a lze ji v podstatě definovat dvěma způsoby, jak je



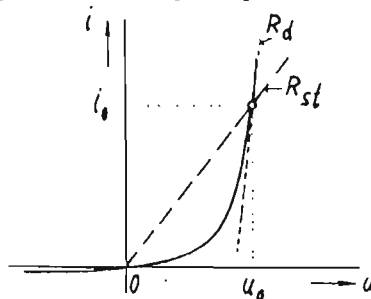
Obr. 2-22

ukázáno na obr. 2-23. Dynamický odpor vyjadřuje hodnotu odporu pro dané napětí a proud, statický odpor zase hodnotu lineárního odporu, kterým při stejném napětí teče stejný proud.

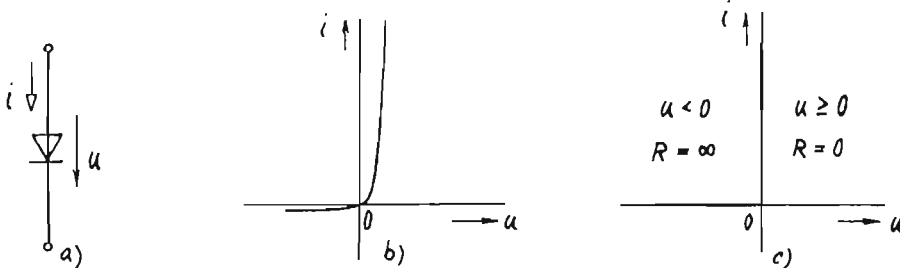
$$R_{St} = \frac{u_0}{i_0} \quad (2-14)$$

$$R_d = \frac{du}{di} \quad (2-15)$$

Na obr. 2-22c jsou závislosti dynamického a statického odporu pro daný nelineární prvek a je zřejmé, že jsou odlišné. Typickým příkladem nelineárního prvku je dioda, jejíž značka a ampérvoltová charakteristika jsou na obr. 2-24. Často se používají zjednodušené ampérvoltové (A-V)



Obr. 2-23



Obr. 2-24

charakteristiky. A-V charakteristika z obr. 2-24c vyjadřuje idealizovanou diodu, která klade proud v jednom směru nulový odpor a v druhém směru nekonečný odpor.

Otázky_k_samostatnému_studiu

- 2-1 K jakým účelům slouží elektrické obvody? Uveďte příklady. Jaké prvky tyto obvody mohou obsahovat?
- 2-2 Co je to elektrický náboj? Jaká je jeho základní jednotka a jaká je jeho nejmenší hodnota?
- 2-3 Jak rozdělujeme látky podle přítomnosti volných nábojů?
- 2-4 Jaké je silové působení mezi elektrickými náboji? Proč musíme vykonat práci při oddělení kladného a záporného náboje?

- 2-5 Jak vzniká elektrické napětí a jaká je jeho základní jednotka ?
- 2-6 Jaké zdroje elektrického napětí běžně používáme ? Jaké mají časové průběhy ?
- 2-7 Jak a čím měříme elektrické napětí ? Jak spojujeme zdroje napětí a jaké výsledné napětí získáváme ?
- 2-8 Jak vzniká elektrický proud a jak je definován ? Jakou má základní jednotku ?
- 2-9 Jaký je vztah mezi elektrickým proudem a proudovou hustotou ?
- 2-10 Jak se chová ideální zdroj proudu ? Je jejich výskyt v praxi běžný ?
- 2-11 Jak a čím se měří velikost elektrického proudu ?
- 2-12 Jak je možno vyjádřit schopnost materiálu vést elektrický proud ? Jak tato schopnost závisí na vlastnostech a geometrických rozměrech materiálu ? Které materiály využíváme k realizaci vodičů a které pro realizaci rezistorů ?
- 2-13 Jaký je vztah mezi napětím a proudem na rezistoru ? Jak závisí hodnota odporu R na hodnotě napětí u lineárního rezistoru ?
- 2-14 Jak lze realizovat plynule proměnný rezistor ? Popište jej !
- 2-15 Vysvětlete elektrický výkon. Jaká je jeho jednotka ? Proč dochází při průchodu proudu přes rezistor k přeměně výkonu na tepelný výkon ?
- 2-16 Vysvětlete, kdy je výkon kladný a kdy je záporný. Vysvětlete zdrojovou a spotřebičovou orientaci šipek napětí a proudu na prvku.
- 2-17 Jaký je vztah mezi energií a výkonem na rezistoru ? Jaká je základní jednotka této energie a výkonu ?
- 2-18 Jaký je rozdíl mezi lineárním a nelineárním rezistorem ?
- 2-19 Jak je popsáno chování nelineárního rezistoru v obvodu ?
- 2-20 Nakreslete a vysvětlete příklad A-V charakteristiky nelineárního rezistoru. Jak lze definovat odpor tohoto rezistoru ? Na čem závisí jeho hodnota ?
- 2-21 Uveďte příklady A-V charakteristik nelineárních rezistorů.

3 ODPOROVÉ OBVODY

Nejjednoduššími elektrickými obvody jsou obvody, obsahující pouze rezistory a zdroje napětí či proudu. O těchto zdrojích uvažujeme, že jsou stejnosměrné, i když pro zdroje s harmonickými průběhy veličin jsou postupy řešení a výsledky obdobné.

Pro rozbor vlastností těchto obvodů a pro výpočet neznámých hodnot napětí a proudů v těchto obvodech je nutno vysvětlit některé základní principy a zákony. Dále ukážeme postupy řešení a způsoby měření těchto veličin.

Obsah této kapitoly je následující :

3.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY A ZÁKONY PRO ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

Kirchhoffovy zákony, princip ekvivalence a superpozice.

3.2 ZÁKLADNÍ TYPY JEDNODUCHÝCH OBVODŮ A JEJICH ŘEŠENÍ

Sérioparalelní obvody, dělič napětí a proudu, náhrada reálného zdroje ideálním zdrojem napětí či proudu.

3.3 OBECNÉ METODY ŘEŠENÍ OBVODŮ

Metoda Kirchhoffových a prvkových rovnic, metoda uzlových napětí a metoda smyčkových proudů.

3.4 ŘEŠENÍ OBVODŮ S NELINEÁRNÍMI REZISTORY

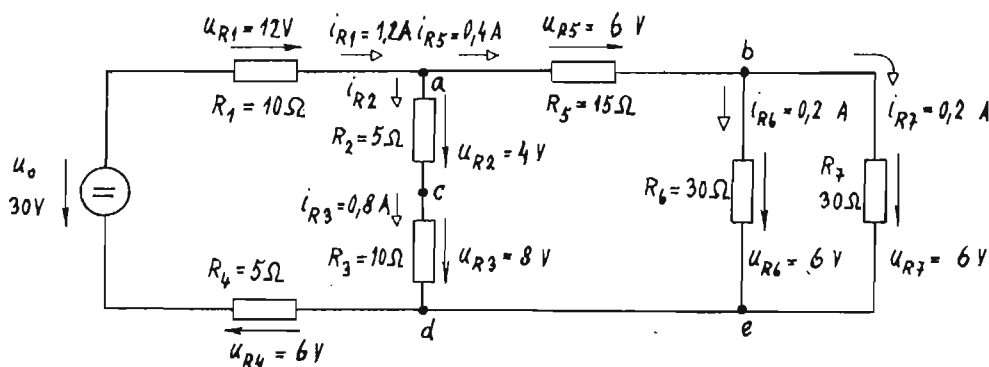
3.5 MĚŘENÍ STEJNOSMĚRNÝCH VELIČIN

Voltmetr, ampérmetr a ohmmetr.

3.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY A ZÁKONY PRO ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

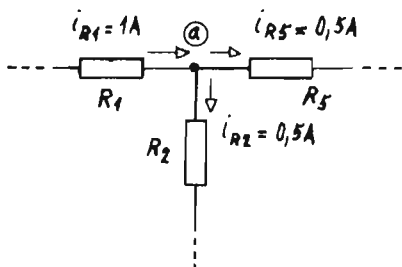
V předešlé kapitole jsme uvedli Ohmův zákon, který určuje vztah mezi napětími a proudy na rezistoru. U složitějších obvodů, jako je např. obvod na obr. 3-1, však pouze se znalostí Ohmova zákona nevystačíme. Musíme poznat zákonitosti mezi hodnotami jednotlivých proudů v obvodu a mezi hodnotami jednotlivých napětí v obvodu.

Kirchhoffovy zákony



Obr. 3-1

Na obr. 3-1 je obvod s naměřenými hodnotami napětí a proudů. Pro zjištění vztahu mezi jednotlivými proudy si zavedeme pojem uzel elektrického obvodu. Je to místo spojení vodičů od jednotlivých prvků obvodu, jak je to ukázáno na obr. 3-2. Pro tento uzel lze napsat rovnici



$$i_{R1} = i_{R2} + i_{R5} \quad (3-1)$$

jak je zřejmé z hodnot na obr. 3-2. Tu to rovnici lze převést do tvaru

$$i_{R1} - i_{R2} - i_{R5} = 0 \quad (3-2)$$

Obr. 3-2 Uzel "a" obvodu z obr. 3-1

což odpovídá součtu všech proudů ve směru proudu do uzlu. Obecně lze tento poznatek napsat ve tvaru 1. Kirchhoffova zákona (1. KZ) pro součet proudů v uzlu :

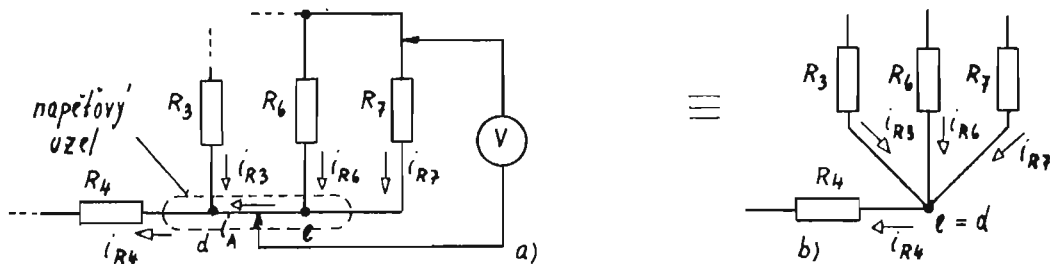
$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (3-3)$$

Tento zákon vyplývá z poznatku, že v uzlu a ve vodiči se nemůže elektrický náboj sbírat. Všimněme si, že můžeme provádět i součet proudů vytékajících z uzlu se stejným výsledkem, jde jen o vynásobení rovnice (3-2) hodnotou -1. Dále je potřebné si uvědomit, že i uzel "c" z obr. 3-1 je uzel, pro který platí

$$i_{R2} - i_{R3} = 0 \quad (3-4)$$

a že proto $i_{R2} = i_{R3}$. Lze tedy říci, že sériově spojenými prvky (za sebou) protéká stejný proud.

Rozšíření pojmu uzel obvodu. Na obr. 3-2 je nakreslen uzel "a", který lze nazvat grafický. Toto grafické znázornění ukazuje, jsou-li křižující se vodiče spojeny nebo ne. Samozřejmě že pro takovýto uzel musí platit 1. KZ. Podívejme se ale na obr. 3-3a s částí obvodu z obr. 3-1, kde vidíme dva grafické uzly "d" a "e", spojené vodičem. Pokud uvážíme, že vodič mezi uzly má nulový odpor, pak je



Obr. 3-3

na všech takto spojených místech stejný potenciál a např. napětí na rezistoru R_7 lze měřit na libovolném místě těchto vodičů se stejným výsledkem. Takto lze chápat "uzel napěťový" a obvod je možné beze změny funkce překreslit do schématu podle obr. 3-3b. Pak lze napsat 1. KZ jak pro uzly "d" a "e",

$$i_{R3} + i_A = i_{R4} \quad ; \quad i_{R6} + i_{R7} = i_A \quad (3-5)$$

tak i pro celý "napěťový uzel" získaný spojením uzlů "d" a "e" :

$$i_{R3} + i_{R6} + i_{R7} = i_{R4} \quad (3-6)$$

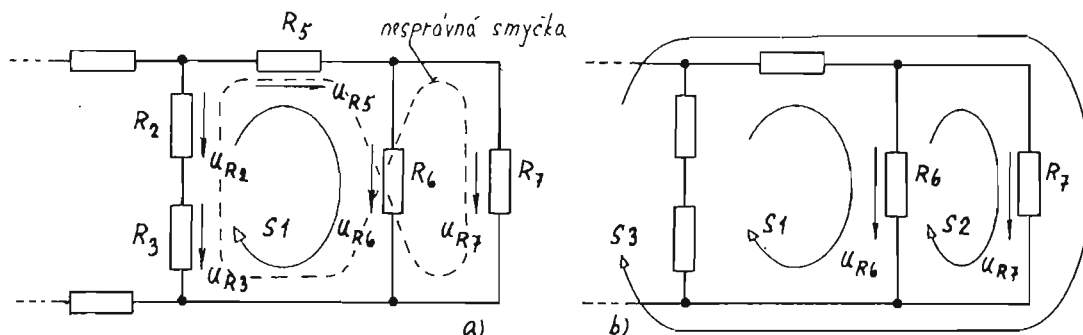
Tuto rovnici lze získat součtem předchozích rovnic, což potvrzuje shodné vlastnosti obou způsobů popisu.

Příklad k procvičení

3-1 Jaký proud je odebírán z akumulátoru v automobilu, když jsou z něho napájeny dvě žárovky, každá s příkonem 48 W, a dále ještě ventilátor chlazení, který odebírá proud 3 A ? Napětí akumulátoru je 12 V.

Výsledek : $i = 4 + 4 + 3 = 11$ A.

Pro objasnění vztahů mezi napětími v obvodu je potřebné zavést pojem smyčka. Je to taková část obvodu, která vytváří uzavřenou cestu bez vícenásobného průchodu týmž místem (t.j. bez křížení cesty). Příklad správné smyčky, nesprávné smyčky a všech smyček části obvodu z obr. 3-1 je na obr. 3-4. Pro smyčku z obr. 3-4 lze napsat



Obr. 3-4 Příklad smyček v obvodu z obr. 3-1

rovnici pro součet napětí ve smyčce, přičemž napětí orientovaná ve směru smyčky chápeme jako kladná :

$$-u_{R2} - u_{R3} + u_{R5} + u_{R6} = 0$$

O správnosti této rovnice se můžeme přesvědčit dosazením naměřených hodnot. Pro součet napětí ve smyčce, kde napětí ve směru smyčky chápeme jako kladná a napětí orientovaná proti směru smyčky jako záporná, lze napsat 2. Kirchhoffův zákon (2. KZ) :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0 \quad (3-7)$$

Zvláštním případem je smyčka pouze s dvěma napětími, např. smyčka 2 na obr. 3-4c. Pak podle 2. KZ platí

$$-u_{R6} + u_{R7} = 0$$

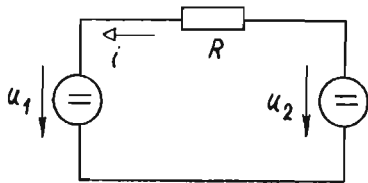
takže musí platit, že $u_{R6} = u_{R7}$. Lze tedy říci, že na paralelně spojených prvcích musí být shodné napětí !

Příklady k procvičení

3-2 Kolik stejných žárovek musíme spojit do série (za sebou), abychom takto vytvořený obvod mohli připojit na 220 V ? Napětí na každé žárovce nesmí převýšit 12V. Jaké bude v tom případě napětí na každé žárovce ?

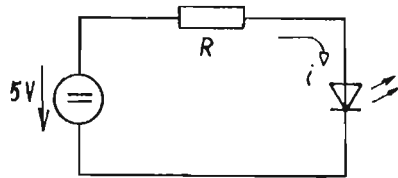
Výsledek : 19 žárovek, na každé je napětí 11,6 V.

3-3



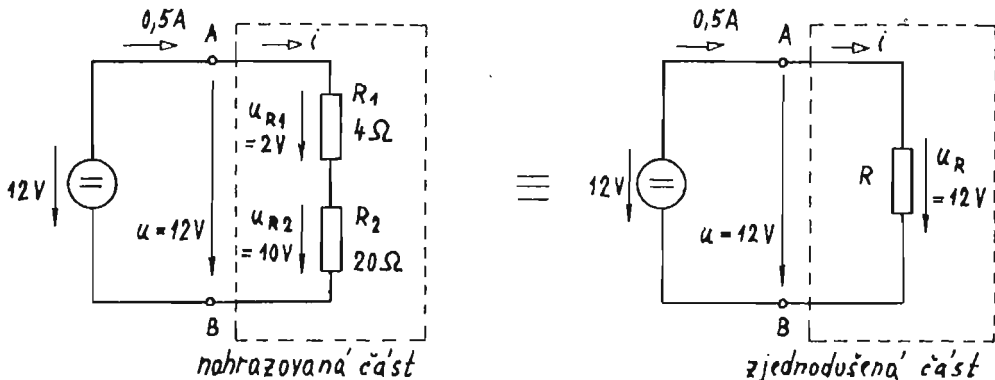
Jaký proud i poteče rezistorem R , je-li hodnota $R = 1 \text{ k}\Omega$, hodnota $U_1 = 12 \text{ V}$ a hodnota U_2 je a) 6 V
 b) 12 V ?
 Výsledek : a) $i = -6 \text{ mA}$
 b) $i = 0 \text{ A}$.

3-4 Určete potřebnou hodnotu rezistoru R , má-li být na svítivé diodě napětí 2 V , když při tomto napětí teče diodou proud 30 mA .
 Výsledek : $R = 100 \Omega$.



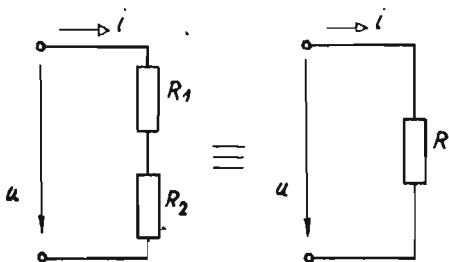
Princip ekvivalence

Tento princip zjednodušuje řešení některých obvodů. Podstata tohoto zjednodušení spočívá v tom, že část složitějšího obvodu nahradíme jednodušším obvodem tak, aby se napětí a proudy v místě připojení náhradního obvodu nezměnily. Původní a náhradní část obvodu tedy musí mít z hlediska připojovacích svorek ekvivalentní vlastnosti. Princip je zřejmý z obr. 3-5. Proud i a napětí u jsou pro oba případy shodné



Obr. 3-5 Princip ekvivalentní náhrady obvodu

a proto musí být odpor rezistoru R shodný (ekvivalentní) s odporem sériově spojených rezistorů R_1 a R_2 . Na základě této ekvivalence můžeme vypočítat hodnotu odporu sériově spojených rezistorů. Z 1. KZ platí



Obr. 3-6 Ekvivalentní náhrada sériového spojení rezistorů

$$i = i_{R1} = i_{R2} = i \quad (3-8)$$

a z 2. KZ platí

$$u = u_{R1} + u_{R2} = u_R \quad (3-9)$$

Podle Ohmova zákona můžeme za u_{R1} , u_{R2} a u_R dosadit

$$i \cdot R_1 + i \cdot R_2 = i \cdot R \quad (3-10)$$

Vzhledem k 1. KZ (3-8) pak platí

$$i \cdot R_1 + i \cdot R_2 = i \cdot R \quad (3-11)$$

takže po vykrácení proudu i dostaneme

$$R_1 + R_2 = R \quad (3-12)$$

což odpovídá i numerickým hodnotám rezistorů na obr. 3-5. Tento poznatek můžeme rozšířit i pro spojení většího počtu sériově spojených rezistorů :

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3-13)$$

Příklady k procvičení

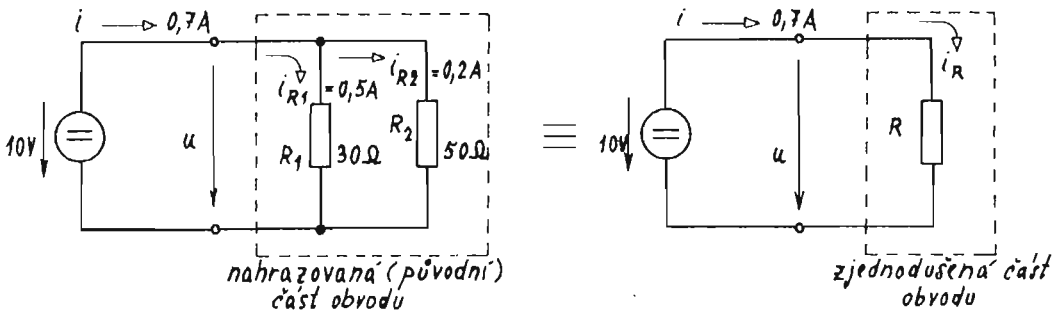
3-5 Vypočtete hodnotu výsledného odporu při sériovém spojení dvou rezistorů R_1 a R_2 , je-li $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ a R_2 je a) $1 \text{ k}\Omega$, b) 100Ω , c) $10 \text{ k}\Omega$. Který z obou rezistorů se na celkovém odporu podílí nejvíce ?

Výsledek : a) $2 \text{ k}\Omega$, b) 1100Ω , c) $11 \text{ k}\Omega$. Nejvíce se podílí rezistor s vyšší hodnotou odporu.

3-6 Jakou hodnotu musí mít rezistor R_3 spojený do série s rezistory $R_1 = 900 \Omega$ a $R_2 = 350 \Omega$, aby výsledný odpor byl 1320Ω ?

Výsledek : $R_3 = 70 \Omega$.

Ekvivalentní náhrada paralelního spojení rezistorů - zjednodušení obvodu si ukažme na obr. 3-7. Ekvivalentní hodnotu odporu R si opět odvodíme z principu ekvi-



Obr. 3-7 Princip ekvivalentní náhrady paralelního spojení rezistorů

valence při použití 1. a 2. KZ. Zde platí z 2. KZ a principu ekvivalence

$$U = U_R = U_{R1} = U_{R2} \quad (3-14)$$

Z 1. KZ a principu ekvivalence platí

$$i = i_R = i_{R1} + i_{R2} \quad (3-15)$$

Obdobně jako u sériového spojení dosadíme do (3-15) podle Ohmova zákona

$$u \cdot G = u \cdot G_1 + u \cdot G_2 \quad (3-16)$$

Po vykrácení pak dostaneme tvar pro součet vodivostí

$$G = G_1 + G_2 \quad (3-17)$$

Tento vztah lze zobečnit na více paralelně spojených vodivostí G_1 až G_n

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (3-18)$$

Vzhledem k tomu, že $G = 1/R$, lze tento vztah též vyjádřit v tvaru :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3-19)$$

Často se využívá vztah pro paralelní spojení dvou rezistorů, který lze odvodit z (3-19) :

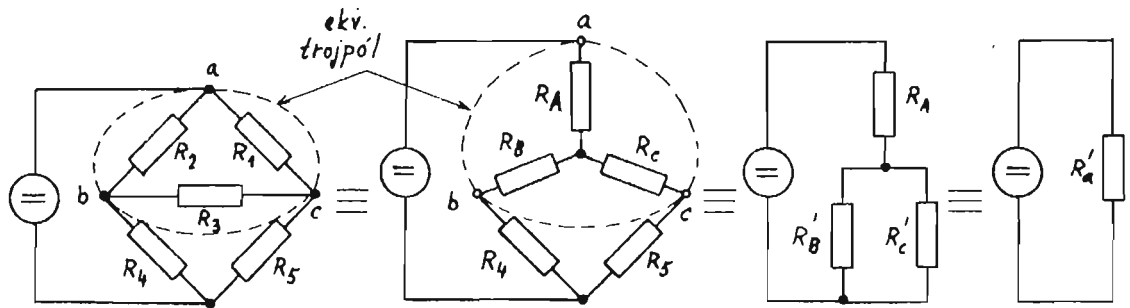
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3-20)$$

Příklady k procvičení

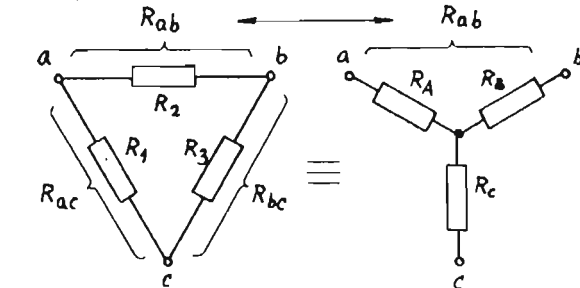
- 3-7 Vypočítejte výsledný odpor pro paralelní spojení dvou rezistorů R_1 a R_2 , když $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ a R_2 je a) $1 \text{ k}\Omega$, b) 100Ω , c) $10 \text{ k}\Omega$. Posuďte, který z dvojice rezistorů má větší vliv na hodnotu celkového odporu ?
 Výsledek : a) 500Ω , b) $90,9\Omega$, c) 909Ω . Větší vliv má menší z obou rezistorů.
- 3-8 Vypočítejte, jaký rezistor R_2 musíme připojit paralelně k R_1 , aby výsledný odpor byl $1,2 \text{ k}\Omega$, když $R_1 = 1210\Omega$?
 Výsledek : $145,2 \text{ k}\Omega$.

Ekvivalentní náhrada trojčlenu (přepočít hvězda - trojúhelník)

Některé obvody, jako je obvod na obr. 3-8, nelze zjednodušit sériovým nebo paralelním spojováním rezistorů. Jednou z možností, jak řešit tento obvod, je náhrada trojčlenu (obvodu s třemi vývody, na obr. 3-8 označeny a, b, c) za trojčlen s ekvivalentními vlastnostmi na svorkách a, b a c, ale s vhodnějším vnitřním spojením, které umožňuje sériové či paralelní spojování v celém obvodu, jak je to na obr. 3-8b-d. Pro ekvivalentní náhradu trojčlenu s uzly a, b, c lze vyjít opět z principu



Obr. 3-8



Obr. 3-9 Ekvivalence

ekvivalence. Na jeho základě musí platit, že odpory mezi svorkami a, b, c (R_{ab}, R_{bc}, R_{ca}) u obvodu typu trojúhelník musí být shodné s odpory mezi svorkami a, b, c u obvodu typu hvězda. Z této úvahy lze sestavit tři rovnice a z nich odvodit vztahy pro výpočet odporů

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_x}, \quad R_B = \frac{R_2 R_3}{R_x}, \quad R_C = \frac{R_1 R_3}{R_x}, \quad (3-21)$$

kde $R_x = R_1 + R_2 + R_3$. Pro výpočet odporů trojúhelníka (přepočet $\lambda \rightarrow \Delta$) platí

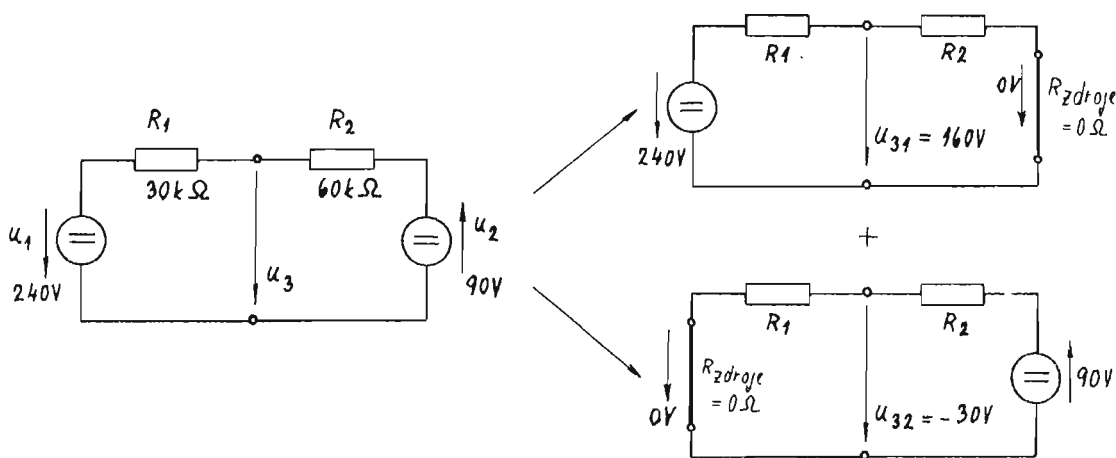
$$R_1 = \frac{R_Y}{R_B}, \quad R_2 = \frac{R_Y}{R_C}, \quad R_3 = \frac{R_Y}{R_A}, \quad (3-22)$$

kde $R_Y = R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C$.

Obdobným způsobem by bylo možné vyvodit i vztahy pro přepočty ekvivalentních čtyřpólů či vícepólů, ale vzhledem k velké složitosti se jich nepoužívá.

Princip superpozice

Tento princip umožňuje jednoduché řešení obvodů s dvěma či více zdroji. Jeho podstata spočívá v tom, že výsledná veličina (řešené napětí či proud) je dána součtem veličin v daném místě obvodu, vzniklých při působení každého zdroje zvlášť. Je to ukázáno na příkladu z obr. 3-10. Zde platí, že výsledné napětí u_3 je dáno



Obr. 3-10 Princip superpozice

součtem napětí u_{31} a u_{32} , vyvolaných působením zdrojů u_1 a u_2 zvlášť. Pak tedy platí

$$u_3 = u_{31} + u_{32} = 160 - 30 = 130 \text{ V.}$$

Pravidla použití principu superpozice :

1. Vynechání ideálního zdroje napětí provedeme jeho zkratem (vnitřní odpor zdroje je 0).
2. Vynechání ideálního zdroje proudu provedeme jeho rozpojením (vnitřní odpor zdroje je ∞).
3. PLATÍ POUZE PRO LINEÁRNÍ OBVODY !

Otázky k samostatnému studiu

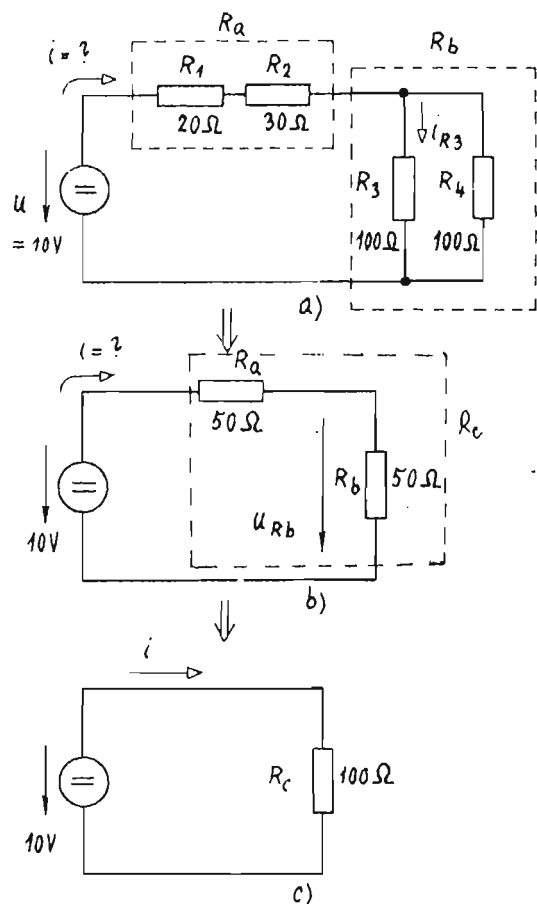
- 3-1 Vysvětlete pojem uzlu. Kdy lze spojovat více uzlů dohromady bez změny vlastností obvodu? Jaké je napětí v různých místech uzlu a k němu připojených vodičů?

- 3-2 Objasněte, jaký vztah platí pro součet proudů v uzlu. Jak proudy sčítáme z hlediska jejich směrů ?
- 3-3 Vysvětlete, co je smyčka obvodu. Na konkrétních příkladech obvodů nalezněte všechny smyčky.
- 3-4 Objasněte, jaký vztah platí pro součet napětí ve smyčce. Jak sčítáme tato napětí z hlediska jejich směrů ?
- 3-5 Za jakých podmínek lze podle principu ekvivalence nahradit část složitějšího obvodu jiným jednoduchým obvodem ?
- 3-6 Co je to sériové spojení prvků ? Jak lze nahradit sériově spojené rezistory ?
- 3-7 Co je to paralelní spojení prvků ? Jak lze nahradit paralelně spojené rezistory ?
- 3-8 Jak lze na základě principu ekvivalence nahradit vícepólový prvek a jak to konkrétně aplikovat na trojpol (přepočítání $\Delta \leftrightarrow \Lambda$) ?
- 3-9 Jakým způsobem lze zjednodušit řešení obvodů s více zdroji ? Jaká pravidla při tom platí ?

3.2 ZÁKLADNÍ TYPY JEDNODUCHÝCH OBVODŮ A JEJICH ŘEŠENÍ

Řešení sérioparalelních obvodů

Tyto obvody mají prvky sériově a paralelně řazeny tak, že je lze metodou ekvivalence postupně zjednodušovat. Příklad takového obvodu je na obr. 3-11. Je třeba



Obr. 3-11 Řešení sérioparalelních obvodů

ba vypočítat hodnotu celkového proudu i , odebíraného ze zdroje napětí. Postup řešení spočívá v postupném zjednodušování až do nejjednoduššího obvodu na obr. 3-11c.

1. Nalezneme všechna sériová a paralelní spojení (R_1 sériově s R_2 , R_3 paralelně s R_4).
2. Nakreslíme nové schéma s náhradními vypočítanými odpory (obr. 3-11b). K těmto náhradním prvkům nalezneme ekvivalentní hodnoty :

$$R_a = R_1 + R_2$$

$$R_b = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Nové schéma podle obr. 3-11b řešíme znovu podle bodů 1 a 2, takže dospějeme k novému schématu na obr. 3-11c, kde

$$R_c = R_a + R_b$$

Tento jednoduchý obvod lze již řešit pomocí Ohmova zákona :

$$i = \frac{u}{R_c} = \frac{10 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,1 \text{ A}$$

Na základě tohoto řešení je pak možno odvodit hodnotu některého napětí či proudu v obvodu na obr. 3-11a.

Vypočítejme např. hodnotu i_{R3} . Nejprve z hodnoty celkového proudu i vypočteme

hodnotu u_{Rb} (obr. 3-11b) : $u_{Rb} = i \cdot R_b = 0,150 = 5 \text{ V}$.

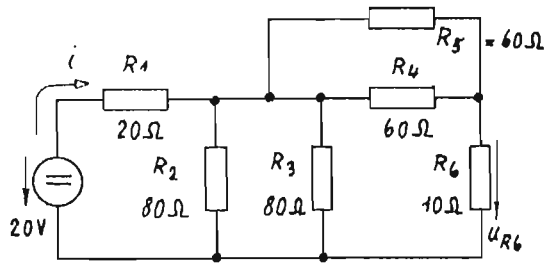
Vzhledem k tomu, že u_{Rb} z obr. 3-11b odpovídá u_{R3} a u_{R4} na obr. 3-11a, platí, že

$$i_{R3} = u_{Rb}/R_3 = 5/100 = 0,05 \text{ A} = 50 \text{ mA}.$$

Příklad k procvičení

3-9 Vypočítejte hodnotu proudu i a hodnotu napětí u_{R6} v obvodu.

Výsledek : $i = 0,5 \text{ A}$,
 $u_{R6} = 2,5 \text{ V}$.



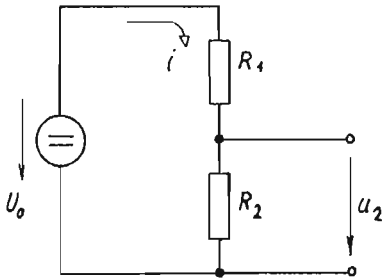
Dělič napětí

Jde o často využívaný obvod pro získání nižších napětí, než je napětí napájecího zdroje. Příklad děliče napětí je na obr. 3-12. Výpočet výstupního napětí u_2 je zřejmý : u_2 je napětí na rezistoru R_2 a je dáno Ohmovým zákonem

$$u_2 = i_{R2} \cdot R_2 \quad (3-23)$$

Hodnota $i_{R2} = i$. Výpočet proudu i je dán principem ekvivalence

$$i = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$



Obr. 3-12 Dělič napětí

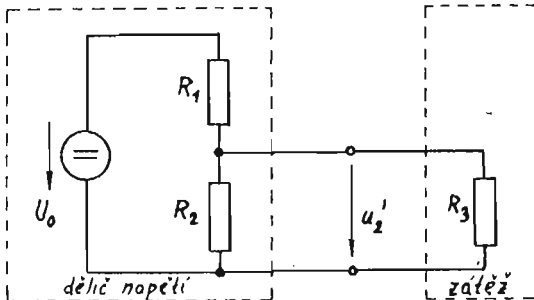
Po dosazení do (3-23) dostaneme výsledek $u_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} R_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4 \text{ V}$.

Je vhodné si uvědomit, že při změně vstupního napětí se mění i výstupní napětí, takže jejich poměr zůstává konstantní :

$$\frac{u_2}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3-24)$$

Zatížený dělič napětí

V praxi bývá dělič napětí zatížen rezistorem s konečnou hodnotou odporu. Dů-



Obr. 3-13 Zatížený dělič napětí

ležitou otázkou je, jak se změní výstupní napětí děliče, když je zatížen. Výpočet výstupního napětí můžeme provést obdobným způsobem jako u nezatíženého děliče s tím, že místo R_2 uvažujeme paralelní kombinaci R_2 a R_3 :

$$R'_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 \text{ k}\Omega$$

a výsledné napětí je

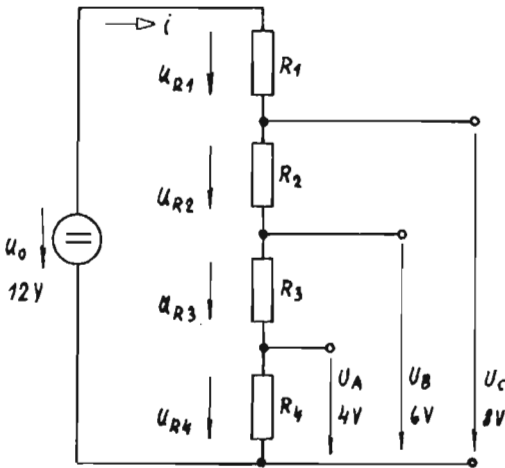
$$u_2' = U_0 \frac{R_2'}{R_2' + R_3} = 3 \text{ V.}$$

Je zřejmé, že napětí při zvyšujícím se proudu zátěže (zmenšování R_3) klesá. Lze vyslovit názor, že

pro $R_3 \gg R_2$	je $u_2' \rightarrow u_2$	a dělič pracuje dobře
pro $R_3 \ll R_2$	je $u_2' \rightarrow 0$	a dělič ztrácí smysl

Vícenásobný dělič napětí

V některých případech potřebujeme získat z jednoho napájecího zdroje více hodnot napětí. To je možné realizovat



paralelním spojením více děličů napětí nebo vícenásobným děličem podle obr. 3-14. Uveďme si příklad, kdy je zapotřebí získat ze zdroje o napětí 12 V další napětí o hodnotách 4 V, 6 V a 8 V. Pro návrh uvažujme, že proud $i = 0,1 \text{ A}$. Pak můžeme psát :

$$u_A = u_4 = i \cdot R_4$$

Hodnota R_4 je

$$R_4 = u_{R4}/i = 40 \Omega$$

Napětí na R_3 je

$$u_{R3} = u_B - u_A = 2 \text{ V.}$$

Pak pro R_3 platí

$$R_3 = u_{R3}/i = 20 \Omega$$

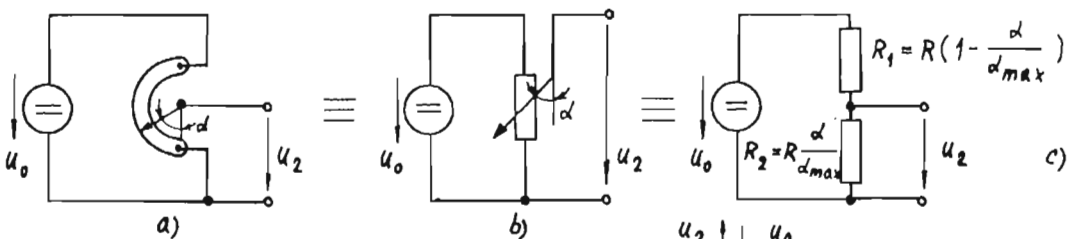
Stejným postupem pak získáme i hodnoty

Obr. 3-14 Vícenásobný dělič napětí

$R_2 = 20 \Omega$ a $R_1 = 40 \Omega$. Dopočítejte jako cvičení !

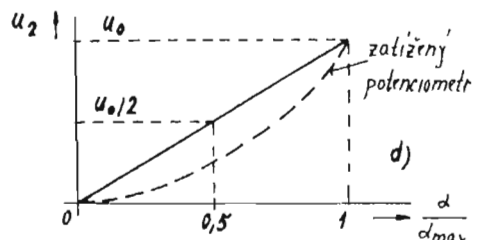
Proměnný dělič napětí - potenciometr

Již uvedený proměnný odpor (obr. 2-19) lze využít jako proměnný dělič napětí,



Obr. 3-15 Proměnný dělič napětí

jak je ukázáno na obr. 3-15. Výstupní napětí děliče bude záviset na poloze jezdce, v případě otočného potenciometru na úhlu α . Bude-li



záviset hodnota rezistorů R_1 a R_2 na úhlu α podle obr. 3-15c, pak lze odvodit, že

$$\frac{u_2}{u_0} = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} .$$

Tato lineární závislost výstupního napětí na úhlu α se změní buď v případě zatíženého děliče (obr. 3-15d), nebo v případě, že závislost hodnot odporu R_1 na úhlu natočení není lineární. Běžně se vyrábí potenciometry se závislostí logaritmickou nebo exponenciální.

Dělič proudu

Tento obvod se používá, potřebujeme-li vést prvkem jen část celého proudu dané větve. Použití si ukážeme na příkladu, kdy máme vypočítat, jaký proud teče ampérmetrem, je-li jeho odpor $R_A = 9 \Omega$. Tento proud i_A vypočítáme z Ohmova zákona $i_A = u_A / R_A$.

Pro výpočet u_A musíme zjistit hodnotu paralelního spojení R_A a R_1 , kdy celkový odpor je

$$R = \frac{R_A R_1}{R_A + R_1} = 0,9 \Omega .$$

Pak celkové napětí $u_A = I_0 R = 0,9 \text{ V}$.

Z toho vypočteme proud i_A : $i_A = \frac{u_A}{R_A} = 0,1 \text{ A}$.

Rezistorem R_1 teče zbývající proud $0,9 \text{ A}$. Dosazením za u_A lze odvodit obecný vztah pro proudový dělič z rezistorů R_1 a R_2 :

$$i_{R_2} = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I_0 \frac{G_2}{G_1 + G_2} . \quad (3-25)$$

Příklady k procvičení

3-10 Žárovka je určena pro napětí 5 V a proud $0,2 \text{ A}$. Napájecí napětí je 12 V . Jaký rezistor je nutné zařadit do série s žárovkou, aby nebyla přetížena ? Na jaký výkon musí být dimenzován tento rezistor ?

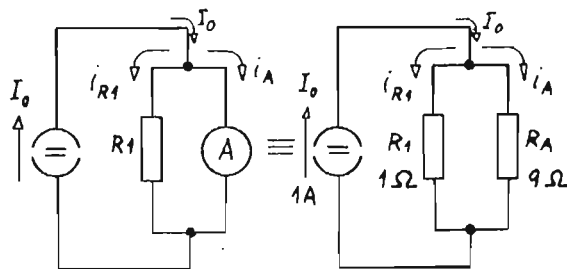
Výsledek : 35Ω na výkon $1,4 \text{ W}$.

3-11 Navrhněte dělič napětí z 60 V na 24 V tak, aby při zátěži rezistorem $1 \text{ k}\Omega$ pokleslo výstupní napětí na hodnotu 22 V .

Výsledek : $R_1 = 227 \Omega$, $R_2 = 151 \Omega$.

3-12 Jak velký odpor musí mít rezistor R_1 , který je paralelně k R_2 , aby rezistorem R_2 tekl proud 1 mA ? Hodnota $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ a celkový proud větvi je 1 A .

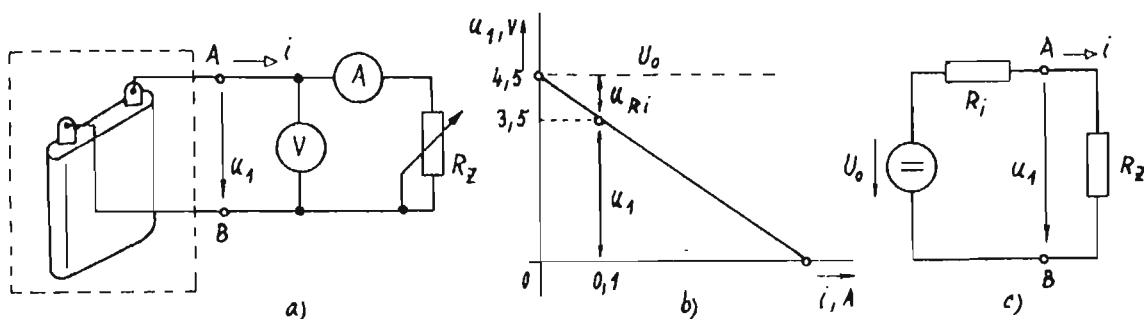
Výsledek : $R_1 = 1/0,999 \Omega$.



Obr. 3-16 Dělič proudu

Vyjádření reálného zdroje elektrické energie

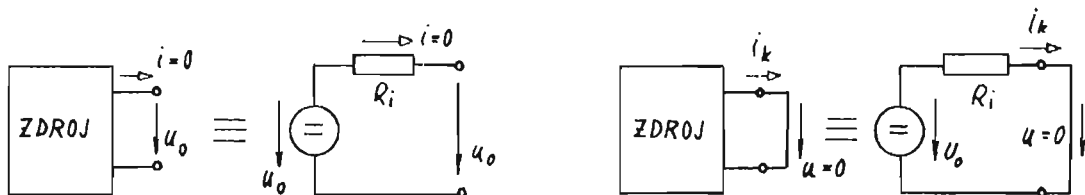
Dosud jsme uvažovali ideální zdroj napětí, jehož napětí je konstantní a nezávisí na hodnotě odebíraného proudu. Obdobně se chová ideální zdroj proudu. Reálné zdroje elektrické energie se však chovají jinak, jak je to zřejmé z obr. 3-17. Je zde znázorněna závislost napětí ploché baterie na odebíraném proudu. Jak je zřejmé,



Obr. 3-17 Reálný zdroj a jeho ekvivalentní náhrada

napětí s rostoucí hodnotou proudu klesá. Je otázka, jak takovýto zdroj nahradit pomocí zavedených prvků.

a) Náhrada pomocí ideálního zdroje napětí a rezistoru. Tuto úlohu lze opět řešit na základě principu ekvivalence. Předpokládejme, že bude vyhovovat náhradní schéma podle obr. 3-17c. Pak se musí oba zdroje na svorkách A-B chovat shodně jak při nekonečné hodnotě zatěžovacího odporu ($i = 0$, stav "naprázdno"), tak i při nulové hodnotě zatěžovacího odporu ($u = 0$, stav "nkrátko"). Shodně se ale musí chovat i mimo tyto dva mezní případy, při libovolné hodnotě zatěžovacího odporu. Oba mezní případy jsou ukázány na obr. 3-18. Na jejich základě lze vypočítat parametry náhradního zdroje - napětí naprázdno U_0 a vnitřní odpor



Obr. 3-18 Ekvivalence pro stav naprázdno a nkrátko

zdroje R_i :

1. hodnotu U_0 vypočteme (či změříme) jako výstupní napětí naprázdno,
2. hodnotu I_k vypočteme (či změříme) jako výstupní proud nkrátko,
3. hodnotu R_i vypočteme jako $R_i = U_0 / I_k$.

Poznámka : V některých případech je nevhodné nebo nelze měřit proud nkrátko I_k (např. u akumulátoru). V tom případě vyjdeme z ekvivalence při stavu naprázdno a ze stavu při konečné hodnotě R_z . Pak lze vnitřní odpor zdroje určit ze směrnice závislosti napětí na proudu podle vztahu

$$R_i = \frac{u}{i} = \frac{U_0 - u_1}{i_1} \quad (3-26)$$

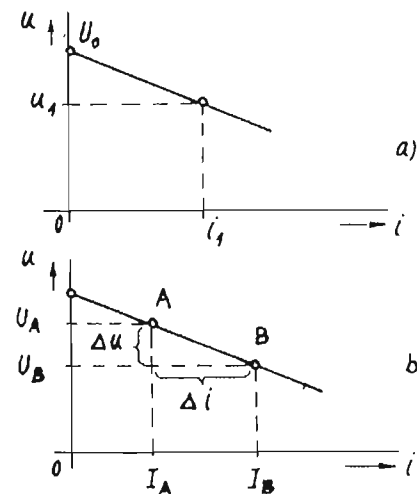
V případě, že známe naměřené hodnoty proudu a napětí pro dvě různé zátěže R_{zA} a R_{zB} , lze vnitřní odpor R_i vyjádřit

$$R_i = -\frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{U_A - U_B}{I_B - I_A} \quad (3-27)$$

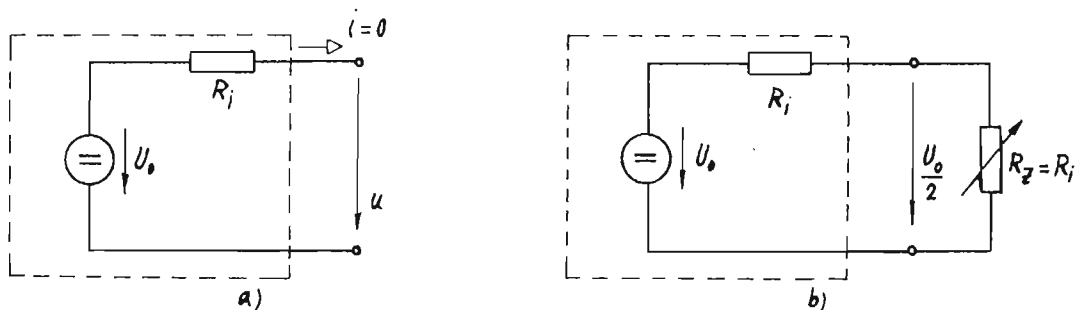
V tomto případě pak musíme též vypočítat hodnotu U_0 . Jak je zřejmé z obr. 3-19b, platí

$$U_0 = U_A + R_i \cdot I_A \quad (3-28)$$

Hodnotu R_i lze v praxi změřit pomocí známého proměnného rezistoru a voltmetru. Jak je zřejmé z obr. 3-20a, změříme nejprve U_0 naprázdno, pak snižujeme hodnotu zatěžovacího rezistoru tak, až klesne napětí na výstupu na poloviční hodnotu. V tom případě jde o dělič napětí, kde $R_z = R_i$.

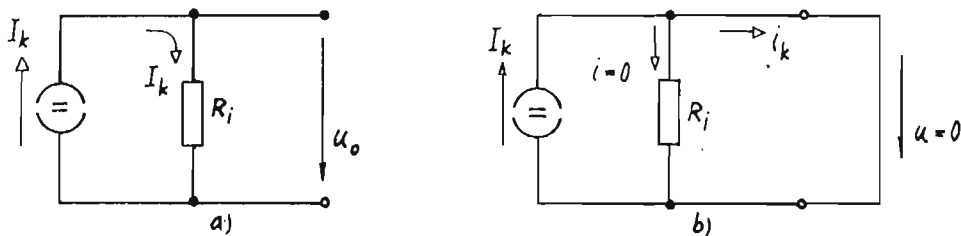


Obr. 3-19



Obr. 3-20 Měření vnitřního odporu zdroje

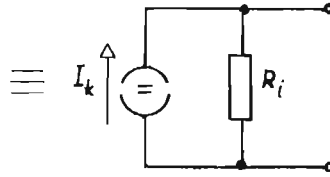
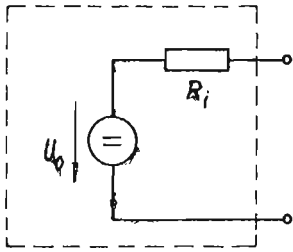
b) Náhrada reálného zdroje pomocí ideálního zdroje proudu a rezistoru. Pro takovouto náhradu reálného zdroje použijeme náhradní schéma podle obr. 3-21a. Obr. 3-21a představuje náhradní zdroj naprázdno. Jeho výstupní napětí naprázdno je dáno vzta-



Obr. 3-21 Náhradní schéma reálného zdroje s ideálním zdrojem proudu

hem $U_0 = R_i \cdot I_k$. Proud nakrátko je podle obr. 3-21b roven hodnotě proudu zdroje I_k . Po srovnání s náhradou reálného zdroje pomocí ideálního zdroje napětí pak plyne ekvivalence obou náhrad a jejich vzájemný přepočít, jak je to ukázáno na obr. 3-22.

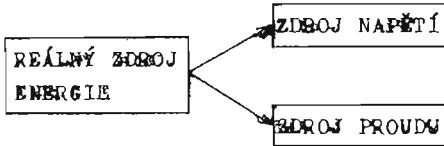
V praxi je reálný zdroj elektrické energie vždy označován jako zdroj napětí nebo zdroj proudu. Rozdělení lze schématicky vyjádřit následovně :



(3-29)

(3-30)

Obr. 3-22 Vzájemný vztah náhradních obvodů se zdrojem napětí a proudu



$$R_z \gg R_i, \quad u \rightarrow U_0 \\ i \ll I_k$$

$$R_z \ll R_i, \quad i \rightarrow I_k \\ u \ll U_0$$

Zdroje napětí jsou běžně využívány, např. akumulátory, suché články atd. Zdroje proudu nejsou příliš běžné, setkáme se s nimi později např. při rozboru vlastností tranzistorů.

Příklady k procvičení

3-13 Nalezněte náhradní schéma reálného zdroje, naměříme-li při $R_{z1} = 20 \Omega$ napětí 4,25 V a při $R_{z2} = 10 \Omega$ napětí 4 V. Použijte oba dva typy náhradního schématu a zvažte, zda jde spíše o zdroj napětí, nebo o zdroj proudu.

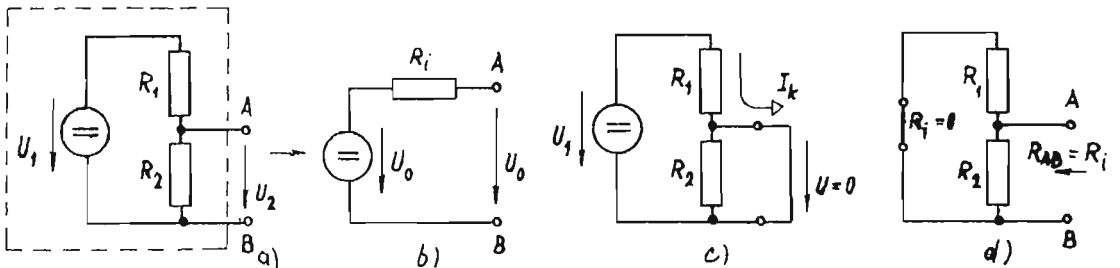
3-14 Vytvořte reálný zdroj proudu o hodnotě $I_k = 1 \text{ A}$ a vnitřním odporu $10 \text{ k}\Omega$ pomocí ideálního zdroje napětí a rezistoru. Posuďte realizovatelnost takového zdroje.

Výsledky : 3-13 $U_0 = 4,5 \text{ V}$, $R_i = 1,18 \Omega$, $I_k = 3,825 \text{ A}$.

3-14 $U_0 = 10000 \text{ V}$, $R_i = 10 \text{ k}\Omega$.

Náhrada složitého obvodu se zdroji energie

Tak, jak jsme nahradili reálný zdroj elektrické energie pomocí ideálního zdroje napětí či ideálního zdroje proudu a vnitřního odporu, lze nahradit i libovolně



Obr. 3-23

složitý obvod s rezistory a zdroji napětí a proudu. Princip si ukažme na jednoduchém případě - na děliči napětí podle obr. 3-23. Pro napětí naprázdno platí

$$U_0 = U_{R_2} = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{Proud nakrátko } I_k = \frac{U_1}{R_1}$$

Vnitřní odpor R_i pak je

$$R_i = \frac{U_0}{I_k} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3-31)$$

Vnitřní odpor náhradního zdroje pro takovýto obvod lze vypočítat i přímo, bez výpočtu U_0 a I_k . Počítáme jej jako odpor složeného odporového dvojpólu R_{A-B} s tím, že napěťové zdroje zkratlujeme (jejich vnitřní odpor je nula) a proudové rozpojíme (jejich vnitřní odpor je ∞). Pro uvedený dělič napětí je tato úprava na obr. 3-23d. Je zřejmé, že jde o paralelní spojení R_1 a R_2 , takže výsledek odpovídá vztahu (3-31).

Uvedená náhrada obvodu pomocí ideálního zdroje napětí a vnitřního odporu je uváděna pod názvem Théveninův teorém. Obdobně jako u reálných zdrojů energie lze i zde použít náhradní schéma s ideálním zdrojem proudu a vnitřním odporem, což se uvádí pod názvem Nortonův teorém.

Příklady k procvičení

3-15 Navrhněte dělič napětí 12 V ze zdroje napětí 60 V tak, aby vnitřní odpor takového zdroje byl 10Ω .

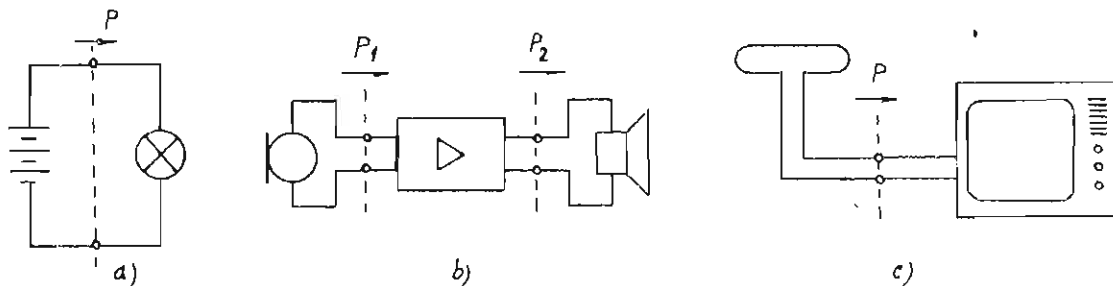
3-16 Navrhněte dělič napětí 12 V ze zdroje o napětí 30 V tak, aby při zatížení rezistorem s hodnotou 1000Ω pokleslo napětí na 11,8 V. Postup: Nejprve z vlivu zátěže vypočtete požadavek na vnitřní odpor zdroje a pak z výsledku navrhnete hodnoty odporů děliče napětí.

Výsledky: 3-15 $R_2 = 12,5 \Omega$, $R_1 = 50 \Omega$.

3-16 $R_1 = 16,9 \Omega$, $R_1 = 42,5 \Omega$, $R_2 = 28,3 \Omega$.

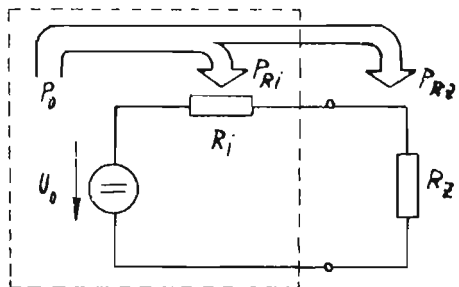
Přenos výkonu z reálného zdroje do spotřebiče

Mnoho obvodů lze chápat jako reálný zdroj elektrické energie, zatížený spotřebičem. Jednoduchým příkladem je žárovka připojená k suchému článku, obr. 3-24a. Složitější obvod je zesilovač s mikrofonom a reproduktorem, obr. 3-24b, kde zesilovač lze chápat jako zátěž pro zdroj - mikrofón, ale současně lze chápat zesilovač jako zdroj pro zátěž - reproduktor. Dalším takovým častým případem je televizní anténa, která je jako zdroj zatížena televizorem jako spotřebičem signálu z antény (obr. 3-24c). Vzhledem k tomu, že u těchto zdrojů dochází k úbytku energie na jejich vnitřním odporu, je otázkou, jak velký volit R_z vzhledem k R_i , a to jak z hlediska maximálního výkonu, dosažitelného na R_z , tak i z hlediska maximální účinn-



Obr. 3-24 Příklady spojení reálných zdrojů a spotřebičů

nosti přenosu energie z ideálního zdroje do zátěže. Výkon ze zdroje se dělí na výkon na spotřebiči a na výkon na vnitřním odporu zdroje, jak je to na obr. 3-25.



Obr. 3-25

Uvažme dvě mezní podmínky :

1. $R_z \gg R_i$ ($R_z \rightarrow \infty$) pak $i \rightarrow 0$ a $P \rightarrow 0$,
2. $R_z \ll R_i$ ($R_z \rightarrow 0$) pak $u \rightarrow 0$ a $P \rightarrow 0$.

Na základě této úvahy lze odhadnout, že k maximálnímu výkonu na R_z dojde za podmínky $R_z \rightarrow R_i$. Dokažme to. Vyjádřeme výstupní napětí

$$u_{R_z} = U_0 \frac{R_z}{R_i + R_z}$$

a výstupní výkon

$$P_{R_z} = \frac{u_{R_z}^2}{R_z} = U_0^2 \frac{R_z}{(R_z + R_i)^2} .$$

Maximum této funkce $P_{R_z}(R_z)$ zjistíme za podmínky $dP/dR_z = 0$. Po výpočtu a úpravě dostaneme výslednou podmínku přenosu maximálního výkonu reálného zdroje do spotřebiče

$$\boxed{R_z = R_i} \quad (3-32)$$

Dále lze odvodit, že pro maximální přenos výkonu do zátěže R_z platí, že $u = U_0/2$, $i = I_k/2$ a hodnota maximálního výkonu P_{max} je dána vlastnostmi zdroje, protože platí

$$P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_i} \quad (3-33)$$

Pro zhodnocení účinnosti vyjádřeme hodnotu příkonu P_0

$$P_0 = U_0 i ,$$

takže účinnost γ je dána vztahem

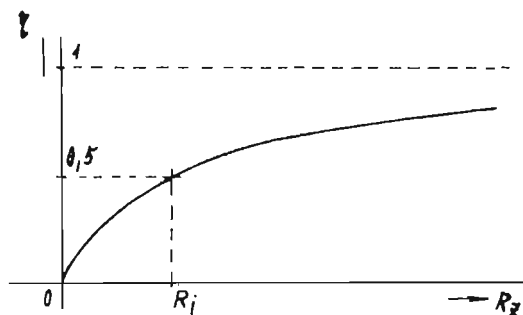
$$\gamma = \frac{P_{R_z}}{P_0} = \frac{R_z}{R_z + R_i} \quad (3-34)$$

a tomu odpovídající závislost je na obr.

3-26. Maximální účinnost pak dosáhneme za podmínky $R_z \gg R_i$, což je značně odlišné od podmínky maximálního přenosu výkonu. Maxi-

mální účinnost se snažíme dodržet při přeno-

su velkých energií, a to obvykle snižováním hodnoty R_i . Maximální přenos výkonu se snažíme dosáhnout při přenosu malých signálů (např. z televizní antény), kde je potřebné dosáhnout co největšího vstupního signálu do televizního přijímače. Zde obvykle přizpůsobujeme hodnotu R_z vnitřnímu odporu zdroje R_i .



Obr. 3-26

Otázky k samostatnému studiu

- 3-10 Jaký je postup řešení sérioparalelních obvodů ? Které prvky a jak lze ve složitém obvodu spojovat ?
- 3-11 Jakým způsobem je určeno výstupní napětí na děliči napětí a jak toto napětí závisí na připojené zátěži ?
- 3-12 Jak navrhovat dělič napětí ? Co je při návrhu ovlivňováno zatěžovacím odporem ?
- 3-13 Jak lze realizovat proměnný dělič napětí ?
- 3-14 Jak lze snížit proud protékající rezistorem pomocí děliče proudu ?

- 3-15 Jak se chová reálný zdroj energie při změně zátěže ? Jaké mezní stavy zde mohou nastat ? Jak lze takovýto zdroj nahradit ideálním zdrojem napětí či proudu a rezistorem ? Jaké vztahy zde platí ? Kdy označíme reálný zdroj jako zdroj napětí a kdy jako zdroj proudu ?
- 3-16 Jak lze nahradit pomocí ideálního zdroje napětí či proudu a rezistoru složitý obvod se zdroji napětí a proudu ?
- 3-17 Jak se dělí výkon při odběru energie z reálného zdroje ? Za jakých podmínek je výkon dodávaný do zátěže maximální ? Za jakých podmínek je účinnost přenosu výkonu maximální ? Kdy sledujeme maximální účinnost a kdy maximální výkon a proč ?
- 3-18 Vyjmenujte některé příklady spojení obvodů jako spojení reálného zdroje a spotřebiče.

3.3 OBECNÉ METODY ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ODPOROVÝCH OBVODŮ

Cílem analýzy obvodů je zjišťování hodnot veličin (napětí a proudů) v obvodech a zjišťování vlastností obvodů.

a) Zjišťování hodnot napětí a proudů v obvodu - tyto hodnoty závisí na hodnotách napětí či proudů budicích zdrojů. Příklad : Výstupní napětí děliče napětí závisí na vstupním (budicím) napětí : $u_2 = u_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

b) Zjišťování vlastností obvodu - např. poměr výstupního a vstupního napětí (přenos napětí) nezávisí na hodnotách budicích zdrojů, vyjadřuje jen vlastnost obvodu. Příklad : Přenos napětí odporového děliče je dán vztahem

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{a tedy závisí jen na hodnotách rezistorů obvodu.}$$

Oba přístupy jsou ekvivalentní, protože z výsledku jednoho lze vyjádřit druhý. Např. z výsledného a vstupního napětí lze vyjádřit přenos napětí a naopak z přenosu napětí lze při znalosti vstupního napětí vyjádřit výstupní napětí.

Postupy řešení mohou být :

- bez pevného algoritmu, s přímým využitím 1. a 2. KZ, Ohmova zákona a principů ekvivalence a superpozice. Tak byly řešeny příklady v kapitole 3.2. Tento postup je vhodný pro jednoduché obvody;
- s pevným algoritmem - jde o obecné metody se stanoveným postupem. Jsou vhodné pro řešení složitých obvodů, s výhodou lze využít počítače.

Řešení lze provádět :

- numericky, kdy počítáme s hodnotami v číselném tvaru;
- obecně - počítáme (upravujeme) vztahy s označením hodnot (např. R_1 , u_1 apod.). Tento postup je výhodnější a lze jej využít numericky (dosazením konkrétních hodnot). Je patrné, jak se na výsledku podílí daný prvek a netvoří se chyby mezivýsledků.

Topologický rozbor obvodu pro obecné metody řešení

Výsledkem obecných metod řešení jsou obvykle všechna napětí či proudy obvodu. Topologický rozbor nám ukáže, kolik neznámých veličin lze řešit a kolik rovnic je nutno sestavit. Postup topologického rozboru si ukažeme na příkladu z obr. 3-27 :

1. Ze schématu překreslíme graf obvodu. Uzel grafu odpovídá ve schématu uzlu v širším smyslu, t.j. všemu, co je spojeno vodičem. Větve grafu odpovídají prvkům obvodu, které jsou mezi uzly.
2. Očíslujeme uzly (v libovolném pořadí) a určíme počet uzlů n_u a počet větví n_v .

V našem příkladu je $n_u=4$, $n_v=5$.

3. Určíme počet m nezávislých rovnic, které lze sestavit podle 1. KZ pro m nezávislých uzlů

$$m = n_u - 1 \quad (3-35)$$

V našem případě $m=3$.

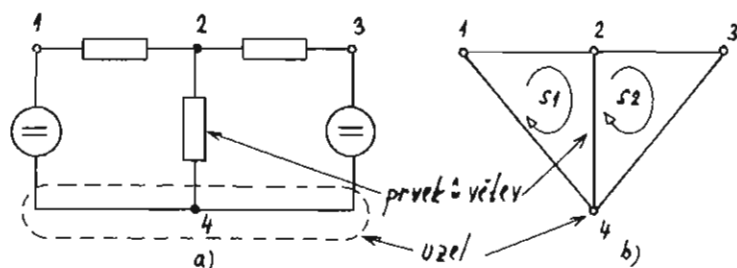
4. Určíme počet n nezávislých rovnic, které lze sestavit podle 2. KZ pro n nezávislých smyček :

$$n = n_v - m$$

$$(3-36)$$

V našem případě $n=2$. Tyto smyčky si zvolíme. Musí platit, že každá smyčka má alespoň jednu větev, která není součástí jiné smyčky. Je to zřejmé z obr. 3-27b.

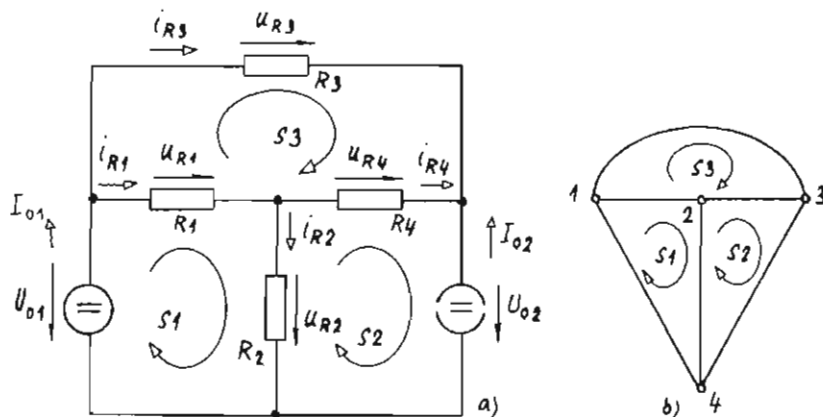
Rovnice 1. a 2. KZ pro závislý uzel a závislé smyčky nejsou pro řešení potřebné, protože vyplývají z rovnic pro nezávislé uzly a smyčky.



Obr. 3-27

Metoda Kirchhoffových a prvkových rovnic

Je to základní a nejobecnější metoda. Jejím výsledkem jsou napětí a proudy všech prvků obvodu. Vychází z využití 1. a 2. KZ a z Ohmova zákona pro popis vztahů mezi napětími a proudy rezistorů (prvkové rovnice). Postup řešení si ukažme na příkladu z obr. 3-28.



- a) Topologický rozbor vychází z grafu obvodu na obr. 3-28b. Počet uzlů $n_u=4$, počet větví $n_v=6$. Uzly označíme 1 až 4. Stanovíme počet nezávislých uzlů a smyček
- $$m = n_u - 1 = 3$$
- $$n = n_v - m = 3.$$
- Zvolíme nezávislé uzly 1 až 3 a nezávislé smyčky s_1

Obr. 3-28

až s_3 .

- b) Označíme pro každý prvek napětí a proud včetně proudu napěťového zdroje a napětí proudového zdroje. Dostaneme tak 10 neznámých veličin $u_{R1}, u_{R2}, u_{R3}, u_{R4}, u_{O2}, i_{R1}, i_{R2}, i_{R3}, i_{R4}, i_{O1}$. Pro ně musíme sestavit 10 rovnic (4 prvkové pro 4 rezistory, 3 pro 1. KZ a 3 pro 2. KZ).

- c) Sestavení 4 prvkových rovnic pro rezistory R_1 až R_4 :

$$u_{R1} = R_1 i_{R1}$$

$$u_{R3} = R_3 i_{R3}$$

$$u_{R2} = R_2 i_{R2}$$

$$u_{R4} = R_4 i_{R4}$$

d) Sestavení rovnic pro 3 nezávislé uzly a 3 nezávislé smyčky podle 1. a 2. KZ.
 Budicí veličiny U_{01} a I_{02} převedeme na pravé strany rovnic.

1. uzel :	$i_{01} - i_{R3} - i_{R1} = 0$	1. smyčka :	$u_{R1} + u_{R2} = U_{01}$
2. uzel :	$i_{R1} - i_{R2} - i_{R4} = 0$	2. smyčka :	$u_{R3} - u_{R4} - u_{R1} = 0$
3. uzel :	$i_{R3} + i_{R4} = -I_{02}$	3. smyčka :	$u_{02} - u_{R2} + u_{R4} = 0$

e) Řešení soustavy rovnic. Získali jsme soustavu 10 rovnic pro 10 neznámých veličin. Je výhodné tuto soustavu zredukovat dosazením prvkových rovnic do Kirchhoffových rovnic. Tak budeme řešit soustavu 6 rovnic o 6 neznámých a zbylé 4 neznámé veličiny vypočítáme z prvkových rovnic. V případě, že obvod obsahuje jen zdroje napětí, je výhodné dosadit prvkové rovnice ve tvaru $u_k = R_k i_k$ za neznámá prvková napětí a tak získat soustavu pro řešení neznámých prvkových proudů. V případě, že obvod obsahuje jen budicí zdroje proudů, je výhodné dosadit prvkové rovnice ve tvaru $i_k = G_k u_k$ za všechny prvkové proudy a získat tak soustavu pro všechna neznámá napětí.

V případě, že jsou v obvodu oba typy zdrojů, je vcelku jedno, jakým způsobem dosadíme. V našem případě můžeme dosadit např. za u_{R1} , u_{R2} , i_{R3} a i_{R4} :

$i_{01} - u_{R3}G_3 - i_{R1} = 0$	$i_{R1}R_1 + i_{R2}R_2 = U_{01}$
$i_{R1} - i_{R2} - u_{R4}G_4 = 0$	$u_{R3} - u_{R4} - i_{R1}R_1 = 0$
$u_{R3}G_3 + u_{R4}G_4 = -I_{02}$	$u_{02} - i_{R2}R_2 + u_{R4} = 0$

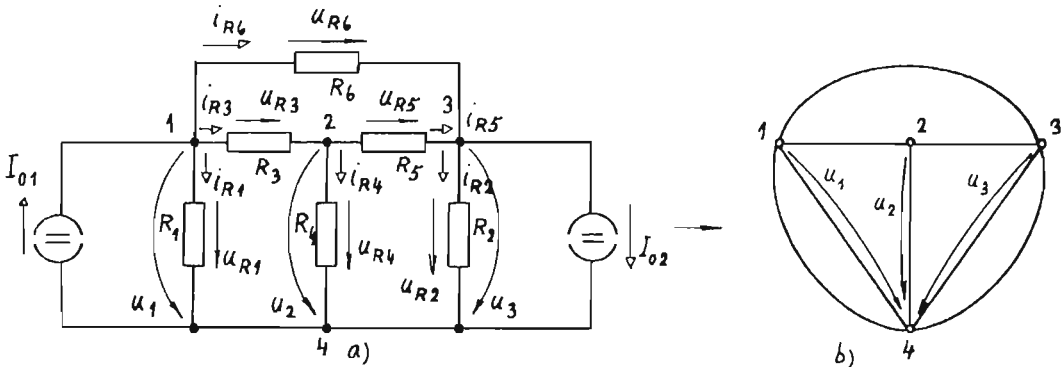
Tuto zredukovanou soustavu 6 rovnic pro 6 neznámých pak řešíme některou ze známých metod, např. s využitím maticového počtu. Zbylé neznámé u_{R1} , u_{R2} , i_{R3} , i_{R4} pak vypočteme z prvkových rovnic dosazením vypočítaných hodnot napětí a proudů.

Metoda uzlových napětí (MUN)

Tato metoda je zjednodušením metody Kirchhoffových a prvkových rovnic :

- používá soustavy m rovnic pro m nezávislých uzlů podle 1. KZ
- řeší m nezávislých uzlových napětí (nejsou totožná s prvkovými napětími)
- je výhodná pro obvody s budicími zdroji proudů, je též možno použít zdroje napětí, které lze přepočítat na reálné zdroje proudů; metody lze využít k řešení vlastností obvodu, kde na charakteru budicího zdroje nezáleží
- řešení výsledné soustavy rovnic lze přehledně uspořádat do maticového tvaru
- maticový tvar soustavy rovnic je možno sestavit přímo bez sestavování základních Kirchhoffových rovnic, čímž se řešení zjednoduší.

Postup řešení si ukažme na příkladu podle obr. 3-29.



Obr. 3-29

a) Topologický rozbor vychází z grafu na obr. 3-29b. Pro MUN stačí zjistit počet nezávislých uzlů. Počet všech uzlů $n_u=4$, počet nezávislých uzlů je

$$m = n_u - 1 = 3.$$

Pro řešení potřebujeme 3 rovnice pro 3 neznámá uzlová napětí. Zvolíme si je tak, aby byly orientovány vůči závislému uzlu 4. Všechna prvková napětí pak lze vyjádřit pomocí těchto nezávislých uzlových napětí (podle 2. KZ), např.

$$u_{R1} = u_1, \quad u_{R3} = u_1 - u_2 \text{ atd.}$$

b) Sestavíme prvkové rovnice a prvková napětí vyjádříme pomocí uzlových napětí :

$$\begin{aligned} i_{R1} &= G_1 u_{R1} = G_1 u_1 & j_{R4} &= G_4 u_{R4} = G_4 u_2 \\ i_{R2} &= G_2 u_{R2} = G_2 u_3 & i_{R5} &= G_5 u_{R5} = G_5 (u_2 - u_3) \\ i_{R3} &= G_3 u_{R3} = G_3 (u_1 - u_2) & i_{R6} &= G_6 u_{R6} = G_6 (u_1 - u_3) \end{aligned}$$

c) Sestavíme m rovnic pro m nezávislých uzlů podle 1. KZ. Proudů ve směru z uzlu bereme jako kladné. Budicí proudy převedeme na pravou stranu.

$$\begin{aligned} 1. \text{ uzel : } & i_{R1} + i_{R3} + i_{R6} = I_{O1} \\ 2. \text{ uzel : } & i_{R3} + i_{R4} + i_{R5} = 0 \\ 3. \text{ uzel : } & -i_{R5} + i_{R2} - i_{R6} = -I_{O2} \end{aligned}$$

d) Dosadíme prvkové rovnice do Kirchhoffových rovnic :

$$\begin{aligned} G_1 u_1 &+ G_3 (u_1 - u_2) + G_6 (u_1 - u_3) = I_{O1} \\ - G_3 (u_1 - u_2) &+ G_4 u_2 + G_5 (u_2 - u_3) = 0 \\ - G_5 (u_2 - u_3) &+ G_2 u_3 - G_6 (u_1 - u_3) = -I_{O2} \end{aligned}$$

Tuto soustavu upravíme tak, že vytkneme uzlová napětí :

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3 + G_6) u_1 &+ (-G_3) u_2 + (-G_6) u_3 = I_{O1} \\ (-G_3) u_1 &+ (G_3 + G_4 + G_5) u_2 + (-G_5) u_3 = 0 \\ (-G_6) u_1 &+ (-G_5) u_2 + (G_2 + G_5 + G_6) u_3 = -I_{O2} \end{aligned}$$

čímž dosáhneme tvaru vhodného pro maticový zápis.

e) Vytvoříme soustavu rovnic v maticovém tvaru :

$$\begin{array}{|c|} \hline I_{O1} \\ \hline 0 \\ \hline -I_{O2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 + G_3 + G_6 & -G_3 & -G_6 \\ \hline -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ \hline -G_6 & -G_5 & G_2 + G_5 + G_6 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \\ \hline \end{array}$$

což odpovídá maticovému zápisu s vodivostní maticí G a maticí budicích proudů I :

$$\underline{I} = \underline{G} \cdot \underline{U} \quad (3-37)$$

f) Řešení soustavy rovnic : Řešíme neznámá uzlová napětí u_1, u_2 a u_3 některou ze známých metod. Pro řešení v obecném tvaru je výhodné např. použití Cramerova pravidla.

Pro výpočet prvkových napětí lze využít vztahů mezi uzlovými a prvkovými napětími podle 2.KZ.

Přímé sestavení matic : Při řešení lze vynechat body b), c) a d) a přímo sestavit maticovou rovnici podle těchto pravidel :

- prvky G_{kk} hlavní diagonály matice jsou dány součtem všech vodivostí, připojených do uzlu k a jsou vždy kladné
- prvky G_{kl} mimo hlavní diagonálu jsou dány vodivostmi, připojenými mezi uzly k a l a

jsou při orientaci uzlových napětí vůči závislému uzlu vždy záporné, $G_{kl} = G_{lk}$, matice je symetrická kolem hlavní diagonály

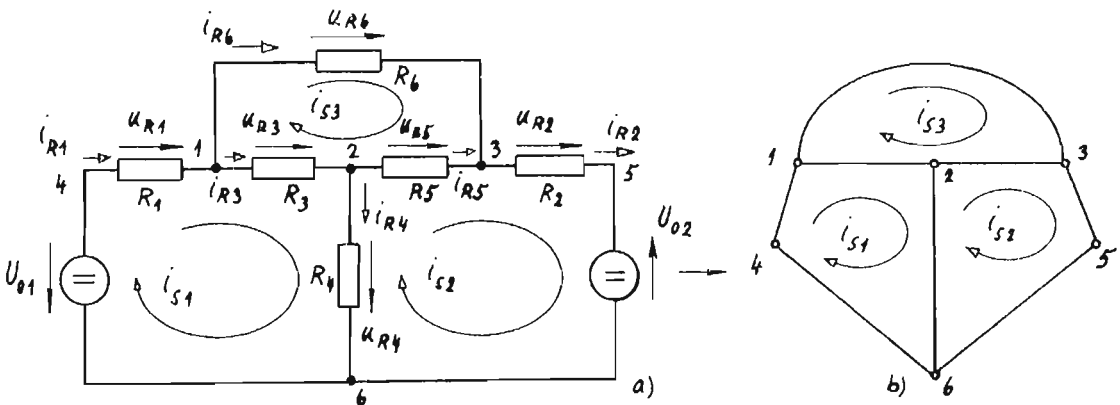
- prvky i_k matice budících proudů jsou dány součtem všech zdrojů proudů, kladný je zde směr do uzlu.

Metoda smyčkových proudů (MSP)

Tato metoda je obdobně jako MUN zjednodušením metody Kirchhoffových a prvkových rovnic:

- používá soustavu n rovnic pro n nezávislých smyček podle 2. KZ
- řeší n nezávislých smyčkových proudů (nejsou totožné s prvkovými proudy)
- je výhodná pro obvody se zdroji napětí, je též možné ji využít pro obvody, kde lze zdroje proudů přepočítat na reálné zdroje napětí; je použitelná pro výpočet vlastností obvodů, kde na oharakteru zdroje nezáleží
- řešení výsledné soustavy rovnic lze výhodně uspořádat do maticového tvaru obdobně jako u MUN
- maticový tvar soustavy rovnic lze sestavit přímo ze schématu bez sestavování základních Kirchhoffových a prvkových rovnic.

Postup řešení si ukažeme na příkladu z obr. 3-29. Vzhledem k tomu, že jde o obvod se zdroji proudů, je potřebné je přepočítat na zdroje napětí s vnitřními odpory R_1 a R_2 , jak je to zřejmé z obr. 3-30.



Obr. 3-30

- a) Topologický rozbor provedeme podle grafu na obr. 3-30b. Obvod obsahuje $n_u = 6$ uzlů a $n_v = 8$ větví. Na základě toho lze vypočítat počet nezávislých uzlů a smyček:

$$m = n_u - 1 = 5$$

$$n = n_v - m = 3.$$

Tři nezávislé smyčky si můžeme zvolit libovolně, ale tak, aby každá měla alespoň jednu větev, která není součástí jiné smyčky (viz obr. 3-30b). Těmto smyčkám odpovídají smyčkové proudy i_{s1} , i_{s2} a i_{s3} . Jejich vztah k prvkovým proudům je zřejmý z 1. KZ pro uzly obvodu, např. $i_{R1} = i_{s1}$, $i_{R4} = i_{s1} - i_{s2}$ atd.

- b) Sestavíme prvkové rovnice pro rezistory a dosadíme smyčkové proudy za prvkové proudy:

$$u_{R1} = R_1 i_{R1} = R_1 i_{s1}$$

$$u_{R2} = R_2 i_{R2} = R_2 i_{s2}$$

$$u_{R3} = R_3 i_{R3} = R_3 (i_{s1} - i_{s3})$$

$$u_{R4} = R_4 i_{R4} = R_4 (i_{s1} - i_{s2})$$

$$u_{R5} = R_5 i_{R5} = R_5 (i_{s2} - i_{s3})$$

$$u_{R6} = R_6 i_{R6} = R_6 i_{s3}$$

c) Sestavíme n rovnic pro nezávislé smyčky podle 2. KZ. Napětí ve směru smyčky bereme jako kladná. Dále převedeme budící napětí na pravou stranu rovnic :

$$1. \text{ smyčka : } u_{R1} + u_{R3} + u_{R4} = U_{O1}$$

$$2. \text{ smyčka : } u_{R4} + u_{R5} + u_{R2} = U_{O2}$$

$$3. \text{ smyčka : } -u_{R3} + u_{R6} - u_{R5} = 0$$

d) Dosaďíme prvkové rovnice do Kirchhoffových rovnic :

$$R_1 i_{s1} + R_3(i_{s1} - i_{s3}) + R_4(i_{s1} - i_{s2}) = U_{O1}$$

$$R_4(i_{s1} - i_{s2}) + R_5(i_{s2} - i_{s3}) + R_2 i_{s2} = U_{O2}$$

$$-R_3(i_{s1} - i_{s3}) + R_6 i_{s3} - R_5(i_{s2} - i_{s3}) = 0$$

a vytkneme smyčkové proudy. Pak dosáhneme tvaru vhodného pro maticový zápis :

$$(R_1 + R_3 + R_4) i_{s1} + (-R_4) i_{s2} + (-R_3) i_{s3} = U_{O1}$$

$$(-R_4) i_{s1} + (R_2 + R_4 + R_5) i_{s2} + (-R_5) i_{s3} = U_{O2}$$

$$(-R_3) i_{s1} + (-R_5) i_{s2} + (R_3 + R_5 + R_6) i_{s3} = 0$$

e) Vytvoříme soustavu rovnic v maticovém tvaru :

$$\begin{array}{|c|} \hline U_{O1} \\ \hline U_{O2} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|ccc|} \hline R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -R_3 \\ \hline -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ \hline -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline i_{s1} \\ \hline i_{s2} \\ \hline i_{s3} \\ \hline \end{array}$$

což odpovídá maticovému zápisu s odporovou maticí R a maticí budících napětí U

$$\underline{U} = \underline{R} \cdot \underline{I} \quad (3-38)$$

f) Řešení soustavy rovnic : Řešíme neznámé smyčkové proudy i_{s1} , i_{s2} a i_{s3} některou ze známých metod, např. Cramerovým pravidlem. Pro výpočet prvkových proudů pak využijeme vztahů mezi prvkovými a smyčkovými proudy podle 2. KZ. Z prvkových proudů lze pak vypočítat i prvková napětí.

Přímé sestavení matic : Při řešení lze vynechat body b), c) a d) a přímo sestavovat matice podle pravidel :

- prvky hlavní diagonály R_{kk} jsou dány součtem všech rezistorů, zapojených ve smyčce k a jsou vždy kladné
- prvky mimo hlavní diagonálu R_{kl} jsou dány rezistory, které jsou společné pro dvě smyčky k a l a jsou při souhlasné orientaci smyčkových proudů rezistorem kladné, při opačné orientaci záporné. U MSP je na rozdíl od MUN obtížnější volit smyčky tak, aby byly všechny prvky mimo hlavní diagonálu záporné či kladné. Stejně jako u MUN musí být odporová matice symetrická kolem hlavní diagonály
- prvky u_k matice budících napětí jsou dány součtem všech zdrojů napětí ve smyčce k , kladné jsou pak zdroje se směrem napětí proti směru smyčkového proudu.

Porovnání jednotlivých metod analýzy

- Metoda Kirchhoffových a prvkových rovnic je nejobecnější. Řeší všechna neznámá napětí a proudy, proto ale vede na složitou soustavu rovnic.
- MUN a MSP jsou jednodušší, protože řeší jen nezávislá napětí nebo proudy. Dále jsou tyto metody výhodné vzhledem k možnosti přímého sestavení maticové rovnice

ze schématu podle jednoduchých pravidel.

- Při rozhodování, zda použít MUN nebo MSP, se řídíme počtem nezávislých smyček a nezávislých uzlů. Dále záleží na tom, jaké jsou budicí zdroje a zda počítáme napětí či proudy.

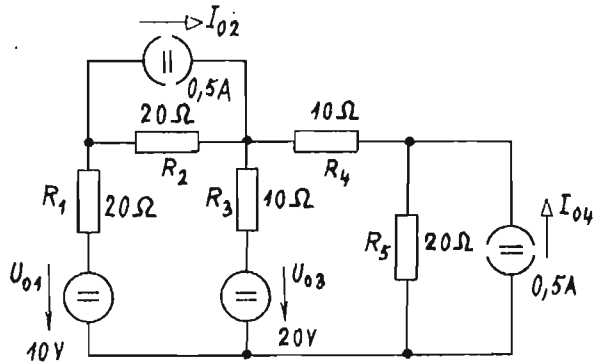
Otázky k samostatnému studiu

- 3-19 Co je cílem analýzy obvodů ? Jaké metody jsou vhodné pro jednoduché obvody a jaké pro složité obvody ?
- 3-20 K čemu slouží topologický rozbor obvodu ? Co je jeho výsledkem ? Jak určíme počet nezávislých rovnic pro 1. a 2. KZ v obvodu ?
- 3-21 Jaké rovnice a jak sestavujeme pro metodu Kirchhoffových a prvkových rovnic ? Co je výsledkem této metody ?
- 3-22 V čem je výhoda metod smyčkových proudů a uzlových napětí proti metodě Kirchhoffových a prvkových rovnic ?
- 3-23 Které obvody je vhodné řešit pomocí MUN a které pomocí MSP a proč ?
- 3-24 Jaké jsou podmínky pro použití MUN a jaký je postup řešení ? Jak lze sestavit matice pro MUN přímo ze schématu ?
- 3-25 Jaké jsou podmínky pro použití MSP a jaký je postup řešení ? Jak lze sestavit matice pro MSP přímo ze schématu ?
- 3-26 Co je výsledkem řešení u MUN, co u MSP a jak lze vypočítat další veličiny v obvodu ?

Příklad k procvičení

- 3-17 Vypočítejte výkon na rezistoru R_4 pomocí MUN a MSP. Výsledky porovnejte. Stanovte, která z metod byla pro řešení výhodnější.

Výsledek : $P_{R_4} = 1,357 \text{ W}$,
rychleji vede k cíli MSP.

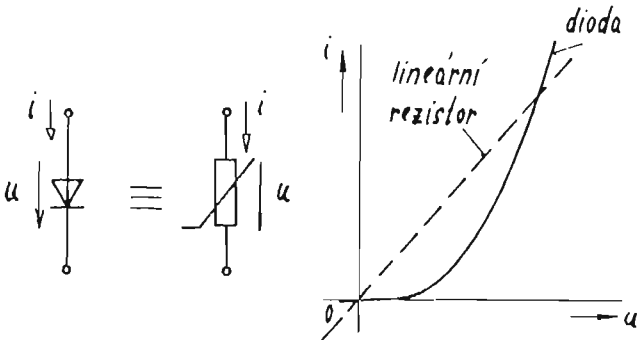


3.4 ŘEŠENÍ OBVODŮ S NELINEÁRNÍMI REZISTORY

Zopakujme si poznatky o nelineárním rezistoru. Důležitá je nelineární závislost mezi napětím a proudem

$$i = f(u),$$

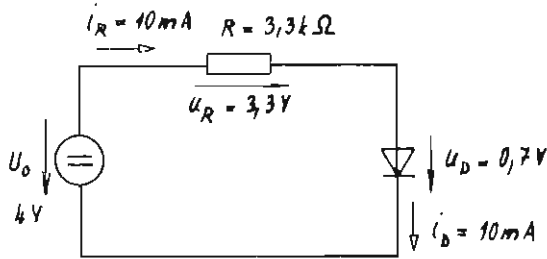
kde $f(u)$ je nelineární funkce, např. $i = u^2$ nebo $i = I_0 e^{au}$ apod. Tyto matematické vztahy se ve skutečnosti jen blíží k skutečné závislosti mezi proudem a napětím s určitou přesností. Na rozdíl od lineárního rezistoru závisí vlastnosti prvku i na směru proudu prvkem a parametr nelineárního rezistoru, t.j. dyna-



Obr. 3-31 Dioda jako příklad nelineárního rezistoru a její A-V charakteristika; vlevo je schématická značka diody

mický či statický odpor je funkcí napětí a proudu.

Nelineární obvod je elektrický obvod, obsahující alespoň jeden nelineární prvek. Platí pro něj tyto zákony (viz obr. 3-32) :



Obr. 3-32 Příklad nelineárního obvodu

1. KZ : $i_D = i_R$,

2. KZ : $U_D = u_R + u_D$

a Ohmův zákon pro lineární rezistor $u_R = R i_R$.

Dále platí princip ekvivalence. Dvojčlenný vzniklý spojením R a D lze nahradit nelineárním rezis-

torem, který má shodné závislosti napětí a proudu na svorkách, tedy shodnou A-V charakteristiku. Neplatí ale princip superpozice!

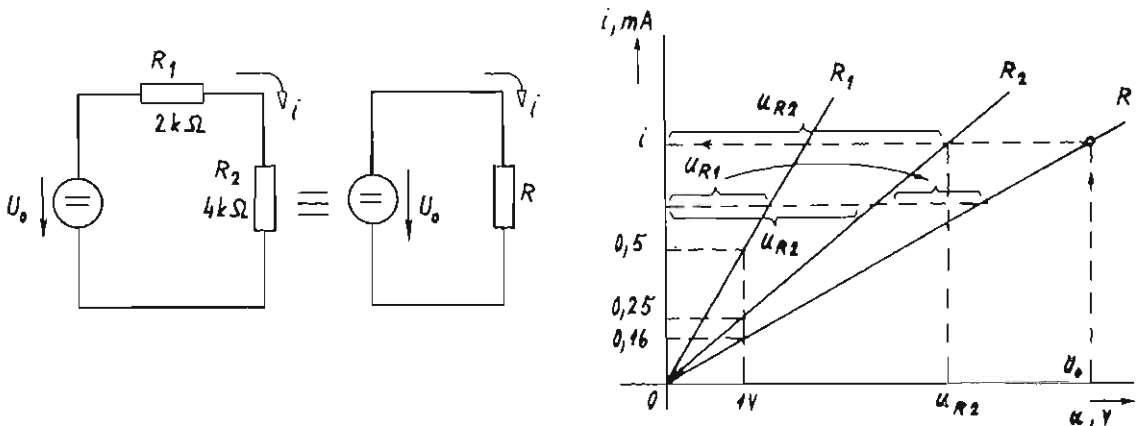
Metody řešení obvodů s nelineárními rezistory

Tyto metody lze rozdělit do dvou hlavních skupin :

- Výpočtové metody (analytické a numerické). Pracují s matematickým modelem nelineárního prvku. Mohou být dosti přesné. Jsou náročné na matematické výpočty, proto jsou vhodné pro řešení počítačem.
- Grafické metody. Jsou pro jednoduché obvody názorné a poměrně jednoduché. Vycházejí z naměřených A-V charakteristik. Jsou méně přesné a vhodné jen pro jednoduché obvody.

Grafické řešení.

Základní postupy si ukažme na příkladu lineárního a nelineárního děliče napětí. Postup řešení lineárního děliče je zřejmý. Nejprve musíme určit ekvivalentní hodnotu sériového spojení rezistorů R_1 a R_2 : $R = 2 + 4 = 6 \text{ k}\Omega$. Tento krok je proveden i graficky, kdy je vynesena A-V charakteristika rezistorů R_1 a R_2 . Pro vynesení výsledné charakteristiky stačí vypočítat jednu hodnotu proudu pro jedno zvolené napětí vzhledem k tomu, že jde o lineární závislost procházející nulou. V pří-



Obr. 3-33 Grafické řešení lineárního děliče napětí

kladu jsou vypočítány hodnoty proudů obou rezistorů pro zvolené napětí 1 V. Výslednou A-V charakteristiku ekvivalentního rezistoru R získáme podle 1. KZ

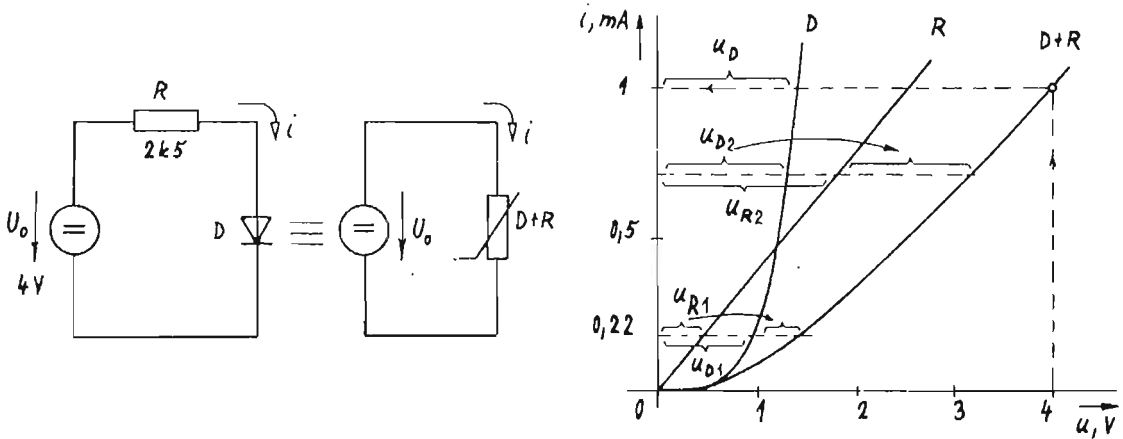
$$i_R = i_{R1} = i_{R2}$$

a na základě 2. KZ

$$u_R = u_{R1} + u_{R2}$$

Proto pro libovolnou hodnotu proudu sečteme odpovídající napětí u_{R1} a u_{R2} a součet vyneseme jako napětí u_R . To můžeme provést pro libovolný proud, avšak vzhledem k linearitě postačí jediný bod. Výslednou hodnotu proudu i pak získáme odečtením z A-V charakteristiky rezistoru R pro vstupní napětí U_0 . Ze znalosti proudu i pak lze určit hodnotu napětí u_{R2} na A-V charakteristice rezistoru R_2 .

Postup řešení nelineárního děliče je obdobný. A-V charakteristiku diody musíme vynést z naměřených hodnot. Výslednou charakteristiku ekvivalentního nelineárního



Obr. 3-34 Grafické řešení nelineárního děliče napětí

dvojpólu získáme obdobně jako v předchozím příkladu součtem napětí

$$u_{R+D} = u_R + u_D$$

pro libovolný proud i . Přitom musíme tento součet provést pro více hodnot proudu, abychom získali přesněji celou nelineární závislost proudu na napětí ekvivalentního dvojpólu R+D. Výsledný proud i pak odečteme z A-V charakteristiky R+D pro vstupní napětí U_0 . Výstupní napětí u_D odečteme z A-V charakteristiky diody pro výsledný proud i .

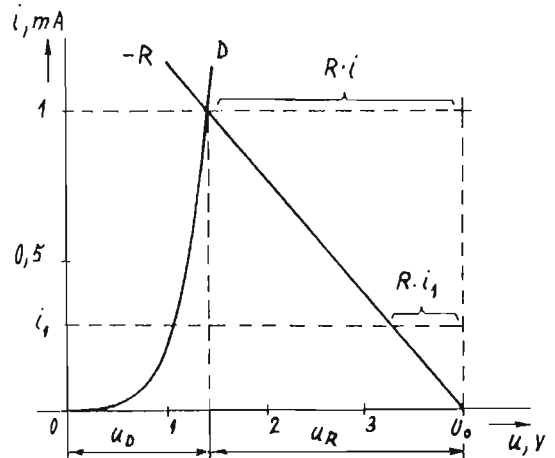
Při grafickém řešení tohoto příkladu lze vyjít i z jiné formy zápisu 2. KZ

$$u_D = U_0 - u_R$$

Můžeme jej vyjádřit pomocí proudu

$$u_D(i) = U_0 - R \cdot i$$

Nyní vynesme závislost na levé straně rovnice, což je A-V charakteristika diody. Pak vynesme závislost na pravé straně rovnice, což je přímka označená $-R$ na obr. 3-35. Obě strany rovnice se rovnají pro shodný proud i , t.j. v bodě jejich průsečíku. Tam lze odečíst hodnotu u_D a u_R , jejichž součet dá U_0 . Těto metodě se říká



Obr. 3-35 Grafické řešení metodou překlopené charakteristiky

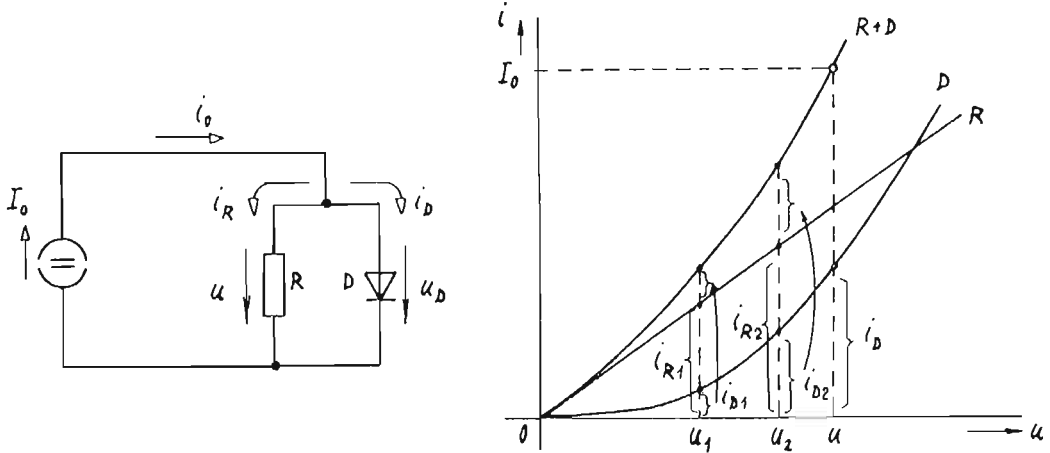
metoda překlopené charakteristiky a používá se v případech, kdy dochází k změnám hodnot R , případně U_0 .

Grafické řešení paralelního spojení prvků vychází opět z Kirchhoffových zákonů, které mají tentokrát opačný tvar zápisu :

$$I_0 = i_R + i_D$$

$$u = u_R = u_D$$

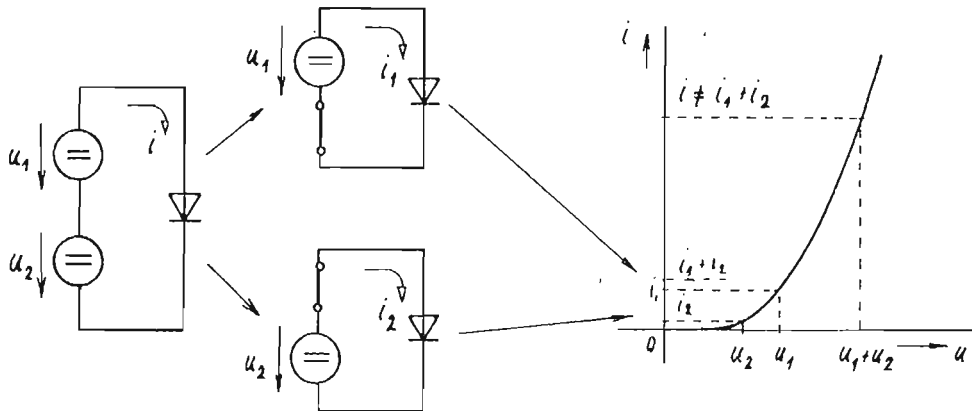
Budeme tedy při vytváření ekvivalentního nelineárního rezistoru postupovat obdobně



Obr. 3-36 Paralelní spojení nelineárních prvků

s tím, že tentokrát pro libovolnou hodnotu u budeme sčítat hodnoty proudů i_R a i_D . Získáme tak výslednou A-V charakteristiku, z které odečteme pro celkový proud I_0 hodnotu celkového napětí u . Z něho pak můžeme určit hodnotu proudu i_D na A-V charakteristice diody.

Neplatnost principu superpozice si ukažme na příkladu z obr. 3-37. Z obrázku

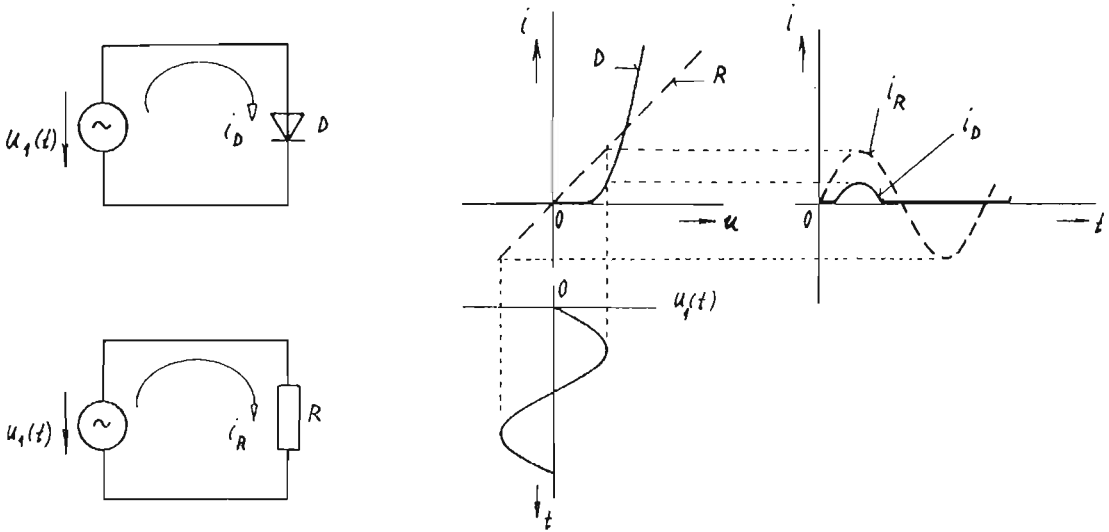


Obr. 3-37 Neplatnost principu superpozice v nelineárním obvodu

vyplývá, že součet proudů, vyvolaných každým zdrojem zvlášť, je odlišný od hodnoty proudu při současném působení obou zdrojů. Je to způsobeno proměnnou hodnotou statického odporu. Jeho hodnota při každém působení zdrojů zvlášť je odlišná od hodnoty při působení obou zdrojů současně.

Působení proměnného napětí na nelineární prvek je porovnáno s působením tohoto

napětí na lineární prvek na obr. 3-38. Odpovídající časový průběh proudu lze odvodit převodem hodnoty napětí v daném čase přes A-V charakteristiku nelineárního prvku



Obr. 3-38 Působení proměnného napětí na nelineární prvek

ku. Z tohoto experimentu plyne důležitý závěr, že na rozdíl od lineárního rezistoru má časový průběh proudu na nelineárním rezistoru jiný tvar než časový průběh napětí. Lze tak vyslovit předpoklad, že nelineární obvody mění tvary časových průběhů proměnných veličin.

Otázky k samostatnému studiu

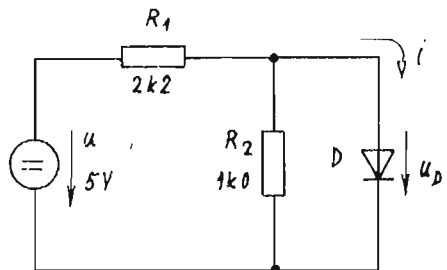
- 3-27 Vysvětlete pojem prvková rovnice nelineárního rezistoru. Jakou má vlastnost ?
- 3-28 Proč závisí na tom, jakým směrem zapojíme do obvodu nelineární prvek ?
- 3-29 Co je podmínkou toho, aby elektrický obvod byl nelineární ?
- 3-30 Jaké zákony lze využít při řešení nelineárních obvodů ? V jakém případě platí Ohmův zákon ? Co použijeme pro popis nelineárních prvků ?
- 3-31 Jaké používáme metody pro řešení nelineárních obvodů a jaké mají vlastnosti ?
- 3-32 Jaký je postup při grafickém řešení sériového spojení nelineárních rezistorů ?
- 3-33 Jaký je postup při grafickém řešení paralelního spojení nelineárních rezistorů ?
- 3-34 Platí v nelineárním obvodu princip superpozice ? Proč ?
- 3-35 Jaký vliv má nelineární obvod na časové průběhy proměnných napětí a proudů v obvodu ?

Příklad k procvičení

3-18 Určete graficky hodnotu napětí u_D . A-V charakteristika diody je vyjádřena funkcí $i = 10^{-3} u_D^2$ [A; V]. Uvažujme, že $u_D > 0$.

Návod : Vytvořte ekvivalentní nelineární prvek $R_2 = D$, výsledek pak spojte sériově s R_1 .

Výsledek : $u_D = 0,946$ V.



3.5 MĚŘENÍ STEJNOSMĚRNÝCH VELIČIN

Měření napětí a proudu v elektrickém obvodu. Měření odporu rezistorů

Realizace a provoz většiny elektrických a elektronických zařízení vyžadují měření elektrických veličin těchto obvodů, především napětí a proudu. Podle účelu lze měření rozdělit do tří skupin :

- provozní měření (orientační, často jen informativní měření při provozu zařízení; kontrola, zda se veličina pohybuje v povoleném rozmezí)
- výrobní a servisní měření (měření veličin a parametrů pro nastavování potřebných vlastností elektrického zařízení)
- laboratorní měření (přesná a složitá měření při výzkumu a vývoji elektrických zařízení).

V elektrických obvodech měříme různé veličiny. Lze je klasifikovat např. tímto způsobem :

- měření elektrických veličin v obvodu (především napětí, proud, ale i kmitočet, výkon, fáze apod. Měření těchto veličin si ukážeme později)
- měření parametrů (vlastností) obvodů; nejjednodušší je např. měření odporu jednoho rezistoru či dvojpólu s více rezistory, dále pak měření dalších veličin, např. přenosu napětí, proudu apod., jak bude ukázáno později
- měření neelektrických veličin pomocí převodníků hodnot těchto veličin na elektrické veličiny (např. měření teploty, tlaku, otáček apod.).

K měření používáme různé měřicí přístroje s různými vlastnostmi (princip funkce, složitost, přesnost, náročnost použití, cena apod.). Lze je rozdělit do následujících skupin :

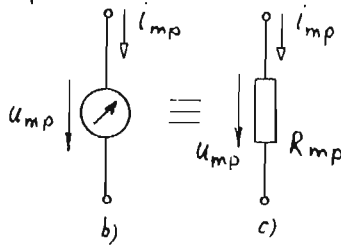
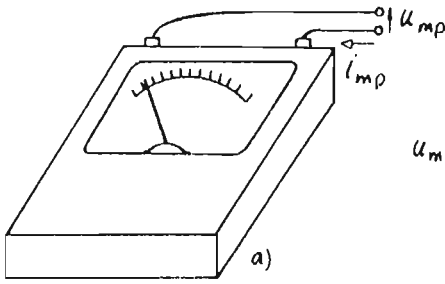
- analogové (obvykle ručkové) pasivní přístroje (bez napájecích zdrojů)
- analogové elektronické přístroje s napájecími zdroji pro funkci elektronických obvodů přístroje
- číslicové elektronické přístroje (obdobné jako analogové elektronické, ale zobrazení je prováděno číslicovým zobrazovačem - displejem).

Analogové (ruččkové) přístroje ukazují hodnotu spojitě, ale přesnost odečtení pozorovatelem ze stupnice je omezena (asi 0,2 - 1 %). Číslicové zobrazení umožňuje dosažení vyšší přesnosti odečtení hodnoty (dáno počtem číslic displeje). Použitím elektronických obvodů lze vylepšit vlastnosti pasivních přístrojů, ovšem na úkor ceny, potřeby napájení a složitosti. Dále se budeme zabývat první, nejjednodušší skupinou ručkových měřicích přístrojů.

a) Základní měřicí přístroj. Příklad takového přístroje je ukázán na obr. 3-39a. Na obr. 3-39b je odpovídající schématická značka a na obr. 3-39c je znázorněn rezistor R_{mp} , což je ekvivalentní vyjádření měřicího přístroje z hlediska jeho vlivu na elektrický obvod. Princip funkce tohoto měřicího přístroje spočívá v tom, že při průchodu elektrického proudu cívku tohoto přístroje vzniká síla magnetického pole, která působí proti síle mechanické pružiny a vychýlí tak ručičku přístroje na výchylku α . Závislost výchylky na hodnotě proudu i_{mp} lze vyjádřit vztahem

$$\alpha = k \cdot i_{mp} \quad (3-39)$$

kde k je konstanta daná konstrukcí přístroje. Dále lze na přístroji nalézt hodnotu maximální výchylky



α_{max} . Takové výchylky dosáhne přístroj při maximálním proudu i_{max} nebo maximálním napětí u_{max} , kde musí platit $u_{max} = R_{mp} \cdot i_{max}$ (3-40)

Příklad hodnot měřicího přístroje, které budeme dále používat : $i_{max} = 100 \mu A$, $R_{mp} = 2000 \Omega$, $u_{max} = 0,2 V$.

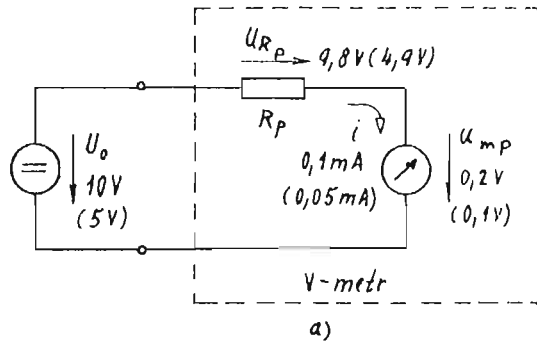
Obr. 3-39

Takovýto měřicí přístroj lze využívat jako

- voltmetr s maximální hodnotou napětí u_{max}
- ampérmetr s maximální hodnotou proudu i_{max} .

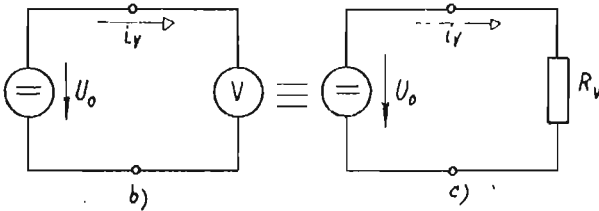
Vzhledem k potřebě měření vyšších hodnot napětí a proudů doplňujeme tento přístroj rezistory tak, abychom vytvořili buď voltmetr (V-metr) nebo ampérmetr (A-metr) s vyššími měřicími rozsahy.

b) V-metr. Jeho realizaci si ukažme na příkladu, kdy základní měřicí rozsah $u_{max} = 0,2 V$ potřebujeme zvýšit na měřicí rozsah $u_{MAX} = 10 V$. Úlohu snížení měřeného napětí na napětí u_{max} řešíme pomocí děliče napětí podle obr. 3-40a. Do série s přístrojem zařadíme předřadný rezistor R_p . Jeho hodnotu musíme navrhnout tak, aby se napětí 10 V rozdělilo podle 2. KZ



$u_{(1)} = u_{Rp} + u_{mp} = 9,8 V + 0,2 V$. Vzhledem k tomu, že známe hodnotu proudu $i = i_{max}$, platí

$$R_p = \frac{u_{MAX} - u_{max}}{i_{max}} = \frac{u_{MAX}}{i_{max}} - R_{mp} = R_V - R_{mp} \quad (3-41)$$



V našem případě $R_p = 98 k\Omega$. Hodnota R_V je odpor celého V-metru. Na obr. 3-40a jsou v závorkách hodnoty pro případ, že měřené napětí je nižší než

Obr. 3-40 Realizace a vyjádření V-metru

u_{MAX} . V tom případě se úměrně sníží proud i_{mp} a napětí u_{mp} měřicího přístroje. V důsledku toho se sníží i výchylka α a ukáže hodnotu odpovídající nižšímu napětí.

Vícerozsahové V-metry. V mnoha případech potřebujeme měřit různé hodnoty napětí. Pak je vhodné použít jeden měřicí přístroj pro více hodnot u_{MAX} . Ukažme si to na příkladě, kdy vyžadujeme $u_{MAX} = 1 V, 10 V$ a $100 V$. Pak lze vypočítat hodnoty odpovídajících předřadných rezistorů

$$R_{p1} = \frac{u_{MAX}}{i_{max}} - R_{mp} = \frac{1 V}{0,1 mA} - 2 k\Omega = 8 k\Omega$$

$$R_{p10} = \frac{10 \text{ V}}{0,1 \text{ mA}} - 2 \text{ k}\Omega = 98 \text{ k}\Omega$$

$$R_{p100} = \frac{100 \text{ V}}{0,1 \text{ mA}} - 2 \text{ k}\Omega = 998 \text{ k}\Omega .$$

Na obr. 3-41b je ukázáno zapojení stejného V-metru s přepínačem a jiným zapojením předřadných rezistorů, kdy

$$R_{p10} = R_{p1} + R_2 = 98 \text{ k}\Omega$$

$$R_{p100} = R_{p1} + R_2 + R_3 = 998 \text{ k}\Omega .$$

Je zřejmé, že funkce V-metru je pro jednotlivé měřicí rozsahy v obou případech shodná.

Je rovněž potřebné ujasnit si odečítání hodnot napětí na stupnici V-metru vzhledem k tomu, že stupnice platí pro více rozsahů. Výchylku odečteme v dílcích stupnice. Pak platí, že měřené napětí má hodnotu

$$u = k \cdot \alpha \quad (3-42)$$

kde konstantu k pro daný měřicí rozsah zjistíme z maximálních hodnot

$$k = \frac{u_{MAX}}{\alpha_{max}} \quad (3-43)$$

Př. 3-1 : Stupnice má $\alpha_{max} = 120$ dílků, měřicí rozsah $u_{MAX} = 60 \text{ V}$. Jaké je měřené napětí, je-li $\alpha = 85$ dílků ?

Řešení :

$$k = \frac{u_{MAX}}{\alpha_{max}} = \frac{60 \text{ V}}{120 \text{ d}} = 0,5 \text{ V/dílek} , \quad u = k \cdot \alpha = 0,5 \cdot 85 = 42,5 \text{ V} .$$

U vícerozsahového V-metru je též potřebné určit hodnoty odporu V-metru R_V pro jednotlivé rozsahy. Výrobce většinou udává hodnotu vnitřního odporu vztahenou na 1 V. Např. pro AVOMET je udávána hodnota $50 \text{ k}\Omega/\text{V}$. Hodnotu R_V pro daný napěťový rozsah u_{MAX} pak získáme vynásobením rozsahu touto hodnotou. Např. pro rozsah 6 V je $R_V = 6 \text{ V} \cdot 50 \text{ k}\Omega/\text{V} = 600 \text{ k}\Omega$. Hodnota vnitřního odporu vztahená na 1 V je vlastně převrácená hodnota proudu i_{max} , takže v uvedeném případě je $i_{max} = 1/5 \cdot 10^4 = 20 \mu\text{A}$.

Vliv V-metru na měřený obvod. Vzhledem k tomu, že při měření napětí V-metrem vlastně připojujeme k obvodu rezistor R_V , měníme tím zapojení obvodu a hodnoty napětí v něm. Ukažme si to na příkladu z obr. 3-42. Skutečná hodnota napětí (bez připojeného V-metru) je zřejmě

$$u_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ V} .$$

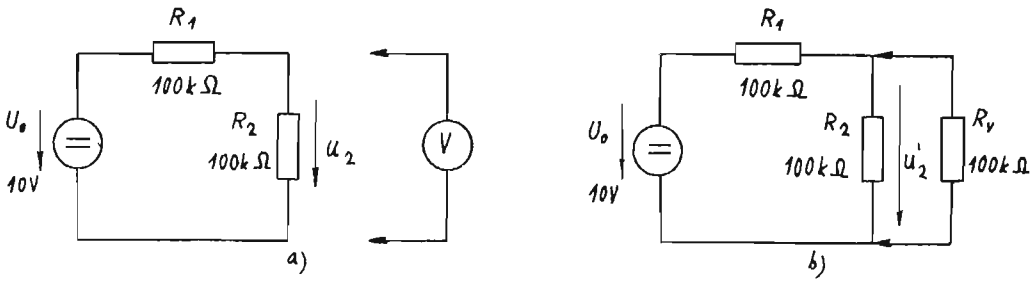
Po připojení V-metru vznikne nový dělič napětí, kde

$$R_2' = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = 50 \text{ k}\Omega .$$

Výsledné napětí na děliči (a na V-metru) je

$$u_2' = U_0 \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} = 3,33 \text{ V.}$$

Je tedy zřejmé, že V-metr sice měří správně, ale měří chybnou hodnotu z hlediska



Obr. 3-42 Vliv V-metru na měřený obvod

zadané úlohy. Způsobuje tedy chybu měření. K odstranění chyby vedou dvě cesty :

- použití V-metru s podstatně vyšší hodnotou odporu R_V
- korekce výsledku výpočtem, zjistíme-li vnitřní odpor R_i měřeného obvodu z hlediska měřených svorek.

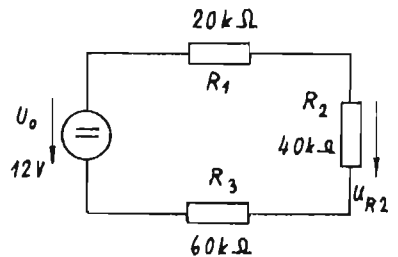
Lze vyslovit zásadu, že pro správné měření V-metrem musí platit podmínka

$$R_V \gg R_i \quad (3-44)$$

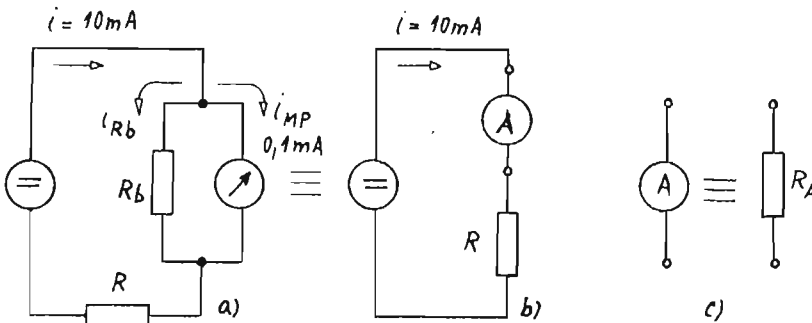
kde R_i je vnitřní odpor měřeného objektu. Dále lze říci, že ideální V-metr má hodnotu odporu $R_V \rightarrow \infty$.

Příklad k procvičení

3-19 Z měřicího přístroje o parametrech $i_{\max} = 50 \mu\text{A}$ a $R_{mp} = 5 \text{ k}\Omega$ vytvořte V-metr pro $u_{\max} = 6 \text{ V}$. Vypočtete hodnotu napětí u_{R_2} v obvodu a pak určete, jaké napětí na R_2 změří navržený V-metr. Výsledky porovnejte. Dáno : $U_0 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 60 \text{ k}\Omega$.
Výsledek : $R_p = 115 \text{ k}\Omega$, $u_{R_2} = 4 \text{ V}$, $u_{R_2}' = 3,25 \text{ V}$.



c) A-metr. Jeho realizaci si ukažme na příkladu, kdy základní měřicí rozsah $i_{\max} =$



Obr. 3-43

$= 0,1 \text{ mA}$ potřebujeme zvýšit na měřicí rozsah $i_{\max} = 10 \text{ mA}$. To to realizujeme proudovým děličem z obr. 3-43a, kde k měřicímu přístroji zapojíme paralelně rezistor R_b (bočník). Jeho hodnotu navrhne tak, aby se celkový proud rozdělil v požadovaném.

oměru. Vzhledem k platnosti 2. KZ je při i_{MAX} na přístroji i na bočnicku napětí $u_{max} = 0,2 \text{ V}$, takže pro R_b platí

$$R_b = \frac{u_{max}}{i_{MAX} - i_{max}} = 20,2 \Omega \quad (3-45)$$

Celkový odpor A-metru je pak dán paralelním spojením R_b a R_{mp} či vztahem

$$R_A = \frac{u_{max}}{i_{MAX}} \quad (3-46)$$

Vícerozsaahový A-metr. Obdobně jako u V-metru lze vytvořit i A-metr pro více rozsahů.

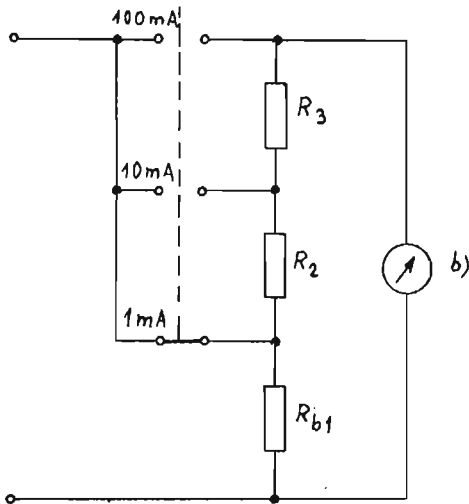
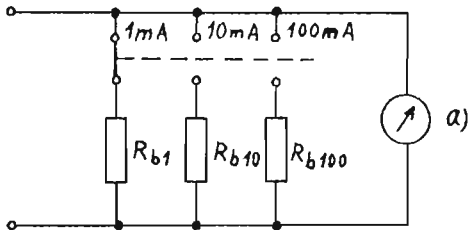
Ukažme si to na příkladu, kdy vytvoříme A-metr pro rozsahy $i_{MAX} = 1 \text{ mA}$, 10 mA a 100 mA . Pak lze vypočítat hodnoty bočníků

$$R_{b1} = \frac{u_{MAX}}{i_{MAX} - i_{max}} = \frac{0,2 \text{ V}}{(1-0,1) \text{ mA}} = 222 \Omega$$

$$R_{b10} = \frac{0,2 \text{ V}}{(10-0,1) \text{ mA}} = 20,2 \Omega$$

$$R_{b100} = \frac{0,2 \text{ V}}{(100-0,1) \text{ mA}} = 2,002 \Omega$$

Realizace podle obr. 3-44a má nevýhodu v tom, že při přepínání rozsahů nemusí být v určitém okamžiku připojen žádný bočnick. Při měření velkých proudů by tak mohlo být zničeno měřidlo. Tuto nevýhodu odstraňuje tzv. Ayrtonův bočnick, kde v okamžiku přepínání není přístroj vůbec připojen. Výpočet hodnot bočnickových rezistorů se trochu komplikuje, protože při měření větších proudů se bočnick řadí sériově jako předřadné rezistory a zvyšují hodnotu u_{max} .



Obr. 3-44 Vícerozsaahové A-metry

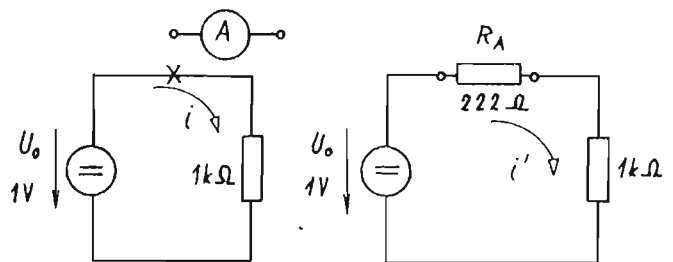
pro každý rozsah. Výrobce obvykle udává hodnotu u_A , což je v podstatě hodnota u_{max} . Pro R_A pak platí vztah (3-46).

Vliv A-metru na měřený obvod.

Vzhledem k tomu, že odpor A-metru R_A nemá nulovou hodnotu, mění se jeho zapojením do obvodu velikost měřeného proudu. Ukažme si to na příkladu z obrázku. Samotným obvodem teče proud

$$i = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

Při zapojení A-metru se zvýší



celkový odpor v obvodu, takže

$$i' = \frac{u_0}{R + R_A} = \frac{1 \text{ V}}{1222 \Omega} = 0,818 \text{ mA.}$$

Je zřejmé, že A-metr sice měří správně, avšak měří nesprávnou hodnotu. Způsobuje tedy chybu měření. Lze proto vyslovit závěr, že pro správné měření proudu je nutno splnit podmínku

$$R_A \ll R_I \quad (3-47)$$

kde R_I je vnitřní odpor obvodu z hlediska svorek pro připojení A-metru. Pro ideální A-metr pak lze stanovit, že $R_A = 0$.

d) Měření odporu. Měření odporu je měření hodnoty parametru rezistoru nebo složitějšího odporového obvodu jako dvojpólu. U lineárních rezistorů hodnota odporu nezáleží na napětí či proudu. Přesto však můžeme měřit odpor jen v obvodu se zdroji napětí či proudů. Hodnotu odporu tedy určujeme na základě napětí a proudů v obvodu. Máme čtyři základní metody měření odporů :

- nepřímé metody
- přímé výchylkové metody
- můstkové metody
- elektronické měření s využitím některé z předchozích metod.

Nepřímé měření odporu pomocí A-metru a V-metru vychází z Ohmova zákona. Příklad takového měření odporu je ukázán na obr. 3-45. Hodnota odporu rezistoru R je dána Ohmovým zákonem

$$R_X = \frac{u_{RX}}{i_{RX}} = 30 \text{ k}\Omega.$$

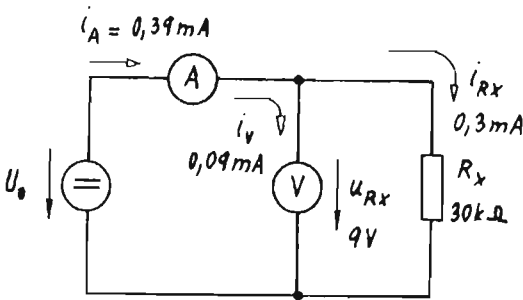
Hodnotu u_{RX} ukazuje V-metr. A-metr však ukazuje hodnotu proudu

$i_A = i_{RX} + i_V = 0,3 + 0,09 = 0,39 \text{ mA}$, takže hodnota odporu vypočítaná z údajů A-metru a V-metru

$$R' = \frac{u_{RX}}{i_A} = 23,1 \text{ k}\Omega$$

je odlišná od hodnoty skutečné. Je zřejmé, že chybu způsobuje proud V-metru i_V . Vypočítaný odpor R' je výsledkem paralelního spojení rezistorů R_X a voltmetru s vnitřním odporem R_V .

Obr. 3-45



Správnou hodnotu rezistoru R_X určíme buď použitím V-metru s $R_V \gg R_X$, nebo korekcí vypočtené hodnoty R' . Při znalosti hodnoty vnitřního odporu V-metru R_V lze totiž vypočítat hodnotu $i_V = u_R/R_V$, takže správná hodnota R_X je pak

$$R_X = \frac{u_{RX}}{i_A - i_V} = 30 \text{ k}\Omega \quad (3-48)$$

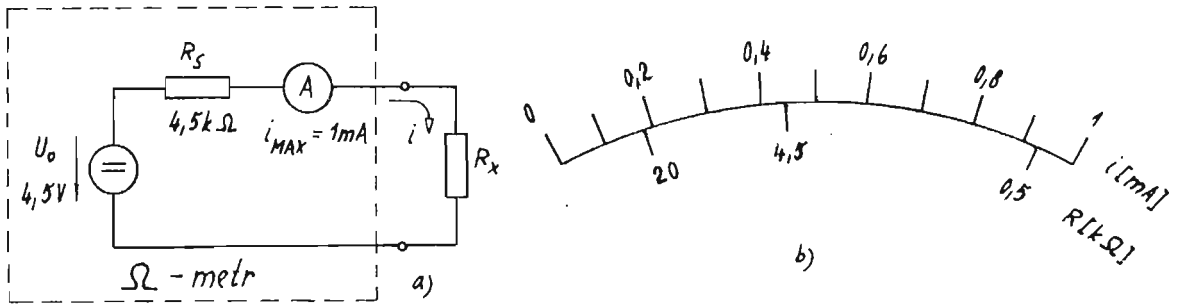
Při zapojení obvodu, kde A-metr je v sérii s měřeným rezistorem a V-metr měří hodnotu $u_V = u_A + u_R$, způsobuje chybu měření odpor A-metru R_A . Zde je korekce chyby více zřejmá :

$$R_X = \frac{u_V - u_A}{i_A} = R' - R_A \quad (3-49)$$

Bez chyby vlivem A-metru či V-metru je takové měření, kdy měříme napřed zvlášť V-metrem a pak zvlášť A-metrem. Pak naměřené hodnoty odpovídají hodnotám u_{RX} a i_{RX} .

Výchylkové měření odporu (přímoukazující Ω -metry). Jejich princip nejčastěji spo-

čívá v měření proudu neznámým rezistorem v obvodu podle obr. 3-46a. Zde je nastá-



Obr. 3-46 a) Přímokazující Ω - metr, b) jeho stupnice

vena hodnota R_s tak, že pro hodnotu $R_x = 0$ je $i = i_{MAX} = 1 \text{ mA}$ a tedy maximální výchylka α_{MAX} odpovídá hodnotě $R_x = 0$. Z toho $R_s = U_0 / i_{MAX} = 4,5 \text{ k}\Omega$. Při zvyšování hodnoty R_x pak i a α klesají a pro $R_x = \infty$ je $i = 0$ a $\alpha = 0$.

Zajímavý je případ poloviční výchylky, kdy pro $i = i_{MAX}/2$ musí být $R_x + R_s = 2R_s$ a tedy $R_x = R_s$. Můžeme vypočítat i hodnoty proudu pro jiné hodnoty R_x :

$$R_x = 0,5 \text{ k}\Omega \quad \dots \quad i = \frac{U_0}{R_s + R_x} = 8,9 \text{ mA}$$

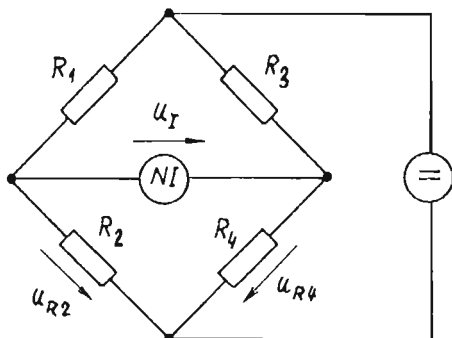
$$R_x = 20 \text{ k}\Omega \quad \dots \quad i = \frac{U_0}{R_s + R_x} = 0,184 \text{ mA}$$

atd. Lze tak ocejchovat stupnici proudu jako stupnici R_x , jak je to naznačeno na obr. 3-46b. Stupnice zahrnuje celý rozsah hodnot R_x od 0 do ∞ , ale nejlépe lze měřit hodnoty blízké hodnotě R_s . Proto mají tyto Ω - metry obvykle dva či tři podrozsahy, které lze měnit rozsahem A-metru a odpovídající změnou R_s .

Při praktickém měření dodržujeme vzhledem k změně napětí zdroje (stárnutí suchého článku) tento postup :

- Před měřením svorky zkratujeme ($R_x = 0$) a nastavíme i_{MAX} změnou R_s .
- Připojíme R_x a odečteme jeho hodnotu. Lze ovšem ukázat, že pro větší změny U_0 i přes toto nastavení neodpovídá přesně průběh stupnice. Zdůvodněte proč !

Můstkové měření odporu Wheatstoneovým můstkem (obr. 3-47) je přesnější metoda



Obr. 3-47 Wheatstoneův můstek

nebo

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

než obě předchozí. Princip spočívá v nastavení tohoto můstku do rovnováhy, kdy $u_I = 0$ a tedy indikátor (citlivý měřicí přístroj s nulovou polohou uprostřed) je v nulové poloze. Pak podle 2. KZ platí

$$u_{R2} = u_{R4}$$

Za této podmínky jde o dva nezatižené děliče napětí, jejichž napětí lze vyjádřit

$$u_{R2} = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = u_{R4} = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (3-50)$$

Z toho lze odvodit podmínku rovnováhy

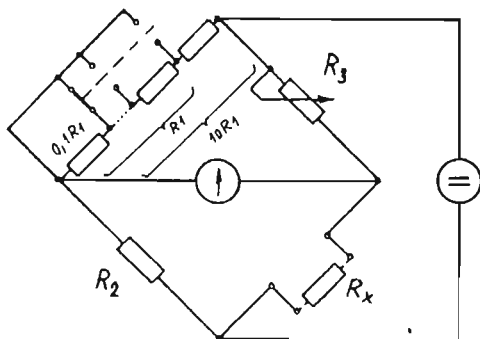
$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (3-51)$$

$$(3-52)$$

Známe-li pak hodnoty tří rezistorů, vyjádříme hodnotu čtvrtého neznámého z podmínky rovnováhy. R_X je např. R_4 . Pak

$$R_X = R_3 \frac{R_2}{R_1} \quad (3-53)$$

Skutečné provedení můstku pak může být podle obr. 3-48. R_3 má proměnnou hodnotu s přesným označením tak, aby ji bylo možno odečítat. Pak za podmínky $R_1 = R_2$ při nastavení rovnováhy odečítáme $R_X = R_3$.



Obr. 3-48 Můstkový Ω -metr

Pro lepší odečítání malých i velkých hodnot R_X lze též vytvořit další podrozsahy tím, že přepínáme hodnotu R_1 tak, aby

$$R_2 = a \cdot R_1, \quad a = 0,1; 1; 10; \dots$$

Pak je hodnota R_X

$$R_X = a \cdot R_3 \quad (3-54)$$

Praktické měření má pak dva kroky :

1. Nastavíme rovnováhu ($u_1 = 0$).
2. Odečteme hodnotu R_X .

Nemůžeme-li vyvážit můstek nebo je-li hodnota na kraji stupnice R_3 , změníme rozsah a opakujeme měření.

Speciální případy měření rezistorů. Mimo tato běžná měření rezistorů jsou i případy, které vyžadují speciální úpravy Ω -metrů a měřících metod. Jde např. o

- měření malých odporů, kde je potřebné vyloučit chyby měření způsobené odporem kontaktů a přívodních vodičů pomocí Thomsonova můstku
- měření zemních odporů s přístrojem TERROMET
- měření izolačních odporů (jako měření velkých odporů).

e) Univerzální měřicí přístroje spojují A-metr, V-metr a Ω -metr jako jeden měřicí přístroj (např. AVOMET). Takový přístroj má obvykle dva přepínače :

1. přepínač - typ měření (A-metr, V-metr, Ω -metr)
2. přepínač - podrozsah měření.

Přístroje mívají oddělenou svorku pro A-metr, V-metr a pro Ω -metr a druhou svorku mají společnou. Použití a vlastnosti tohoto přístroje jsou obdobné jako u samostatných A-metrů, V-metrů a Ω -metrů.

f) Chyby měření. Přesnost každého měření je vždy omezena - vždy existuje chyba měření. Je důležité vědět, jak je velká a zda tato přesnost měření vyhovuje.

Absolutní chyba měření Δ je dána vztahem

$$\Delta = N - S,$$

kde N je naměřená hodnota a S je správná hodnota.

Relativní chyba měření d je dána vztahem

$$d = \frac{\Delta}{N}$$

a obvykle ji vyjadřujeme v procentech

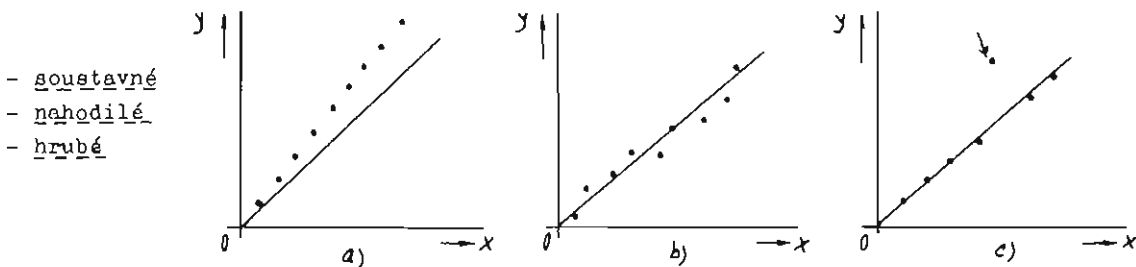
$$d\% = \frac{\Delta}{N} \cdot 100.$$

Podle přesnosti lze měření rozdělit na

- orientační (hodnota veličiny se může pohybovat v širším rozmezí, např. $\pm 20\%$)
- běžná s relativní chybou asi 1 až 5 %
- přesná laboratorní s relativní chybou asi 0,1 až 1 %; v některých speciálních případech lze dosahovat i podstatně vyšší přesnosti; podmínkou je i použití číslicových elektronických přístrojů.

Každé zvyšování přesnosti vyžaduje nákladnější a složitější přístroje. Proto je potřebné správně posuzovat potřebnou přesnost měření !

Chyby měření lze rozdělit např. takto :



Obr. 3-49 Druhy chyb : a) soustavné, b) nahodilé, c) hrubé

Chyby nahodilé lze eliminovat pomocí statistického vyhodnocení, chyby hrubé je nutno vyloučit. Chyby soustavné nelze poznat z výsledků měření. Vyloučit je můžeme pouze správnými metodami a postupy měření.

Chyby lze dále rozdělit podle příčiny jejich vzniku na

- chyby metody (např. vliv odporu V-metru ...)
- chyby měřicího přístroje (dáno vlastnostmi přístroje, jeho třídou přesnosti ...)
- chyby odečítání (chyby pozorovatele)
- chyby způsobené vnějším rušením.

Možnosti odstraňování těchto chyb vyplývají z jejich příčin. U měřicích přístrojů lze využít korekční křivku, která vyjadřuje průběh chyby přístroje v závislosti na výchylce.

Metrologie se zabývá zajištěním kontroly přesnosti měření. Její důležitost vyplývá z toho, že jen přístroje systematicky kontrolované dávají záruku správných výsledků v požadované třídě přesnosti. Pro provádění kontroly je vytvářena metrologická služba, která musí být vybavena kvalitními kontrolními měřicími přístroji. Třídy přesnosti těchto kontrolních přístrojů musí být zaručeně kontrolované a alespoň o stupeň lepší než třídy přesnosti kontrolovaných přístrojů.

Otázky k samostatnému studiu

- 3-36 Pro jaké účely a jaké veličiny měříme při elektrickém měření ?
- 3-37 Jaké typy měřicích přístrojů se používají a jaké jsou jejich základní vlastnosti ?
- 3-38 Vysvětlete princip funkce základního ručkového měřicího přístroje a jeho vlastnosti. Jakou veličinu tento přístroj měří, napětí či proud ? Jak se projevuje v elektrickém obvodu ?
- 3-39 Jakým způsobem vytvoříme ze základního měřicího přístroje V-metr s vyšší hodnotou měřeného napětí ? Vysvětlete návrh předřadného rezistoru.
- 3-40 Nakreslete schéma vícerozsahového V-metru a vysvětlete jeho funkci. Jakým

- způsobem odcítáme měřené hodnoty napětí na různých rozsazích ? Jak určíme vnitřní odpor V-metru na různých rozsazích ?
- 3-41 Vysvětlete vliv V-metru na elektrický obvod a hodnotu měřeného napětí. Jaké z toho plynou požadavky na hodnotu R_V ?
- 3-42 Jakým způsobem vytvoříme ze základního měřicího přístroje A-metr s vyšší hodnotou měřicího rozsahu proudu ? Jak vypočítáme hodnotu odporu bočníku ?
- 3-43 Nakreslete schéma vícerozsahového A-metru. Jak určíme hodnotu R_A pro jednotlivé rozsahy ?
- 3-44 Vysvětlete vliv A-metru na měřený obvod a hodnotu měřeného proudu. Jaké z toho plynou požadavky na hodnotu odporu ampérmetru R_A ?
- 3-45 Vysvětlete měření odporu pomocí A-metru a V-metru a chyby měření, které při tom mohou vzniknout.
- 3-46 Nakreslete schéma přímoukazujícího Ω -metru a vysvětlete jeho funkci. Jak určíme hodnotu R_x ? Jak ocejchujeme stupnici měřeného proudu jako stupnici odporu R_x ? Jaký je postup měření a proč ?
- 3-47 Nakreslete Wheatstoneův můstek a vysvětlete podmínku rovnováhy můstku. Jaký je postup určení hodnoty měřeného rezistoru ? Jak se mění rozsahy měření odporu ? Má změna napájecího napětí vliv na měření odporu ?
- 3-48 Jaký je princip funkce univerzálních měřicích přístrojů pro měření napětí, proudu a odporu ?
- 3-49 Proč nemá význam naměřená hodnota, když neznáme alespoň orientačně chybu jejího měření ?
- 3-50 Jak definujeme chybu měření ? S jakou přesností obvykle měříme a v kterých případech ?
- 3-51 Jaké jsou příčiny chyb a jak je možné snižovat chyby měření ?
- 3-52 K čemu slouží metrologie ?

4 ELEKTRICKÉ POLE. KAPACITOR

Obsah kapitoly :

4.1 ZÁKLADNÍ VELIČINY ELEKTRICKÉHO POLE

Síly mezi elektrickými náboji. Silové a elektrické pole. Intenzita, indukce, elektrický indukční tok. Elektrický potenciál a elektrické napětí.

4.2 ELEKTRICKÉ POLE V NEVODIČI

Dielektrická polarizace. Volné, vázané a celkové náboje. Intenzita a indukce v dielektriku. Elektrická pevnost.

4.3 KONDENZÁTOR, KAPACITOR

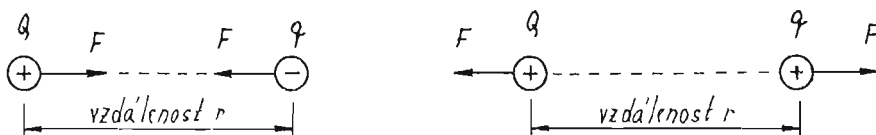
Kapacita kondenzátoru. Kondenzátor, kapacitor. Vztah mezi napětím a proudem kapacitoru. Spojování kondenzátorů.

4.1 ZÁKLADNÍ VELIČINY ELEKTRICKÉHO POLE

Síla mezi dvěma elektrickými náboji

Víme, že částice o elektrických nábojích opačných znamének se přitahují, náboje stejných znamének se odpuzují. V prostoru vyplněném elektrickými náboji působí síly. Protože jsou to síly elektrické povahy, říkáme, že v prostoru působí elektrické pole. Elektrické pole, vyvolané nepohybujícími se elektrickými náboji, se nazývá elektrostatické.

Výklad základních pojmů provedeme pro případ, že náboje se nacházejí ve vakuu. V části 4.2 pak popíšeme elektrické pole v libovolném prostředí.



Obr. 4-1 Síly mezi 2 náboji a) přitažlivé, b) odpudivé

Síla F se vypočte podle Coulombova zákona

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \quad [N; F/m, C, C, m] \quad (4-1)$$

Zde Q, q celkové elektrické náboje

r vzdálenost mezi náboji

ϵ_0 permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m (farad na metr)

Př. 4-1 : V atomu vodíku obíhá elektron kolem jádra, ve kterém je 1 proton ve vzdálenosti $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m. Určete přitažlivou sílu mezi elektronem a protonem. Náboj protonu = $+e = +1,602 \cdot 10^{-19}$ C, náboj elektronu = $-e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

Řešení :

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{(0,529 \cdot 10^{-10})^2} \doteq 8,24 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

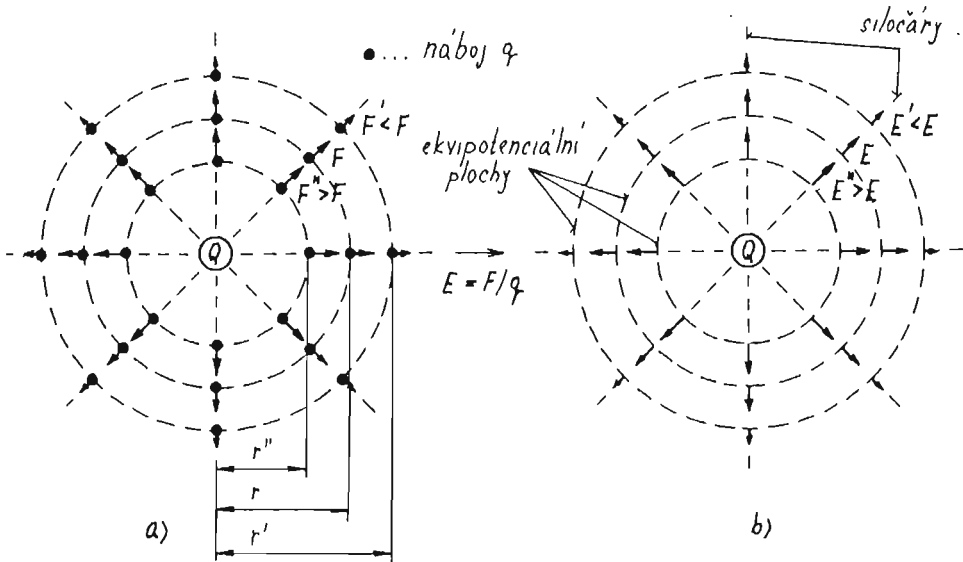
Př. 4-2 : Jakou silou by se přitahovaly dva náboje 1 C na vzdálenost 1 km ?

Řešení :

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1000^2} = 8988 \text{ N} \quad (\text{Je to velká síla, což znamená, že 1 C je velké množství náboje.})$$

Silové a elektrické pole

V prostoru je umístěn náboj Q . Na libovolný náboj q ve vzdálenosti r působí síla F podle (4-1), která slábne s rostoucí vzdáleností r . Kolem náboje Q působí silové pole, které je znázorněno na obr. 4-2 a). Vzorec (4-1) rozdělíme na dvě části :



Obr. 4-2 Znázornění a) silového b) elektrického pole kolem bodového náboje Q

$$F = \underbrace{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}}_E \cdot q$$

První část, označená symbolem E , obsahuje : elektrický náboj $Q =$ zdroj silového pole; konstantu $4\pi \epsilon_0$; prostorovou souřadnici r . Nazveme ji intenzitou elektrického pole. Tato veličina má rozměr V/m (volt na metr). Pro bodový náboj Q platí

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}} \quad [V/m] \quad (4-2)$$

Protože síla je obecně vektor a od intenzity se liší pouze konstantou q , je intenzita elektrického pole také vektor :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4-3)$$

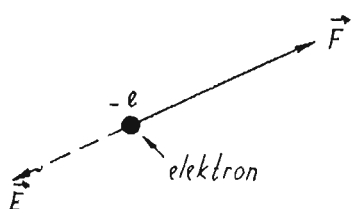
Pro kladný náboj $+q$ mají vektory \vec{E} a \vec{F} stejnou orientaci :

Pro záporný náboj $-q$ mají vektory \vec{E} a \vec{F} opačnou orientaci :

Proto : Intenzita elektrického pole má velikost a směr síly, která působí na kladný jednotkový náboj, vložený do elektrického pole.

Př. 4-3 : Na elektron, který byl vložen do elektrického pole, působí v místě vložení síla $F = 10^{-9}$ N podle obr. 4-3. Určete vektor intenzity elektrického pole v daném místě.

Řešení :



$$E = \frac{F}{q} = \frac{10^{-9}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 6,24 \cdot 10^9 \text{ V/m}$$

Protože elektron má záporný náboj, budou mít vektory \vec{F} a \vec{E} opačnou orientaci.

Obr. 4-3

Na obr. 4-2b je elektrické pole bodového náboje Q zobrazeno čarami dvojího typu :

- 1 přímky vycházejí z náboje Q - mají všude směr vektorů \vec{F} , \vec{E} silové čáry (siločáry, elektrické indukční čáry). Jsou to čáry, po kterých by se pohyboval náboj q po vložení do elektrického pole.
- 2 soustředné koule, na nichž je konstantní další důležitá veličina elektrického pole - potenciál (bude probíráno později) ekvipotenciální plochy.

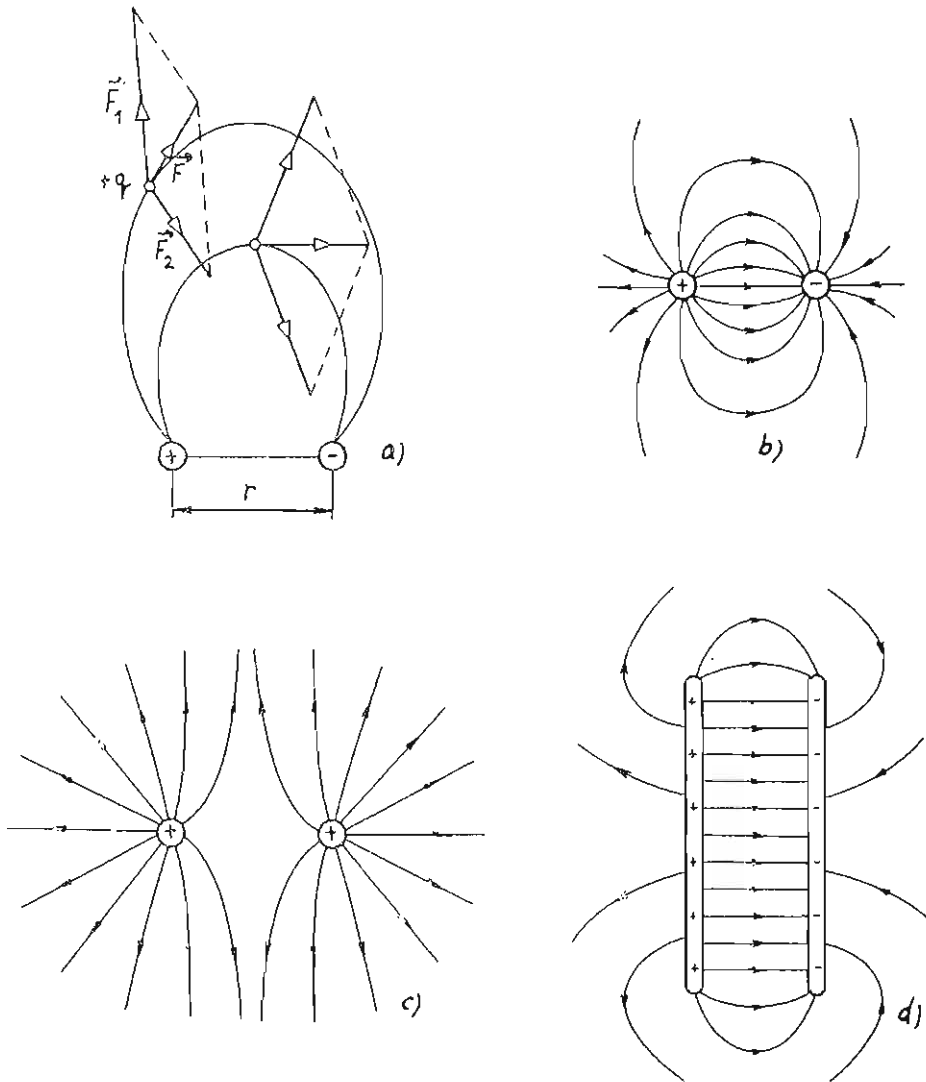
Siločáry a ekvipotenciální plochy jsou v každém bodě na sebe kolmé.

Příklady složitějších elektrických polí

Je-li zdrojem elektrického pole více elektrických nábojů, pak výsledné elektrické pole je dáno součtem polí každého náboje. Názorně je to ukázáno na obr. 4-4.

Poznámka : Často používané pojmy : homogenní pole pole, kde vektory E mají všude stejnou velikost i směr. Příklad : elektrické pole mezi dlouhými nabitými deskami - obr. 4-4 d).

elektrostatické pole pole, vyvolané elektrickými náboji, které jsou v klidu (nepohybují se) vzhledem k pozorovateli. Pohyby zdroje elektrického pole mohou vést ke vzniku dalších elektrických a magnetických polí.



Obr. 4-4 Elektrické pole a), b) dvou opačných nábojů, c) dvou nábojů stejného znaménka, d) soustavy dvou rovnoměrně nabitých desek

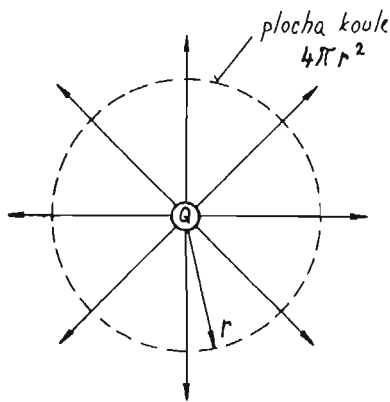
Elektrická indukce a elektrický indukční tok

Intenzita elektrického pole bodového náboje Q ve vakuu má na kouli o poloměru r se středem Q hodnotu $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Plocha této koule je $S_{koule} = 4\pi r^2$, a proto

$$\epsilon_0 E = \frac{Q}{S_{koule}} \quad (4-4)$$

Označili jsme $D = \epsilon_0 E$, D je tzv. elektrická indukce. Její jednotka je C/m^2 . Obecně je to vektor. Ve vakuu platí

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad [C/m^2] \quad (4-5)$$



Později ukážeme, že tento vektor nezávisí na prostředí, takže je stejný jak ve vakuu, tak i v jiných látkách.

Představme si, že : elektrický náboj Q je složen z řady jednotkových nábojů a z každého jednotkového náboje vychází jedna siločára na obr. 4-5. Počet těchto siločar je Q . Potom $D = Q/S_{\text{koule}}$ je počet těchto siločar na jednotkové ploše koule (plošná hustota elektrických indukčních čar). Plošná hustota elektrických indukčních čar \times plocha koule = elektrický indukční tok $\Psi =$ náboj uvnitř plochy Q :

Obr. 4-5 Výpočet elektrické indukce

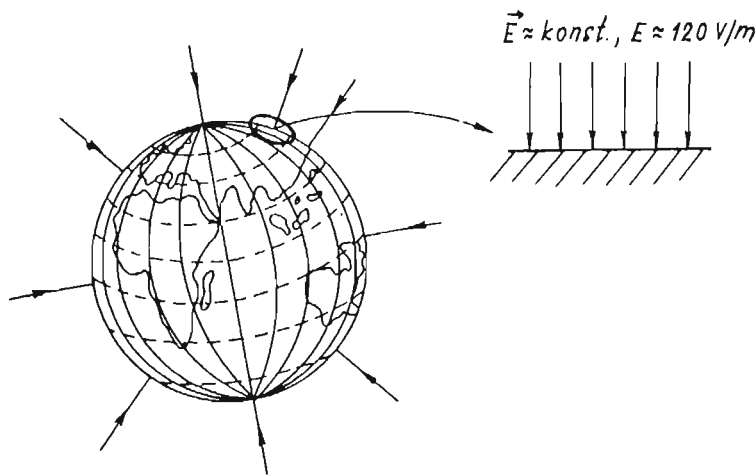
$$\Psi = D \cdot S = Q \quad [C] \quad (4-6)$$

V obecném případě, kdy vektor \vec{D} není na ploše S konstantní :

$$\Psi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (4-7)$$

To je matematický zápis tzv. Gaussovy věty elektrostatiky : elektrický indukční tok uzavřenou plochou S je roven celkovému elektrickému náboji uvnitř této plochy.

Př. 4-4 :



Naše planeta obsahuje elektrický náboj, a proto se nacházíme v jeho elektrickém poli. V blízkosti povrchu je elektrické pole Země přibližně homogenní. Na fotbalovém stadionu byla změřena intenzita $E = 120 \text{ V/m}$. Vypočtete : elektrickou indukci na povrchu země, elektrický indukční tok, procházející fotbalovým hřištěm o rozměrech $100 \times 60 \text{ m}$ a celkový elektrický náboj na tomto hřišti.

Obr. 4-6 Elektrické pole Země

Řešení : $D = \epsilon_0 E = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 120 = 1,062 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$
 $\Psi = Q = D \cdot S = 1,062 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 60 = 6,372 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

Otázky k samostatnému studiu

4-1 Jak se vypočte elektrostatická síla mezi dvěma elektrickými náboji ?

- 4-2 Jak se určí intenzita elektrického pole bodového náboje ? Jaká je jednotka intenzity ?
- 4-3 Jak se určí směr intenzity ze směru elektrostatické síly ?
- 4-4 Co jsou to elektrické indukční čáry (siločáry) ?
- 4-5 Vysvětlete tvar siločar na obr. 4-4 .
- 4-6 Jak se určí elektrická indukce pole bodového náboje ? Jaká je jednotka elektrické indukce ?
- 4-7 Jaký je vztah mezi indukcí a intenzitou ?
- 4-8 Co je to elektrický indukční tok ? Jaká je jeho jednotka ? Jak se určí z indukce ?

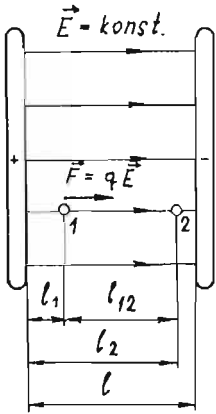
Příklady k procvičení

- 4-1 Jakou silou na sebe působí dva elektrony, které jsou od sebe vzdáleny 10^{-8} m ?
Výsledek : $2,31 \cdot 10^{-12}$ N, odpuzivá síla.
- 4-2 Atom stříbra má v stabilním stavu 47 elektronů. Určete, jaký elektrický náboj je soustředěn v jádře.
Výsledek : $+7,53 \cdot 10^{-18}$ C.
- 4-3 Určete, kolik elektronů musíme umístit na elektricky neutrální kovovou kouli, aby měla náboj 1 C.
Výsledek : $6,24 \cdot 10^{18}$ elektronů.
- 4-4 Vypočtete velikost intenzity elektrického pole ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od bodového náboje 1 C.
Výsledek : $8988 \cdot 10^9$ V/m.
- 4-5 Elektron je vtahován do prostoru elektrického pole silou $F = 8,5 \cdot 10^{-15}$ N. Jaká je intenzita elektrického pole v místě elektronu ?
Výsledek : $5,306 \cdot 10^4$ V/m.
- 4-6 Kovová kulička je nabitá na elektrický náboj $-8,8 \cdot 10^{-10}$ C a je umístěna ve vakuu. Jak velká je elektrická indukce ve vzdálenosti 1 cm od středu kuličky ?
Výsledek : $7,9 \cdot 10^4$ C/m².
- 4-7 Jak velký indukční tok prochází povrchem koule, v jejímž středu je umístěn náboj $Q = 1$ C ?
Výsledek : 1 C.
- 4-8 Jak se změní indukční tok koule z př. 4-7, nebude-li náboj umístěn přesně v jejím středu ?
Výsledek : nezmění se.
- 4-9 Odhadněte, jaký elektrický náboj obsahuje naše planeta. Potřebné údaje naleznete v Př. 4-4. Uvažujte poloměr Země $R = 6371$ km.
Výsledek : $Q = -5,42 \cdot 10^5$ C.

Elektrický potenciál a elektrické napětí

Mezi dvěma rovnoběžnými deskami, které nesou elektrický náboj $+Q$ a $-Q$, je homogenní elektrické pole o intenzitě \vec{E} . Do bodu 1 na obr. 4-7 vložíme elektrický náboj $+q$, na který začne působit síla $\vec{F} = q\vec{E}$: náboj je odpuzován od kladně nabitě desky a přitahován k záporně nabitě desce. Pohybuje se po elektrické siločáře k bodu 2. Při přemístění náboje q z bodu 1 do bodu 2 byla elektrickým polem vykonána práce

$$A = F \cdot l_{12} = q \frac{E l_{12}}{U_{12}} \quad (4-8)$$



Veličina $U_{12} = El_{12}$ je elektrické napětí mezi body 1 a 2 a její jednotka je 1 V (volt). Platí

$$A = qU \quad [J] \quad (4-9)$$

a v homogenním poli

$$U = E\ell \quad [V] \quad (4-10)$$

Práce k přemístění náboje q z jednoho místa v elektrickém poli do druhého místa je rovna součinu elektrického náboje a elektrického napětí mezi těmito body.

Elektrické napětí je skalár (A je skalár, q je skalár $\Rightarrow U$ je skalár). Jak budeme elektrické napětí mezi dvěma body znázorňovat? Orientovanou šipkou ve směru intenzity \vec{E} . Pak šipka bude udávat směr pohybu kladného náboje v elektrickém poli (viz obr. 4-8).

Obr. 4-7 K definici elektrické intenzity \vec{E} . Pak šipka bude udávat směr pohybu kladného náboje v elektrickém poli (viz obr. 4-8).

Dále se dohodneme, že čítecí šipku můžeme podle potřeby orientovat opačně, ale pak musíme také změnit znaménko u elektrického napětí.

Pro napětí U_{12} mezi body 1 a 2 v obr. 4-7 platí:

$$U_{12} = El_{12} = El_2 - El_1 = -El_1 + El_2, \text{ neboli}$$

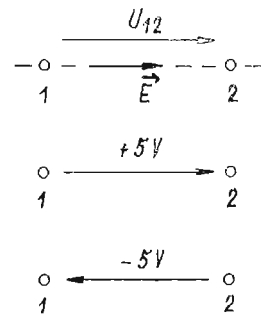
$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad [V] \quad (4-10a)$$

kde

$$\varphi_1 = -El_1 \text{ je potenciál v bodě 1}$$

$$\varphi_2 = -El_2 \text{ je potenciál v bodě 2}$$

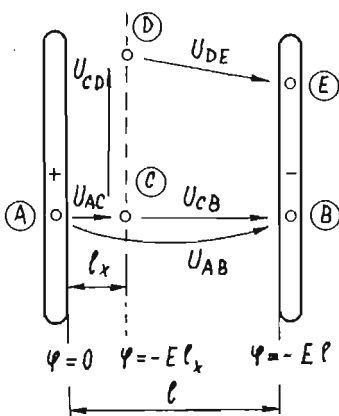
Jednotka potenciálu je opět 1 volt.



Obr. 4-8 Čítecí šipky napětí

Napětí mezi body 1 a 2 je rovno rozdílu potenciálů v bodě 1 a 2.

Př. 4-5 : Určete místa konstantního potenciálu na obr. 4-9.



Obr. 4-9 Napětí v homogenním elektrickém poli

Řešení : Potenciál daného bodu X je roven $\varphi_X = -El_X$, kde l_X je vzdálenost bodu od kladné elektrody. Proto bodou mít stejný potenciál všechny body, vzdálené od kladné elektrody na vzdálenost l_X . Plochy stejného potenciálu, v našem případě plochy rovnoběžné s elektrodami, se nazývají ekvipotenciální plochy. Jsou kolmé k elektrickým indukčním čarám.

Z obr. plyne, že :

a) napětí mezi libovolnými dvěma body na ekvipotenciální ploše je nulové :

$$U_{CD} = 0, U_{DE} = 0$$

b) napětí mezi dvěma libovolnými body dvou ekvipotenciálních ploch jsou stejná :

$$U_{CB} = U_{DE} = U_{CE} = U_{DB}$$

c) platí pravidlo pro sčítání napětí :

$$U_{AC} + U_{CB} = U_{AB}$$

d) napětí mezi libovolnými dvěma body můžeme počítat po libovolné dráze mezi těmito body. Vždy vyjde stejná hodnota, t.j. rozdíl potenciálů obou bodů :

$$\left. \begin{aligned} U_{AB} &= U_{AC} + U_{CB} \\ U_{AB} &= U_{AD} + U_{DB} \end{aligned} \right\} = \varphi_A - \varphi_B = 0 + E_1 = E_1 .$$

Poznámka : Potenciál v určitém bodě je číselně roven napětí mezi tímto bodem a tzv. referenčním bodem, kde $\varphi = 0$. V našem příkladu to byla kladná elektroda. Proto je potenciál $\varphi_1 = -E_1$ bodu 1 číselně roven práci $A = qE_1$, kterou je třeba vykonat při přenesení jednotkového náboje z referenčního bodu do bodu 1.

Slouží-li potenciál jen k výpočtu napětí mezi dvěma body, pak nezáleží na vlastní velikosti potenciálů, jen na jejich rozdílu. Proto si můžeme definovat nulový potenciál φ_0 v libovolném bodě. Obvykle se za referenční bod volí společná elektroda přístroje nebo zem, v teoretických úvahách pak nekonečno.

V obecném nehomogenním elektrickém poli pak platí obecnější vztahy

$$A = \int_{l_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \cdot U_{12} , \quad (4-11)$$

$$U_{12} = \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4-12)$$

Pole, které má tu vlastnost, že napětí mezi dvěma body nezávisí na křivce l_{12} a je rovno rozdílu potenciálů φ_1 a φ_2 , nazýváme konzervativní nebo potenciálové. K nejznámějším konzervativním polím patří pole gravitační a elektrostatické.

Př. 4-5 : Dvě rovnoběžné kovové desky o plochách $2 \times 1 \text{ m}^2$ jsou od sebe vzdáleny 1 cm. K deskám připojíme plochou baterii o napětí $U = 4,5 \text{ V}$. Vypočítejte : intenzitu elektrického pole mezi deskami, elektrickou indukci mezi deskami, náboj na deskách. Jakou práci musí vykonat baterie, aby elektron byl přemístěn ze záporné elektrody na kladnou ?

Řešení : $E = U/l = 4,5/10^{-2} = 450 \text{ V/m}$

$$D = \epsilon_0 E = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 450 = 3,984 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

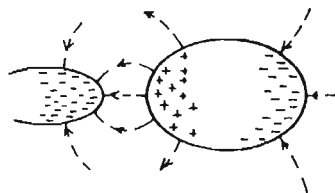
$$Q = DS = 3,984 \cdot 10^{-9} \cdot 1 = 3,984 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$A = qU = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 4,5 = 7,21 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Otázky k samostatnému studiu

- 4-9 Jak se určí práce, potřebná k přemístění elektrického náboje q v homogenním poli po siločáře o vzdálenost l ?
- 4-10 Co je to elektrické napětí mezi body 1 a 2 ? Jaká je jeho jednotka ? Jak se určí z práce A a z intenzity v homogenním elektrickém poli ?
- 4-11 Jakým směrem orientujeme číselní šipku napětí ? Je to skalár nebo vektor ?
- 4-12 Co je to elektrický potenciál v bodě ? Jaká je jeho jednotka ?
- 4-13 Jak se určí elektrické napětí mezi body 1 a 2 z elektrického potenciálu ?
- 4-14 Co je to ekvipotenciální plocha ? Jaké je napětí mezi dvěma body této plochy ?
- 4-15 Jaká je vzájemná poloha ekvipotenciální plochy a elektrické indukční čáry ?
- 4-16 Jaký tvar mají ekvipotenciální plochy v homogenním poli mezi dvěma rovnoběžnými nabitými deskami ?
- 4-17 Vysvětlíte, proč u nabitých vodivých těles sídlí elektrický náboj pouze na po-

- vrchu.
- 4-18 Popište, co se stane, připojíme-li k čelům kovového válečku zdroj elektrického napětí.
- 4-19 Popište, co se stane, připojíme-li k rovnoběžným kovovým elektrodám ve vzduchu zdroj elektrického napětí (baterii).
- 4-20 Přiblížíme-li elektricky nabitě těleso k tělesu elektricky neutrálnímu, dojde v nenabitě tělese k přeskupení nábojů podle obrázku. Kdyby se nám podařilo toto těleso rozdělit na dvě poloviny, pak levá polovina by obsahovala nadbytek kladných a pravá polovina nadbytek záporných nábojů. Vysvětlete tento jev, který se nazývá elektrostatická indukce.



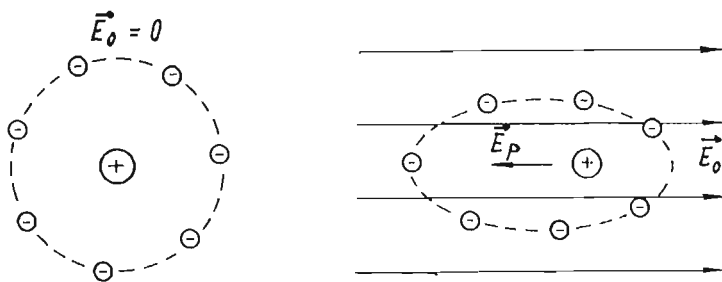
Příklady k procvičení

- 4-10 Jakou práci vykoná elektrické pole při přemístění elektronu mezi dvěma body o potenciálním rozdílu 1 V ?
Výsledek : $1,602 \cdot 10^{-19}$ J = 1 eV.
- 4-11 Jaké je napětí mezi deskami rovinného kondenzátoru, byla-li v prostoru mezi deskami zjištěna intenzita 1 kV/m ? Desky jsou vzdáleny od sebe 1 mm.
Výsledek : 1 V.
- 4-12 Dvě rovnoběžné kovové desky, vzdálené od sebe 1 mm, mají každá plochu $S = 100 \text{ cm}^2$. Jak velký elektrický náboj je třeba na ně nanést, aby bylo mezi nimi napětí 1 V ?
Výsledek : $8,854 \cdot 10^{-11}$ C.

4.2 ELEKTRICKÉ POLE V NEVODIČI

Kovy a jiné vodiče elektrického proudu obsahují volné elektricky nabitě částice (volné elektrony), které se mohou v materiálu volně pohybovat. Hovoříme o volných elektrických nábojích. Díky volnému náboji může dojít k vzniku elektrického proudu. Elektricky nevodivé látky se nazývají izolanty nebo dielektrika. Obsahují rovněž elektricky nabitě částice, ale ty jsou vázány v atomech a ty v molekulách, takže pohyb je možný jen v jistých malých mezích. U ideálního izolantu proto nemůže dojít k trvalému průtoku elektrického proudu.

Elektrické pole neutrálního atomu je již nepatrné v těsné blízkosti atomu, protože elektrony se velice rychle pohybují kolem jádra a kompenzují jeho kladný náboj. Vložíme-li atom do vnějšího elektrického pole, je taženo jádro ve směru pole, elektrony ve směru opačném. Atom se změnil v elektrický dipól, zdroj přidavného elektrického pole \vec{E}_p . Je, kdy v dielektriku dochází k prostorovému posunu kladných a záporných nábojů, nazýváme



Obr. 4-10 Deformace atomu ve vnějším elektrickém poli

dielektrickou polarizací. Protože přidavné pole \vec{E}_p působí v opačném směru než původní

pole \vec{E}_0 , je celkové elektrické pole v dielektriku slabší než ve vakuu : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$,
 $E < E_0$. Proto

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (4-13)$$

kde $\epsilon_r \geq 1$ je bezrozměrná konstanta. Udává, kolikrát je v dielektriku pole slabší než ve vakuu. Nazývá se poměrná (relativní) permitivita. Její hodnoty pro různé materiály najdete v Tab. 4-1.

Tab. 4-1 Poměrná permitivita různých materiálů

materiál	poměrná permitivita ϵ_r
vzduch	1,000585 (0°C)
vodík	1,000264 (0°C)
kondenzátorový papír	2,5 - 3
sklo	5 - 7,5
slída	6 - 7
porcelán	6,65
mramor	7 - 8
voda	81,1 (18°C)

Vektor intenzity $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$ tedy závisí na prostředí. Naproti tomu vektor elektrické indukce \vec{D} byl zaveden tak, aby na prostředí nezávisel :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Veličinu $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ [V/m] nazýváme absolutní permitivita prostředí (zkráceně permitivita).

ta).

Poznámka : Polarizace dielektrika se někdy popisuje tzv. vektorem polarizace \vec{P} , který je definován takto : $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$. Protože $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, je $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$. Ve vakuu a přibližně i ve vzduchu proto $\vec{P} = 0$.

Elektrická pevnost

Elektrická pevnost je odolnost dielektrika vůči elektrickému průrazu. Udáváme ji hodnotou intenzity elektrického pole v dielektriku, při které dojde k průrazu. Pro vzduch je přibližná hodnota (3 ÷ 4,5) kV/mm.

Otázky k samostatnému studiu

- 4-21 Vysvětlete princip dielektrické polarizace.
 4-22 Je intenzita elektrického pole v dielektriku větší nebo menší než ve vakuu ? Jak je to s elektrickou indukcí ? Napište vztah mezi \vec{D} a \vec{E} v dielektriku a ve vakuu.
 4-23 Co je to elektrická pevnost dielektrika ?

Příklady k procvičení

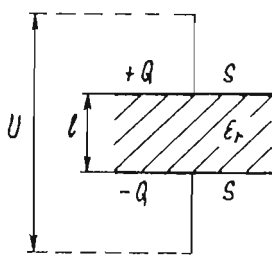
- 4-13 Do volného prostoru, v němž působí homogenní elektrické pole o intenzitě $E = 150$ V/m, bylo vloženo slídkové dielektrikum o $\epsilon_r = 6,5$. Vypočtete velikost indukce v daném místě před vložením dielektrika a D a E po vložení dielektrika. Výsledek : Před vložením $D = 1,33 \cdot 10^{-9}$ C/m². Po vložení $D = 1,33 \cdot 10^{-9}$ C/m², $E = 23,1$ V/m.
 4-14 Mezi deskami kondenzátoru je papír o $\epsilon_r = 2,55$. Desky mají plochu 100 cm², vzdálenost mezi nimi je 0,1 mm. K deskám byl připojen zdroj napětí o $U = 4,5$ V. Vypočtete intenzitu elektrického pole mezi deskami, indukci a náboj na deskách. Výsledek : $E = 4,5 \cdot 10^4$ V/m, $D = 1,02 \cdot 10^{-6}$ C/m², $Q = 1,02 \cdot 10^{-8}$ C.

4-15 Jak velký elektrický náboj je třeba přivést na rovnoběžné desky vzduchového kondenzátoru, aby došlo k elektrickému průrazu vzduchu? Každá deska má plochu 10×10 cm, vzájemná vzdálenost mezi nimi je 1 mm. Elektrická pevnost vzduchu je 4,5 kV/mm.
Výsledek : $3,98 \cdot 10^{-7}$ C.

4.3 KONDEZNÁTOR, KAPACITOR

Rovnoběžné desky, mezi nimiž je obecné dielektrikum, nazýváme rovinný kondenzátor. Jeho základní vlastnost - kapacitu si objasníme na příkladu.

Př. 4-7 : Vypočtete obecný vztah mezi napětím U a nábojem Q na elektrodách rovinného kondenzátoru.



Obr. 4-11

Řešení : $Q = DS = \epsilon ES = \epsilon S \frac{U}{l}$

$Q = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{l} U$, neboli

$Q = C \cdot U$. (4-14)

C je konstanta, závislá na provedení kondenzátoru a nazývá se kapacita kondenzátoru. Vypočte se z jeho rozměrů a ϵ_r dielektrika :

$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{l}$ [F] (4-15)

Jednotkou kapacity je 1 farad [F] .

Vztah mezi nábojem a napětím $Q = CU$ platí pro libovolný kondenzátor, nejen rovinný. Výpočet kapacity je však u složitějších kondenzátorů (např. válcového, kulového ...) obtížnější.

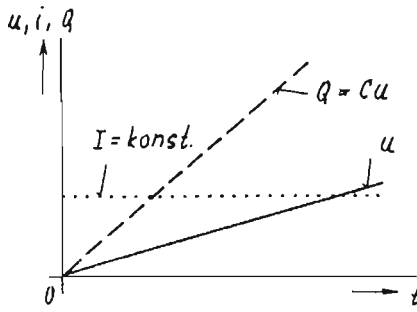
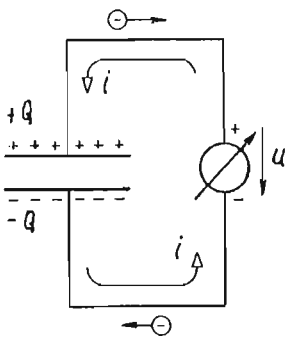
Kondenzátor je tedy součástka, skládající se zpravidla z dvou elektrod, mezi nimiž je dielektrikum. Základní vlastností kondenzátoru je kapacita, která udává, jakým nábojem je nutno nabít desky, aby mezi nimi vzniklo napětí 1 V.

Protože mezi elektrodami je nevodič, nemají volné náboje na elektrodách možnost přecházet na opačné elektrody. V praxi tomu tak není, protože v každém dielektriku se nachází menší či větší množství volných nábojů, které zprostředkovávají mezi deskami elektrický proud. Kondenzátor má tedy ve skutečnosti kromě kapacity ještě jiné vlastnosti, většinou nežádoucí, jako např. svodový proud. Ideální kondenzátor, jehož jediným elektrickým parametrem je kapacita, nazýváme kapacitorem.

Jednotka kapacity 1 farad je příliš velká. Proto se v praxi používají menší jednotky : 1 pF = 10^{-12} F (pikofarad), 1 nF = 10^{-9} F (nanofarad), 1 μ F = 10^{-6} F (mikrofarad).

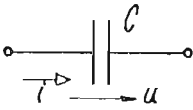
Vztah mezi napětím a proudem kapacitoru

Víme, že mezi elektrodami kapacitoru je izolant, kterým nemůže protékat elektrický proud. Přesto hovoříme o elektrickém proudu kapacitorem. Jak vysvětlit tento rozpor ?



Obr. 4-12 Nabíjení kapacitoru konstantním proudem

lu a odtamtud jsou odpuzovány na spodní elektrodu. Tam se hromadí záporný náboj $-Q$, kdežto na horní elektrodě je ho nedostatek, je tam tedy celkově kladný náboj $+Q$.



Obr. 4-13 Schématická značka kapacitoru

V obvodu tedy teče elektrický proud

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} \Rightarrow$$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

(4-16)

Směry čítacích šipek na obr. 4-13 odpovídají spotřebičové orientaci. Z vzorce je vidět, že :

- a) při $U = \text{konstantní}$: $i = C$ (kapacitor nepropouští proud při konstantním napětí)
- b) při u lineárně rostoucím je $I = \text{konst.}$ (viz obr. 4-12).

Otázky k samostatnému studiu

- 4-24 Jaký je rozdíl mezi pojmy kapacitor a kondenzátor ?
- 4-25 Mezi elektrodami kapacitoru je izolant. Přesto může přívody k elektrodám téct elektrický proud. Vysvětlete proč.
- 4-26 Jak se vypočte náboj na elektrodách kapacitoru z napětí na nich ?
- 4-27 Jaký je vztah mezi proudem a napětím na kapacitoru ?

Příklady k procvičení

- 4-16 Do vybitého kapacitoru o kapacitě $1 \mu\text{F}$ tekla po dobu $0,1 \text{ s}$ proud 1 mA . Na jaké napětí se kapacitor nabítl ?
Výsledek : 100 V .
- 4-17 Na kapacitoru o $C = 1 \text{ nF}$ bylo naměřeno napětí 5 V . Jaký je náboj na elektrodách ?
Výsledek : $5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.
- 4-18 Kapacitor je nabit na napětí 10 V . Připojíme k němu spotřebič, který odebírá trvale proud $10 \mu\text{A}$. Za půl minuty klesne napětí kapacitoru na nulu. Jak velká je jeho kapacita ?
Výsledek : $30 \mu\text{F}$.
- 4-19 Kapacitor byl nabíjen proudem 1 mA po dobu 1 minuty . Jak dlouho pak můžeme z kapacitoru odebírat proud 5 mA ? Jak velký náboj je akumulován v kapacitoru ?
Výsledek : 12 s ; $6 \cdot 10^{-2} \text{ C}$.
- 4-20 Určete průběh proudu kapacitorem o $C = 1 \mu\text{F}$ při $u_C(t) = 10 \sin(314t)$ voltů.
Výsledek : $i_C(t) = 3,14 \cos(314t)$ miliampér.

Energie kapacitoru

V předešlé kapitole jsme poznali jeden ze způsobů nabíjení kapacitoru z proměnného zdroje napětí. Při nabíjení musí zdroj napětí přečerpávat elektrony z jedné elektrody na druhou přes potenciální rozdíl, který pořád roste. K přemístění náboje do místa o jiném potenciálu je však třeba vykonat práci. Zdroj tedy koná práci, která se hromadí v kapacitoru ve formě jeho energie. Energie nabitého kapacitoru je dána vzorcem

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4-17)$$

Energie akumulovaná v kapacitoru je tedy jednoznačně určena jeho kapacitou a napětím mezi elektrodami.

Př. 4-8 : Kondenzátor je nabit na napětí 311 V. Jaká musí být jeho kapacita, aby byl schopen po dobu 1 s napájet 40 W žárovku ?

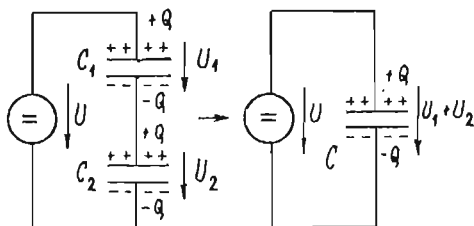
Řešení : Při napájení 40 W žárovky po dobu 1 s se spotřebuje energie
 $W = \text{výkon} \times \text{čas} = 40 \times 1 = 40 \text{ J}$.

$$\text{Kapacita vychází } C = \frac{2W}{U^2} = \frac{2 \cdot 40}{311^2} = 827 \text{ } \mu\text{F}$$

Poznámka : Ukažte, proč je řešení jen přibližné.

Spojování kapacitorů

a) Sériové spojení



Na elektrodách, připojených ke zdroji napětí, je náboj \$+Q\$ a \$-Q\$. Na ostatních elektrodách se vytvoří opačné náboje vlivem elektrostatické indukce. Platí :

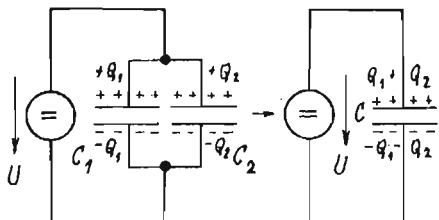
$$U_1 = Q/C_1 \quad U = U_1 + U_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$U_2 = Q/C_2$$

Celková kapacita \$C = Q/U\$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4-18)$$

b) Paralelní spojení



Na obou kapacitorech je stejné napětí, neboli

$$Q_1 = C_1 U$$

$$Q_2 = C_2 U$$

$$\text{Celková kapacita } C = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{(C_1 + C_2)U}{U}$$

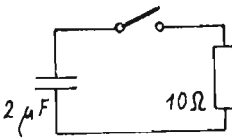
$$C = C_1 + C_2 \quad (4-19)$$

Otázky k samostatnému studiu

- 4-28 Jak se vypočte energie akumulovaná v kapacitoru ?
4-29 Jak se dostala energie W do nabitého kapacitoru ?
4-30 V jakou formu se přemění energie elektrického pole v kapacitoru, když kapacitor vybijeme připojením odporového drátu ?
4-31 Jak se určí celková kapacita dvou sériově a paralelně zapojených kapacitorů ?
4-32 Je na deskách sériově zapojených kapacitorů vždy stejně velký náboj nebo napětí ?
4-33 Je na deskách paralelně zapojených kapacitorů vždy stejně velký náboj nebo napětí ?

Příklady k procvičení

- 4-21 Kapacitor o $C = 1 \mu\text{F}$ je nabit na napětí $U = 10 \text{ V}$. Jaká je energie akumulovaná v kapacitoru ?
Výsledek : $5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$.

- 4-22  Po sepnutí spínače se kapacitor vybil přes rezistor a předal mu tak energii $3,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$, která se přeměnila v teplo. Určete počáteční napětí na kapacitoru.
Výsledek : 60 V .

- 4-23 Kapacitor o $C_1 = 10 \mu\text{F}$ byl nabit na napětí $U = 1 \text{ V}$ proudem 1 A . Kapacitor o $C_2 = 10 \mu\text{F}$ byl nabit na napětí $U = 1 \text{ V}$ proudem 2 A . Jak dlouho trvalo nabíjení C_1 a C_2 ?
Výsledek : $t_1 = 10 \mu\text{s}$, $t_2 = 5 \mu\text{s}$.

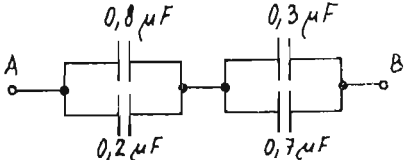
- 4-24 Který z kapacitorů C_1 a C_2 z př. 4-23 má větší energii ? Závísí velikost energie na způsobu nabíjení, nebo jen na konečné hodnotě napětí ?
Výsledek : $W_1 = W_2$.

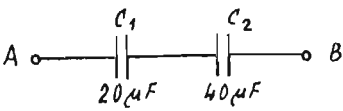
- 4-25 Kapacitor o $C = 1 \mu\text{F}$ je nabit na napětí $U = 1 \text{ V}$. Připojíme k němu nenabitý kapacitor stejné kapacity. Vypočítejte výsledné napětí na kapacitorech, původní energii na kapacitorech a výslednou energii. Ověřte, že výsledná energie je menší než původní. Kam se poděl rozdíl ?
Výsledek : $0,5 \text{ V}$; $W_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$, $W_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

- 4-26 Jak se určí celková kapacita sériově řazených kapacitorů $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$?
Výsledek : $5 \mu\text{F}$.

- 4-27 Dva sériově řazené kapacitory $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$ jsou připojeny k stejnosměrnému zdroji $U = 10 \text{ V}$. Jaké je napětí na C_1 a C_2 , a náboj na C_1 a C_2 ?
Výsledek : $U_1 = U_2 = 5 \text{ V}$, $Q_1 = Q_2 = 50 \mu\text{C}$.

- 4-28 Dva paralelně řazené kapacitory $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$ jsou připojeny k stejnosměrnému zdroji $U = 10 \text{ V}$. Jaké je napětí na C_1 a C_2 a náboj na C_1 a C_2 ?
Výsledek : $U_1 = U_2 = 10 \text{ V}$, $Q_1 = Q_2 = 100 \mu\text{C}$.

- 4-29  Mezi svorky A-B je připojeno napětí 100 V . Určete náboje na všech kapacitorech.
Výsledek : $Q_{0,8} = 40 \mu\text{C}$, $Q_{0,3} = 15 \mu\text{C}$,
 $Q_{0,2} = 10 \mu\text{C}$, $Q_{0,7} = 35 \mu\text{C}$.

- 4-30  Mezi svorky A-B připojíme baterii o napětí 50 V . Baterii odpojíme a svorky A-B zkratujeme. Jaký bude konečný náboj na C_1 a C_2 ?
Výsledek : $Q_1 = Q_2 = 0$.

5 MAGNETICKÉ POLE. INDUKTOR. MAGNETICKÉ OBVODY

Magnetické pole je důležitým projevem činnosti mnoha elektrických obvodů. Využívá se jak v samotných elektrických obvodech (cívka, transformátor), tak i v převodu elektrické energie na energii mechanickou (elektrické motory, relé, reproduktory) či opačně (alternátory, dynama, mikrofony). Mimoto existuje mnoho dalších aplikací.

Kapitola je rozdělena na tyto části :

5.1 MAGNETICKÉ POLE

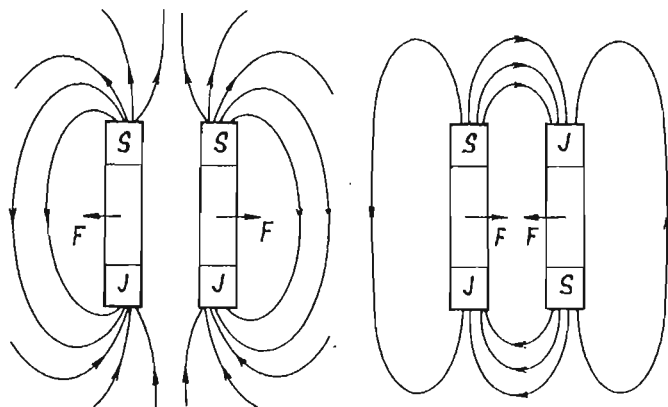
Zdroje magnetického pole. Popis magnetického pole. Magnetické vlastnosti látek. Silové působení magnetického pole. Induktor. Energie magnetického pole.

5.2 MAGNETICKÉ OBVODY

Řešení pomocí analogie s elektrickými obvody. Řešení lineárních a nelineárních magnetických obvodů.

5.1 MAGNETICKÉ POLE

Působení magnetického pole je všeobecně známé z příkladu působení dvou permanentních magnetů, jak je to ukázáno na obr. 5-1. Magnet má dva póly (obdobně jako elektrický dipól), označené S a J podle analogie s magnetickým působením Země.



Magnetické pole vyjadřujeme pomocí magnetických siločar (obdobně jako elektrických siločar). Vzájemné působení dvou magnetů je obdobně jako vzájemné působení dvou elektrických nábojů : souhlasné póly se odpuzují a opačné se přitahují (obr.5-1).

Zdroje magnetického pole.

Obr. 5-1 Vzájemné působení magnetů

Z praxe běžně známe dva zdroje magnetického pole :

- permanentní magnet (jak bylo ukázáno v předešlém)
- cívka, kterou protéká elektrický proud (viz obr. 5-2).

Důležitá je tato otázka : Co vytváří magnetické pole ?

- U cívky je příčina zřejmá : elektrický proud = pohyb elektrických nábojů.
- U permanentního magnetu vzniká dojem, že je složen z magnetických nábojů. Když jej rozdělíme, získáme menší díly opět s magnetickými vlastnostmi. V tomto dělení můžeme pokračovat až po atomy. Zde dospíváme k tomu, že atomy obsahují pohybující se elektrony, způsobující jejich elementární magnetické pole, takže je můžeme chápat jako ma-

lé elementární magnety. Podstatný závěr je, že i v tomto případě je zdrojem magnetického pole pohyb elektronů.

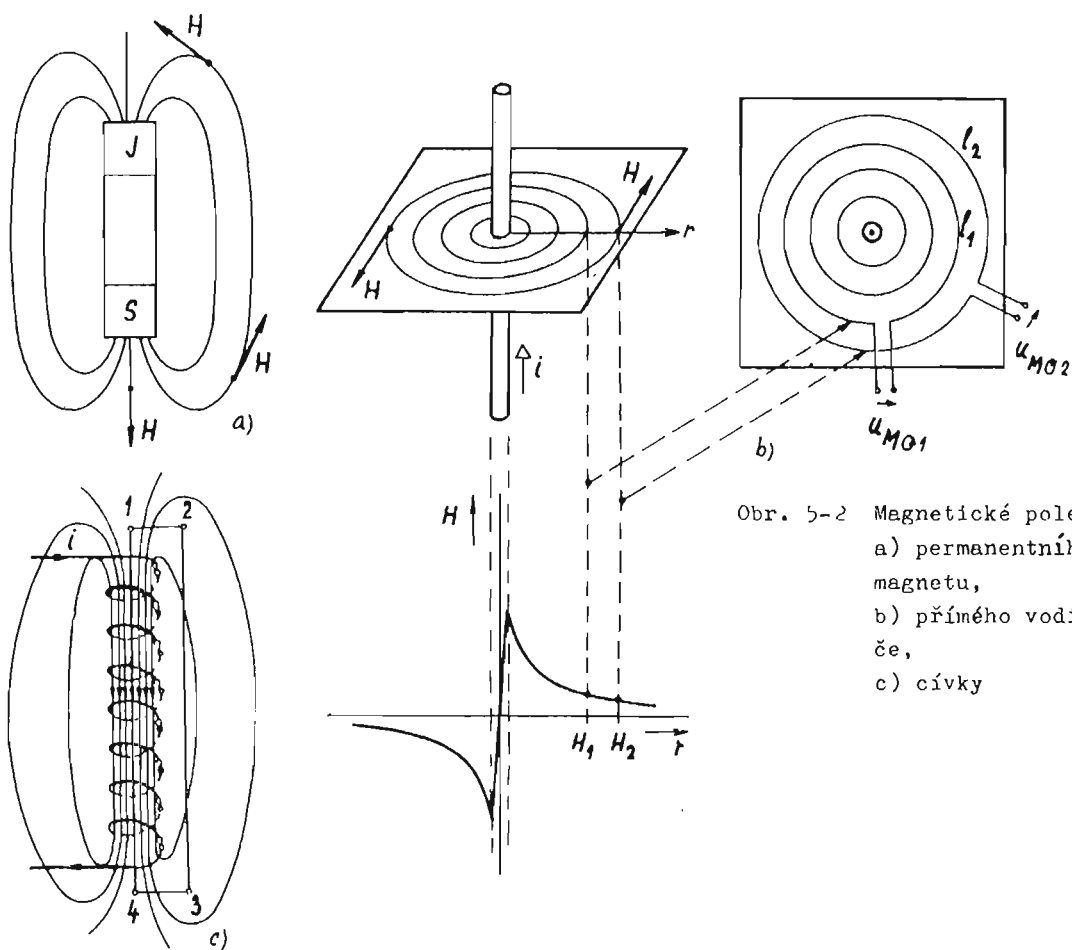
Podle stavby atomů, molekul a krystalů lze látky rozdělit do tří skupin :

- a) látky, jejichž atomy nevykazují magnetické pole,
- b) látky, jejichž atomy vykazují magnetické pole, ale jednotlivé elementární magnety působí neuspořádaně (lze je uspořádat působením vnějšího magnetického pole),
- c) látky, jejichž elementární magnety jsou uspořádány shodným směrem, takže celé těleso se jeví jako permanentní magnet.

Podrobně si tyto vlastnosti ukážeme později.

Popis magnetického pole

Podle tvaru a množství magnetických siločar lze soudit, že magnetické pole má různou velikost a směr, což vyjadřujeme pojmem intenzita magnetického pole H . Její základní jednotka je ampér na metr [A/m]. Intenzita magnetického pole je analogická intenzitě elektrického pole E . Na obr. 5-2a je magnetické pole permanentního magnetu, na obr. 5-2b je magnetické pole jednoho vodiče a na obr. 5-2c magnetické pole vodiče navinutého do cívky s N závitů. Na obrázku magnetického pole vodiče je



Obr. 5-2 Magnetické pole
 a) permanentního magnetu,
 b) přímého vodiče,
 c) cívky

ukázáno tzv. magnetické oběhové napětí u_{M0} , které je definováno takto :

$$u_{M0} = \int_{\lambda} \vec{H} \cdot d\vec{P} = Hl. \quad (5-1)$$

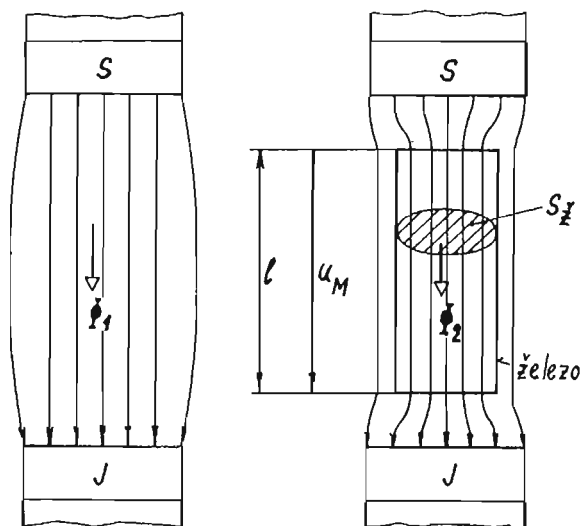
V prvním případě je délka křivky l_1 kratší a tomu odpovídá vyšší hodnota H_1 , v druhém případě je naopak delší l_2 a nižší hodnota H_2 . Lze dojít k závěru, že

$$u_{M01} = u_{M02} = H_1 l_1 = H_2 l_2 = i. \quad [A] \quad (5-2)$$

Magnetické oběhové napětí po uzavřené křivce kolem jednoho vodiče je dáno hodnotou proudu vodičem. V případě cívky (obr. 5-2c) se v magnetickém oběhovém napětí po dráze 1, 2, 3, 4, 1 sčítá od všech N závitů cívky, takže zde je

$$u_{M0} = N \cdot i. \quad [A] \quad (5-3)$$

Magnetické napětí mezi dvěma magnety (obr. 5-3) zřejmě vyvolává různé účinky podle prostředí (látky), kde působí. Toto působení nazýváme magnetický indukční tok Φ . Jednotkou je 1 weber [Wb]. Lze jej přirovnat k elektrickému indukčnímu toku Ψ .



Nejde tedy o tok magnetických nábojů, ty neexistují. V případě působení na vzduch (obr. 5-3a) je magnetický indukční tok Φ_1 zřejmě menší než v případě, kdy mezi póly magnetu umístíme železnou tyč (obr. 5-3b). Železo je lepším "magnetickým vodičem" než vzduch. Vztah mezi magnetickým napětím u_M a magnetickým indukčním tokem Φ lze vyjádřit

$$\Phi = G_M u_M \quad [Wb], \quad (5-4)$$

kde G_M vyjadřuje magnetickou vodivost prostředí. Její velikost lze určit pomocí rozměrů magnetického obvodu

$$G_M = \mu \frac{S}{l} \quad [H], \quad (5-5)$$

kde S je průřez a l délka železné tyče. Konstanta μ vyjadřuje měrnou magnetickou vodivost materiálu. Jednotka magnetické vodivosti je 1 henry [H]. Závislost (5-5) je obdobná jako u elektrické vodivosti. Obdobně jako elektrický odpor lze vyjádřit magnetický odpor R_M :

$$R_M = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} = \frac{1}{G_M} \quad [1/H] \quad (5-6)$$

Měrná magnetická vodivost μ je označována jako permeabilita a podrobněji se jí budeme zabývat v dalším textu.

Měrné veličiny magnetického pole (vztahované na jednotky rozměrů)

V předešlém textu jsme poznali, že intenzitu magnetického pole H si můžeme vyjádřit jako magnetické napětí u_M vztahované na délku

$$H = \frac{u_M}{l} \quad [A/m] \quad (5-7)$$

Obdobně můžeme vyjádřit magnetickou indukci B (obdoba elektrické indukce D) jako magnetický indukční tok, vztažený na plochu S :

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad [\text{Wb/m}^2] = [\text{T}] \quad (5-8)$$

Jednotkou magnetické indukce je 1 tesla $[\text{T}]$. Vztah mezi měrnou magnetickou vodivostí - permeabilitou a magnetickou vodivostí pak je dán vztahem (5-4), kde po dosazení dostaneme

$$G_M = \frac{\Phi}{u_M} = \frac{B \cdot S}{H \cdot l} = \mu \cdot \frac{S}{l} \quad (5-9)$$

Z toho pak vyplývá převod vztahu (5-4) do normovaného tvaru

$$\mu = \frac{B}{H} \quad , \quad B = \mu H \quad (5-10)$$

kteřý vyjadřuje velikost magnetické indukce, vyvolané intenzitou magnetického pole v prostředí s permeabilitou μ bez ohledu na rozměry prostředí, v němž pole působí.

Vlastnosti látek v magnetickém poli

Jak je z předchozího vztahu zřejmé, vyjadřuje permeabilita μ vlastnost prostředí z hlediska magnetické vodivosti v magnetickém poli. Tuto permeabilitu lze vyjádřit součinem

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (5-11)$$

kde μ_0 je permeabilita vakua (a vzduchu) a má hodnotu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. μ_r je pak relativní permeabilita látky a vyjadřuje, kolikrát látka zvětší hodnotu magnetické indukce B při působení intenzity magnetického pole H oproti působení ve vakuu.

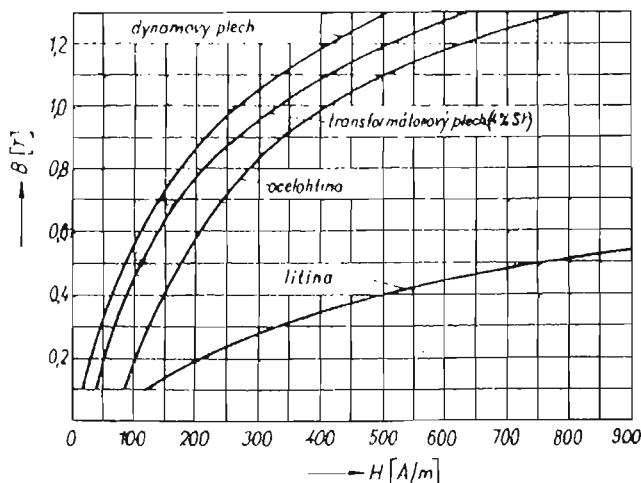
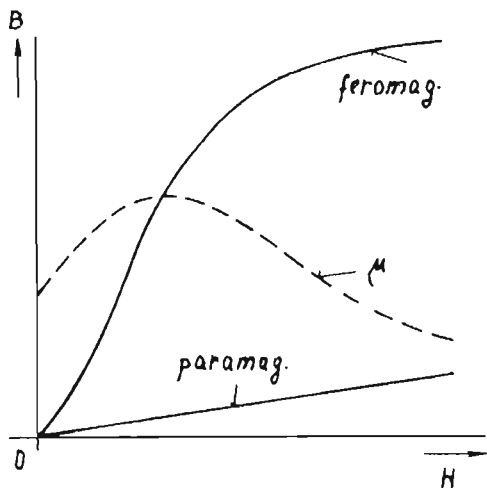
Látky lze pak podle hodnoty relativní permeability rozdělit na

- diamagnetické ($\mu_r < 1$), které snižují magnetickou indukci vlivem elektrického proudu vyvolaného v látce
- nemagnetické ($\mu_r = 1$), jako vakuum, vzduch apod.
- paramagnetické ($\mu_r > 1$), které magnetickou indukci slabě zvyšují
- feromagnetické ($\mu_r \gg 1$), které magnetickou indukci podstatně zvyšují; hodnota μ_r bývá v rozmezí 100 - 10 000 (např. u slitin železa)

Vlastnosti feromagnetických látek. Tyto látky jsou pro praxi velmi důležité. Vyrábí se z nich většina magnetických obvodů (transformátory, elektrické motory, alternátory a dynama, relé atd.). Na rozdíl od ostatních látek se u nich projevují mimo vysoké hodnoty μ_r dvě zvláštnosti - nelinearita a hystereze.

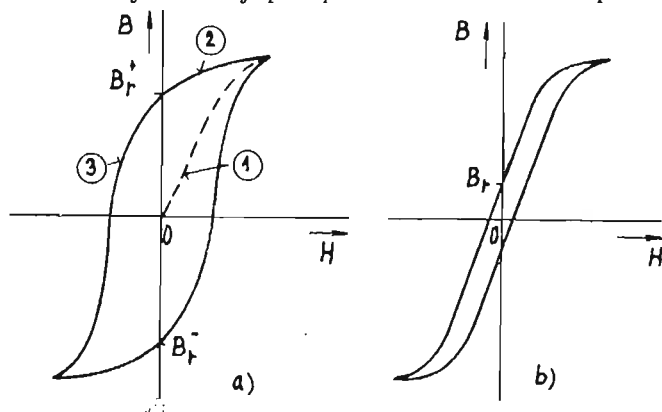
Nelinearitu feromagnetických látek vystihuje závislost $B = f(H)$. Tato závislost na rozdíl od jiných látek není lineární, takže hodnota permeability není konstantní, jak je zřejmé z obr. 5-1a. Typické příklady těchto závislostí pro některé feromagnetické materiály jsou na obr. 5-4b. Je zřejmé, že při požadavku linearitu feromagnetického materiálu musí být magnetická indukce nižší než asi 0,3 T. Pro energetické účely (např. výkonové transformátory a motory) lze používat tyto materiály i v nelineární oblasti. Běžně se využívá hodnot magnetické indukce kolem 1 T.

Hystereze feromagnetických látek se projevuje u tzv. magneticky tvrdých materiálů. Vlastnosti těchto materiálů jsou ukázány na obr. 5-5a. Závislost $B = f(H)$ závisí na předchozím stavu. Zpočátku při zvyšování H se zvyšuje B podle křivky ①.



Obr. 5-4 Závislosti $B = f(H)$ feromagnetických látek

Při snižování H zpět na nulu (křivka ②) zůstane magnetická indukce B_r (remanentní magnetismus), což je vlastně permanentní magnet. Při opačném působení H lze snížit tuto B_r na nulu (křivka ③) a dalším zvyšováním dosáhnout B_{max} s opačnou hodnotou. Symetricky pak probíhá snižování záporného H a jeho zvyšování do kladných hodnot.



Obr. 5-5 Hystereze mag. tvrdých a mag. měkkých materiálů

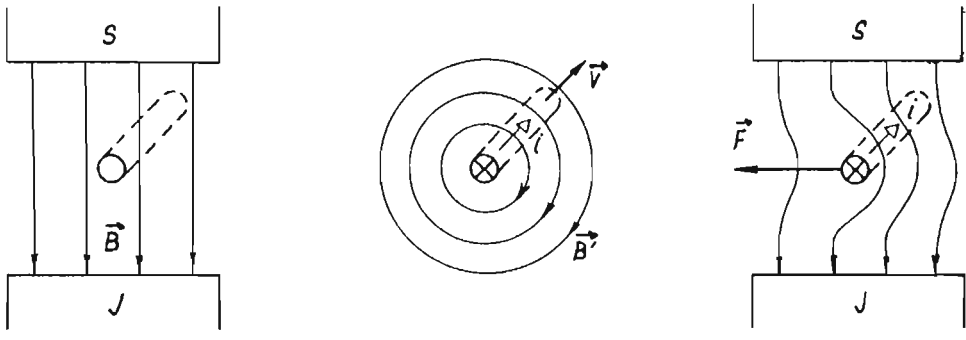
Jak je zřejmé, jde vlastně o vytváření permanenčních magnetů. Vlastnosti zapamatování předchozího směru proudu i (odpovídající H) v hodnotě B_r se dříve využívalo v tzv. feritových pamětech. Na obr. 5-5b je závislost $B = f(H)$ pro magneticky měkké materiály. Jejich zbytkový magnetismus B_r je malý, ale je pozorovatelný. Běžně se nevyjadřuje a kreslí se pouze magneti-

zační křivky jako v obr. 5-4.

Sílové působení magnetického pole

Nejjednodušeji lze vyjádřit sílové působení magnetického pole na vodič, protékající elektrickým proudem, nebo na samotný pohybující se elektron v magnetickém poli. Jak je zřejmé z obr. 5-6, součtem magnetického pole o indukci \vec{B} a magnetického pole vodiče (pohybujícího se elektronu) dostaneme nesymetrické pole, kde na jedné straně dochází k součtu a na druhé straně k rozdílu polí. V důsledku toho vzniká magnetická síla

$$\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5-12)$$



Obr. 5-6 Silové působení na vodič s proudem i v magnetickém poli

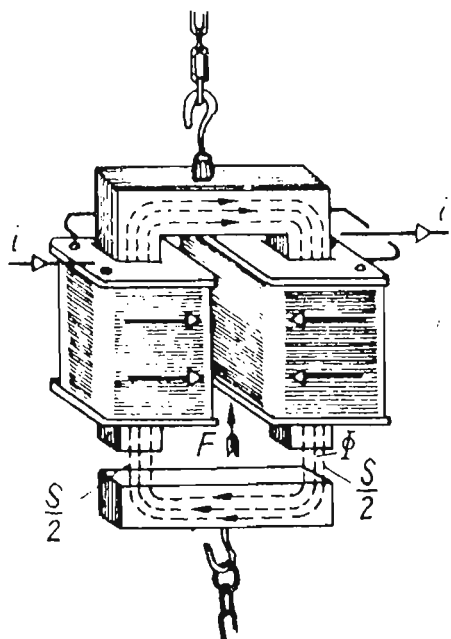
Vzhledem k vektorovému součinu vektorů rychlosti a magnetické indukce má síla směr kolmý k oběma vektorům.

Při působení dvou magnetických polí např. od permanentních magnetů či dvou cívek je výpočet síly dosti komplikovaný vzhledem k tvaru polí. Při určitém zjednodušení lze vyjádřit sílu působící v elektromagnetu, který je znázorněn na obr. 5-7. Zde platí

$$F_M = \frac{B^2 S}{2\mu_0 \mu_r} \quad [N; T, m^2] \quad (5-13)$$

a pro sílu ve vzduchové vrstvě mezi jádrem magnetu a kotvou pak platí

$$F = 40 B^2 S \quad [N; T, cm^2] \quad (5-14)$$



Obr. 5-7 Elektromagnet

Induktor

Induktor je idealizovaná cívka, která působí jako převodník mezi elektrickým a magnetickým polem či mezi elektrickým a magnetickým obvodem. K vysvětlení funkce cívky

je potřebné definovat spjatý magnetický indukční tok Φ_Σ .

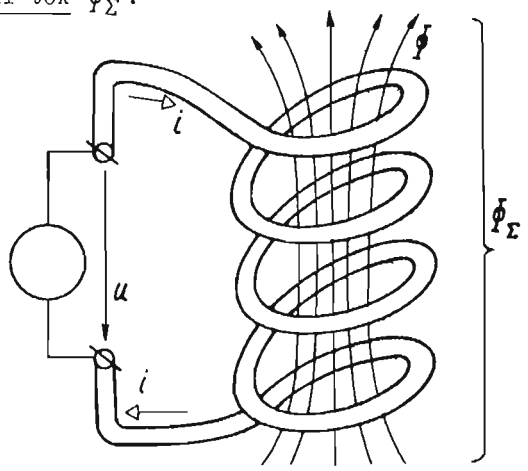
Jak je zřejmé z obr. 5-8, lze celkovou plochu cívky, kterou prochází magnetický indukční tok Φ vyjádřit jako N ploch každého závitů. Pak lze vyjádřit spjatý tok

$$\Phi_\Sigma = \sum_{k=1}^N \Phi_k \quad (5-15)$$

Zanedbáme-li rozptyl magnetického toku (celý Φ prochází všemi závitů), pak

$$\Phi_\Sigma = N \Phi \quad (5-16)$$

Induktor si můžeme představit jako převodník elektrického pole na magnetické vzhledem k tomu, že spjatý magnetický tok Φ_Σ je funkcí



Obr. 5-8

elektrického proudu i . Pro lineární induktor platí závislost

$$\Phi_{\Sigma} = L i, \quad (5-17)$$

kde konstantu L nazýváme indukčnost. Můžeme ji definovat vztahem

$$L = \frac{\Phi_{\Sigma}}{i} \quad [H]. \quad (5-18)$$

Jednotkou indukčnosti je 1 henry [H].

U nelineárních induktorů je závislost $\Phi = f(i)$ nelineární a hodnota L se mění v závislosti na i .

Na základě vztahů (5-17) a (5-4) při zjednodušení (5-16) lze odvodit vztah pro indukčnost cívky bez magnetic-
kého rozptylu :

$$L i = N \Phi = N \frac{u_M}{R_M} = N \frac{N i}{R_M}. \text{ Z toho plyne}$$

$$L = \frac{N^2}{R_M} = N^2 G_M, \quad (5-19)$$

kde G_M je magnetický odpor jádra cívky.

Při výpočtu indukčnosti vzduchových cívek, kde je poměrně velký rozptyl magnetického pole a neplatí podmínka (5-16), je vztah pro indukčnost poměrně složitý a závisí mimo počtu závitů též na rozměrech cívky.

Induktor je též převodník magnetického pole na elektrické. Na obr. 5-10a je

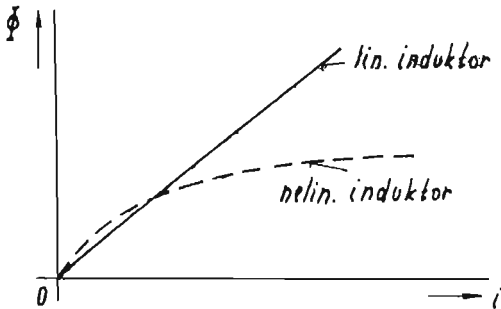
znázorněn případ, kdy v cívce měníme velikost Φ změnou polohy magnetu. Indukované napětí má hodnotu

$$u_i = - \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt}. \quad (5-20)$$

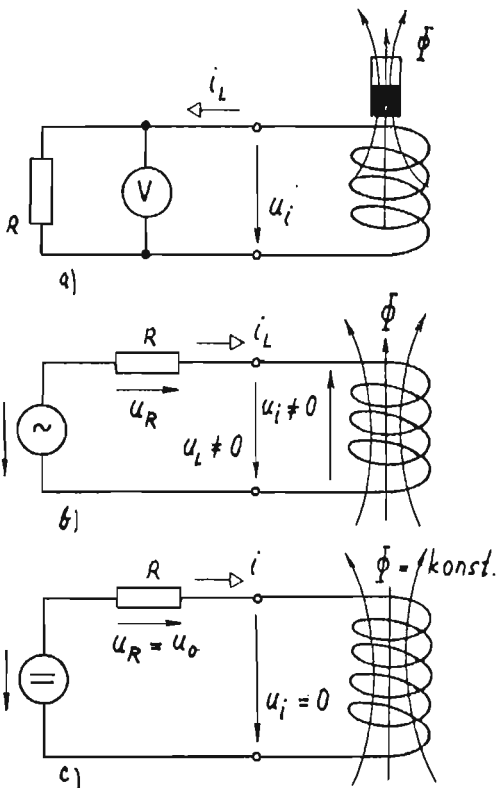
Tuto změnu magnetického indukčního toku můžeme též vyvolat otáčením cívky v magnetickém poli (alternátor) nebo změnou magnetického pole jiné cívky, v níž měníme elektrický proud (transformátor). Tento jev je nazýván elektromagnetická indukce. Dále lze zjistit i vlastní indukci cívky. Průchodem vlastního proudu cívkou je vytvářen vlastní indukční tok Φ_{Σ} , jehož změna zpětně vyvolává indukované napětí na svorkách cívky. Pak platí

$$u_L = -u_i = \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = L \frac{di_L}{dt}. \quad (5-21)$$

Je tedy zřejmé, že v induktoru je změnou magnetického toku Φ_{Σ} indukované napětí, které působí proti změně proudu, vyvolávající změnu magnetického toku. Proto při působení konstant-



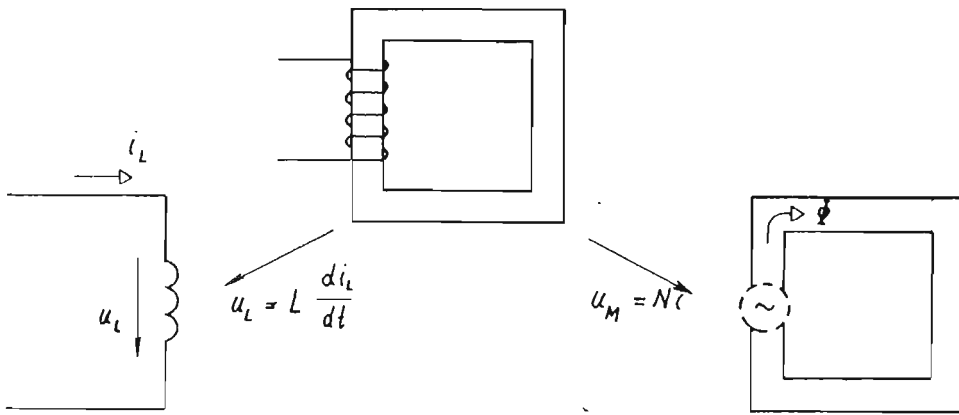
Obr. 5-9



Obr.5-10 Indukce a vlastní indukce

ního proudu na induktor je jeho indukované napětí nulové, jak je to ukázáno na obr.5-10c.

Induktor si lze tedy představit dvěma způsoby, a to jako prvek elektrického



Obr. 5-11 Vyjádření induktoru v elektrickém a v magnetickém obvodu

obvodu a jako zdroj magnetického napětí v magnetickém obvodu (viz obr.5-11).

Sériové a paralelní spojování induktorů. Podobně jako rezistory a kapacitory lze i induktory spojovat a takto spojené induktory nahrazovat podle principu ekvivalence. Při sériovém spojení dvou induktorů lze ekvivalentní indukčnost vyjádřit takto :

Podle 1. KZ platí
$$i_L = i_{L1} = i_{L2} .$$

Podle 2. KZ pak
$$u_L = u_{L1} + u_{L2} .$$

Dosazením vztahu (5-21) pro každý induktor získáme rovnici

$$L \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} ,$$

kde po vykrácení derivace proudu získáme vztah

$$L = L_1 + L_2 . \quad (5-22)$$

Při paralelním spojení dvou induktorů můžeme napsat 1. KZ ve tvaru

$$i_L = i_{L1} + i_{L2}$$

a 2. KZ ve tvaru

$$u_L = u_{L1} = u_{L2} .$$

Převědeme-li diferenciální vztah (5-21) na integrální, dostaneme

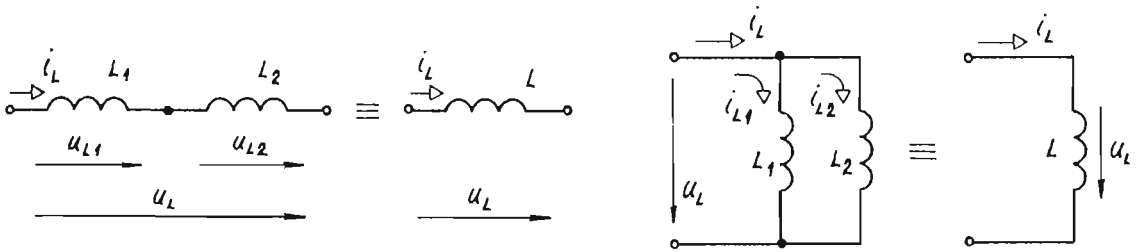
$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt . \quad (5-23)$$

Po dosazení pro každý z induktorů do rovnice 1. KZ máme

$$\frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L_1} \int u_L dt + \frac{1}{L_2} \int u_L dt .$$

Po vykrácení shodných integrálů napětí induktorů vyjde

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} . \quad (5-24)$$



Obr. 5-12 Sériové a paralelní spojení induktorů

Je tedy zřejmé, že pravidla pro sériové a paralelní spojování induktorů jsou obdobná jako pravidla pro spojování rezistorů.

Magnetická energie cívky.

Jak jsme si již ukázali, mění cívka elektrickou energii na magnetickou (při průchodu el. proudem i vytvoří mag. tok Φ) a naopak při změně magnetické energie (změnou Φ) se indukuje el. napětí, schopné odevzdávat elektrickou energii. Tyto přeměny energie si ukažeme na příkladu elektrického obvodu na obr.5-13a. Cívka je v čase t_0 připojena přepínačem přes R_1 k zdroji napětí U_0 . V čase t_2 je pak přepnuta přímo k rezistoru R_2 . Časové průběhy proudu i_L , napětí u_L a magnetického toku Φ jsou na obr.5-13b. Přitom hodnota Φ je úměrná hodnotě magnetické energie W_M . Na obr.5-13c je pak časový průběh výkonu na cívce. Po přepnutí přepínače v čase t_0 se bude zřejmě zvyšovat hodnota proudu, ale ne skokem, protože změna proudu indukuje napětí působící proti změně proudu. V té době odebírá cívka elektrický výkon a energii, protože $p(t) = u(t) i(t)$. V čase t_1 klesne u_L na nulu a i_L bude konstantní. Cívka přestala odebírat výkon a hodnota Φ a W_M se již nezvyšuje. V této době má cívka energii

$$W_M = \frac{L i^2}{2} \quad (5-25)$$

Obr. 5-13 K vysvětlení magnetické energie cívky

Veškerý výkon, dodávaný zdrojem, se dále mění na R_1 v teplo. Po přepnutí cívky na rezistor R_2 již

není v obvodu cívky zdroj k udržení hodnoty elektrického proudu. Proud má proto tendenci klesnout na nulu. Tato změna i vyvolává změnu Φ a to indukuje napětí, působící proti změně proudu. Proud proto neklesá k nule okamžitě. Proto má indukované napětí cívky opačný směr a při dosavadním směru proudu cívka tentokrát do rezistoru R_p . Tato elektrická energie vznikla přeměnou z magnetické energie, která neustále zmenšuje svou hodnotu. Vidíme tedy, že cívka je akumulační prvek, schopný energii odebrat a pak ji zpět vydat. U ideální cívky s nulovým odporem vinutí nedochází k nevratné přeměně elektrické energie na energii tepelnou.

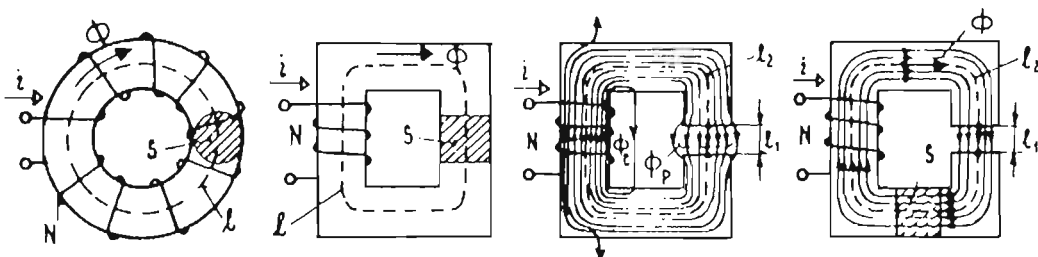
5.2 MAGNETICKÉ OBVODY

Feromagnetická jádra cívek, transformátorů, elektrických motorů apod., v nichž je vytvářeno magnetické pole, nazýváme magnetické obvody. V praxi je potřebné navrhnout jejich rozměry, použitý materiál, velikosti vzduchových mezer, počty závitů cívek atd. To vše je předmětem řešení magnetických obvodů.

Typy magnetických obvodů. Rozdělujeme je podle více hledisek. Jedno možné hledisko je linearita feromagnetického materiálu v obvodu. Podle toho máme magnetické obvody

- lineární (maximální indukce B nepřekračuje mez linearity)
- nelineární (maximální indukce B překračuje mez linearity).

Podle jiného hlediska se magnetické obvody dělí na obvody bez hystereze a s hysterezí. Důležitým hlediskem je i homogenita. Homogenní magnetické obvody jsou složeny z jednoho typu materiálu s konstantním průřezem (aby byla při daném Φ i konstantní B). Příklad takového obvodu je na obr. 5-14a. Za přibližně homogenní považujeme ob-



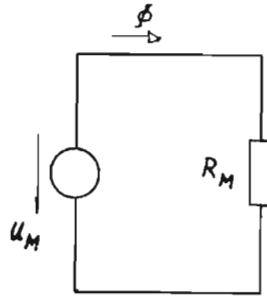
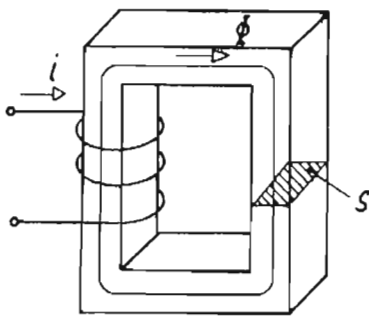
Obr. 5-14 Magnetické obvody a) homogenní, b) přibližně homogenní, c) nehomogenní s rozptylem, d) nehomogenní se zanedbatelným rozptylem

vod na obr. 5-14b. Nehomogenní magnetické obvody mají obvykle obvod přerušen vzduchovou mezerou. Pak dochází k částečnému rozptylu (šíření magnetického pole mimo průřez S na obr. 5-14c). V běžné praxi lze tento rozptyl magnetického pole zanedbat, jak je ukázáno na obr. 5-14d. U každé části magnetického obvodu pak uvažujeme délku střední magnetické siločáry.

a) Řešení lineárních magnetických obvodů

K magnetickému obvodu vytváříme jeho náhradní schéma (obr. 5-15), kde vycházíme z analogie s elektrickým obvodem. Cívku s elektrickým proudem jsme nahradili zdrojem

magnetického napětí $U_{MO} = N \cdot i$, magnetické jádro pak magnetickým odporem o hodnotě



$$R_M = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{S}$$

Zde l je délka střední magnetické siločáry.

Je tedy zřejmá analogie mezi elektrickými a magnetickými obvody. Tato analogie je vyjádřena v následující tabulce.

Obr. 5-15

Tab. 5-1 Analogie elektrických a magnetických obvodů

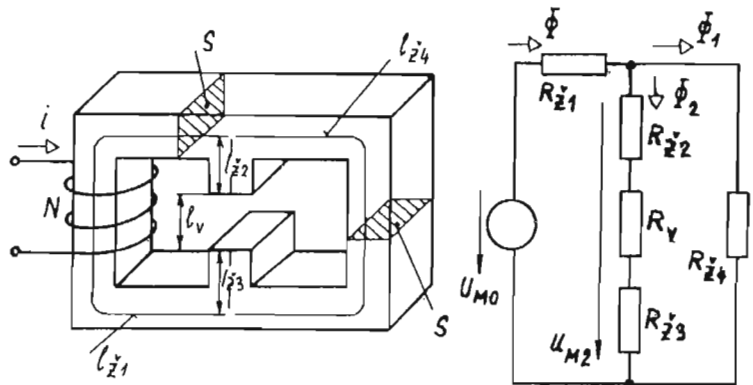
elektrický obvod	magnetický obvod
v e l i č j n y	
proud i [A]	magnetický indukční tok Φ [Wb]
napětí u [V]	magnetické napětí u_M [A]
odpor R [Ω]	magnetický odpor R_M [H^{-1}]
$R = \rho \frac{l}{S}$	$R_M = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$
zdroj napětí U_0 [V]	zdroj magnetického napětí U_{MO} [A]
vodivost $G = 1/R$ [S]	magnetická vodivost $G_M = 1/R_M$ [H]
z á k l a d n í z á k o n y	
Ohmův zákon : $u = R \cdot i$	$u_M = R_M \cdot \Phi$
1. KZ : $\sum i = 0$	$\sum \Phi = 0$
2. KZ : $\sum u = 0$	$\sum u_M = 0$

Př. 5-1 : Vypočítejte magnetickou indukci B ve vzduchové mezeře, je-li dáno zapojení obvodu (obr.5-16a) a dále i , N , l_{z1} až l_{z4} , l_v , S , μ_z .

Řešení : Požadovanou indukci B ve vzduchové mezeře vypočteme ze vztahu

$$B = \frac{\Phi_2}{S}$$

Pro určení Φ_2 vyjdeme ze vztahu



Obr. 5-16 Lineární mag.obvod a jeho náhradní schéma

$$\phi_2 = \frac{u_{M2}}{R_{Ma}},$$

kde u_{M2} je magnetické napětí na části obvodu, složeného z rezistorů R_{z2} , R_{z3} a R_v , které po sériovém spojení nahradíme ekvivalentním magnetickým odporem R_{Ma} podle vztahu

$$R_{Ma} = R_{z2} + R_{z3} + R_v = \frac{1}{\mu_z} \frac{l_{z2}}{S} + \frac{1}{\mu_z} \frac{l_{z3}}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{l_v}{S}.$$

Magnetické napětí u_{M2} určíme z děliče magnetického napětí.

$$u_{M2} = U_{M0} \frac{R_{Mb}}{R_{Mb} + R_{z1}},$$

kde R_{Mb} vznikne paralelním spojením R_{Ma} a R_{z4} . R_{z1} a R_{z4} vypočteme obdobným způsobem jako R_{z2} a R_{z3} . Pak R_{Mb} je rovno

$$\frac{1}{R_{Mb}} = \frac{1}{R_{Ma}} + \frac{1}{R_{z4}}.$$

Nyní již můžeme zpětně dosazovat, až dojdeme ke vztahu pro indukci B a vypočteme její hodnotu.

b) Řešení nelineárních magnetických obvodů

V tomto případě musíme obdobně jako u nelineárních elektrických obvodů vycházet z nelineární prvkové rovnice pro magnetické rezistory

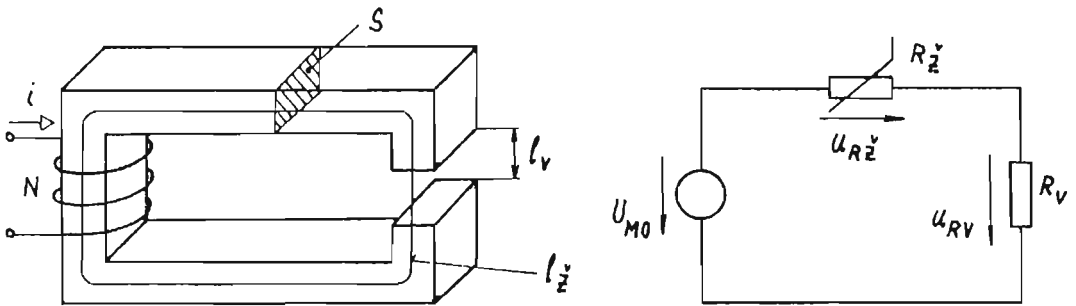
$$\phi = f(u_M).$$

Vzhledem k tomu, že používáme tentýž materiál s různými rozměry, je lépe používat tuto nelineární prvkovou rovnici v normovaném tvaru

$$B = f(H).$$

Grafické vyjádření této rovnice pro různé materiály je na obr.5-4. Vlastní řešení nelineárního magnetického obvodu může probíhat obdobně jako u nelineárního elektrického obvodu.

Př. 5-2 : Nalezněte potřebnou hodnotu elektrického proudu i cívkou, je-li požadovaná hodnota indukce B ve vzduchové mezeře obvodu podle obr.5-17a, $B = B_0$. Dále jsou zadány l_z , l_v , N a závislost $B = f(H)$ pro transformátorové plechy podle obr.5-4.



Obr. 5-17 Nelineární magnetický obvod a jeho náhradní schéma

Řešení : Potřebný proud vyjádříme ze vztahu

$$i = \frac{U_{M0}}{N}.$$

Magnetické napětí U_{MO} vyjádříme na základě 2. KZ

$$U_{MO} = u_{R\dot{z}} + u_{Rv} .$$

Jednotlivá napětí můžeme zapsat v normovaných tvarech pomocí intenzit magnetického pole

$$u_{R\dot{z}} = H_z \cdot l_z \quad , \quad u_{Rv} = H_v \cdot l_v \quad .$$

Pro požadovanou indukci pak nalezneme

$$H_z = f(B)$$

z grafu podle obr. 5-4. Pro vzduchovou mezeru platí

$$H_v = B/\mu_0 \quad .$$

Výsledné intenzity magnetického pole H_z a H_v pak dosadíme a tak dospějeme ke vztahu pro potřebnou velikost proudu.

Otázky k samostatnému studiu

- 5-1 Uveďte příklady praktického využití magnetického pole.
- 5-2 Jaké jsou zdroje magnetického pole? Jaká je základní podmínka vzniku magnetického pole? Jsou magnetické náboje? Z čeho je složen permanentní magnet?
- 5-3 Jaké veličiny popisují velikost magnetického pole, jaké jsou jejich jednotky a jaký je mezi nimi vztah?
- 5-4 Jaký tvar má magnetické pole vodiče a magnetické pole cívky? Jak vypočteme jejich magnetické napětí?
- 5-5 Jaké veličiny vyjadřují působení magnetického pole na látku? Jaký je mezi nimi vztah?
- 5-6 Jaký je vztah mezi magnetickým napětím a magnetickým indukčním tokem?
- 5-7 Vysvětlete pojem magnetický odpor a magnetická vodivost. Uveďte jejich výpočet pro homogenní lineární materiál se známou permeabilitou.
- 5-8 Vysvětlete pojem permeabilita a rozdělení látek podle její hodnoty. Vysvětlete vlastnosti feromagnetických látek.
- 5-9 Vysvětlete silové působení magnetického pole na vodič.
- 5-10 Jaké funkce má cívka? Vysvětlete spjatý magnetický tok cívky. Jak pracuje cívka jako převodník elektrického proudu na magnetické pole? Jak pracuje jako převodník magnetického pole na elektrické? Co je to vlastní indukčnost?
- 5-11 Objasněte vztah pro indukčnost cívky bez magnetického rozptylu. Jak vyjadřujeme cívku v elektrickém obvodu a jak v magnetickém?
- 5-12 Objasněte, jak dochází k akumulaci energie v cívce a jak ke zpětnému převodu energie do vnějšího obvodu.
- 5-13 Jak lze nahradit sériově a paralelně spojené cívky podle principu ekvivalence?
- 5-14 Vysvětlete, co je to magnetický obvod a uveďte typické příklady.
- 5-15 Jak dělíme magnetické obvody z hlediska linearity, hysterese a homogenity? Co je to rozptyl magnetického pole a kdy jej můžeme zanedbat?
- 5-16 Vysvětlete vytváření náhradního schématu magnetického obvodu a analogii magnetického a elektrického obvodu.
- 5-17 Jaký je postup při řešení lineárních magnetických obvodů?
- 5-18 Jaký je postup při řešení nelineárních magnetických obvodů? Jaký je zde rozdíl oproti analogii s nelineárními elektrickými obvody?

6 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

V předchozí kapitole jsme poznali, že elektrické a magnetické pole spolu úzce souvisí. Obě vznikají při působení elektrického náboje : u elektrického pole stačí existence tohoto náboje, magnetické pole vzniká jeho pohybem. Na základě těchto souvislostí je vhodné zobecnit obě pole jako elektromagnetické pole. Všechny vztahy pro popis elektrických či magnetických obvodů pak vyplývají nebo souvisí s nejobecnějšími zákony popisujícími elektromagnetické pole.

Tato kapitola je rozdělena do dvou částí :

6.1 POPIS ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE POMOCÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC A ZÁKONA O ZACHOVÁNÍ ELEKTRICKÉHO NÁBOJE

6.2 ELEKTRICKÉ OBVODY JAKO ZJEDNODUŠENÍ OBVODŮ V ELEKTROMAGNETICKÉM POLI

6.1 POPIS ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE POMOCÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC A ZÁKONA O ZACHOVÁNÍ ELEKTRICKÉHO NÁBOJE

Čtyři Maxwellovy rovnice a zákon o zachování elektrického náboje vytvářejí obecný a ucelený popis elektromagnetického pole. Maxwell tyto rovnice vytvořil zobecněním a matematickou formulací do té doby známých zákonů (Coulumbův, Biot - Savartův, Faradayův, Ampérův atd.). Jde o tyto čtyři rovnice :

- zákon celkového proudu (I. Maxwellova rovnice),
- zákon elektromagnetické indukce (II. Maxwellova rovnice),
- Gaussova věta pro elektrické pole (III. Maxwellova rovnice),
- Gaussova věta pro magnetické pole (IV. Maxwellova rovnice).

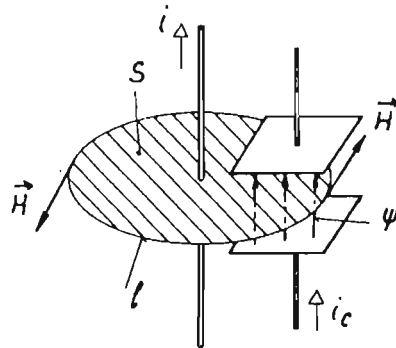
Tyto rovnice spolu úzce souvisí. K nim je pro ucelený popis elektromagnetického pole připojován

- zákon o zachování elektrického náboje.

a) Vztah mezi elektrickým a magnetickým polem, vyjádřený v I. a II. Maxwellově rovnici

I. Maxwellova rovnice vyjadřuje vytváření magnetického pole působením elektrického pole. Tento zákon celkového proudu ukazuje, že magnetické oběhové napětí u_{M0} , vzaté po uzavřené křivce l je rovno elektrickému proudu i a časové změně elektrického indukčního toku $d\psi/dt$ (posuvnému či Maxwellovu proudu), které procházejí plochou S vytvořenou uzavřenou křivkou l :

$$u_{M0} = i + \frac{d\psi}{dt} \quad (6-1)$$



Obr. 6-1

Tuto rovnici lze převést do integrálního tvaru

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (6-2)$$

Obecně závisí velikost magnetického napětí na tvaru křivky l (na integrační cestě), křivka může obepínat různý počet vodičů či různý elektrický indukční tok. Jak jsme si však ukázali v případě magnetického pole vodiče s elektrickým proudem (obr.5-2b) v kapitole o magnetickém poli, zde magnetické napětí nezávisí na tvaru křivky, protože hodnota proudu procházejícího křivkou se nemění a vliv elektrického indukčního toku jsme neuvažovali. V běžné praxi se $d\psi/dt$ uplatňuje až pro oblast velmi vysokých kmitočtů. Pro cívku s N závity bez vlivu posuvného proudu pak l. Maxwellova rovnice přechází do tvaru

$$u_M = N \cdot i \quad (6-3)$$

jak bylo ukázáno v kapitole o magnetickém poli.

II. Maxwellova rovnice vyjadřuje vznik elektrického pole působením magnetického pole. Tento zákon elektromagnetické

indukce ukazuje, že elektrické obě-

hové napětí u_0 (též indukované

elektromotorické napětí) vzaté po

uzavřené křivce l je rovno záporně

vzaté časové změně magnetického in-

dukčního toku :

$$u_0 = - \frac{d\phi}{dt} \quad (6-4)$$

Tuto rovnici lze převést do integrálního tvaru

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6-5)$$

Výsledné napětí je obecně závislé na tvaru křivky l. Vzhledem k tomu,

že magnetický indukční tok ϕ pro-

chází celou plochou S, není možné měnit tvar křivky beze změny elektrického napětí.

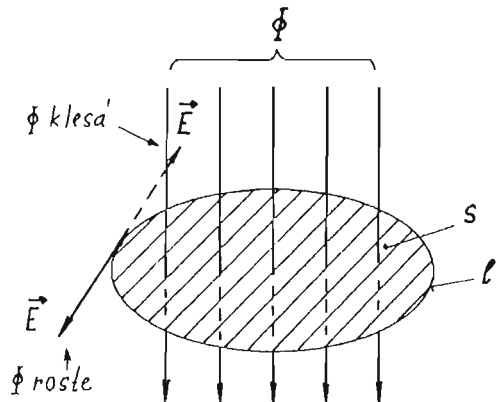
V případě, že vodič obepíná feromagnetické jádro s malým rozptylem, není změna tvaru křivky l vodiče tak podstatná.

S touto Maxwellovou rovnicí jsme se už setkali v kapitole o magnetickém poli, kde jsme si ukazovali indukci napětí v cívce, a to jak indukci od vnějšího magnetického toku, tak i vlastní indukci cívky.

Tato rovnice má zvláštní tvar pro stacionární magnetické pole, kde $d\phi/dt = 0$. Pak platí

$$u_0 = 0 \quad (6-6)$$

Tohoto poznatku se využívá v elektrických obvodech ve formě 2. Kirchhoffova zákona, kde součet napětí v uzavřené smyčce je nulový. Pro přesnou platnost 2. KZ je tedy nezbytně nutná podmínka stacionárního magnetického pole. Tato podmínka nemusí být ve skutečnosti vždy splněna. Pak se do obvodu indukují rušivá napětí od cizích magnetických polí, nejčastěji od magnetického pole elektrické rozvodné sítě s kmito-

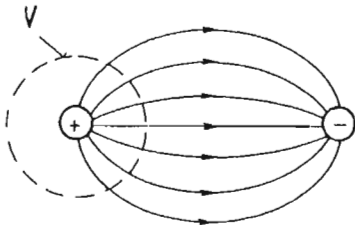


Obr. 6-2

četem 50 Hz. To se např. v akustickém signálu projevuje jako tzv. brum.

b) Gaussova věta pro elektrické a pro magnetické pole, která vyjadřuje, co je zdrojem elektrického a magnetického pole.

III. Maxwelllova rovnice - Gaussova věta pro elektrické pole vyjadřuje, že elektrický indukční tok Ψ_{δ} , který vychází z uzavřené plochy S (objemu V) je roven elektrickému náboji q_V , který je uvnitř této uzavřené plochy S (objemu V):



$$\Psi_{\delta} = q_V \quad (6-7)$$

Tuto rovnici můžeme zapsat v integrálním tvaru

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (6-8)$$

Obr. 6-3

Z rovnice vyplývá, že zdroji elektrického pole jsou elektrické náboje a že elektrická siločára vystupuje z kladného náboje a vstupuje do záporného náboje. Siločáry tedy nejsou uzavřené, mají svůj začátek a konec (na rozdíl od magnetických siločar).

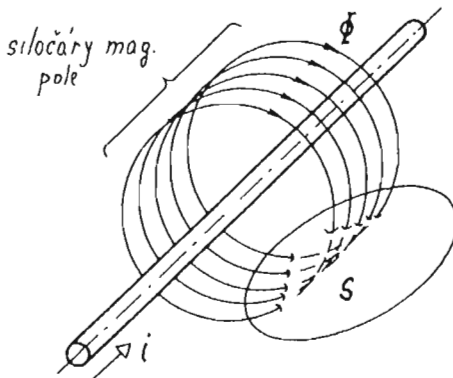
IV. Maxwelllova rovnice - Gaussova věta pro magnetické pole vyjadřuje, že magnetický indukční tok Φ_{δ} , který vychází z uzavřené plochy S (objemu V) je roven nule:

$$\Phi_{\delta} = 0 \quad (6-9)$$

Tuto rovnici je možné vyjádřit v integrálním tvaru

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6-10)$$

To znamená, že magnetické siločáry, které do objemu vstupují, musí z něj též vystupovat. Siločáry jsou uzavřené, vírové. Je to v důsledku toho, že neexistují magnetické náboje.

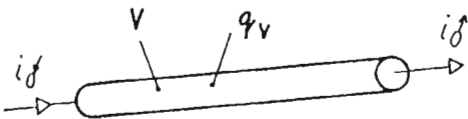


Obr. 6-4

c) Zákon o zachování náboje

Tento zákon vyjadřuje, že elektrický náboj nemůže ani vzniknout, ani zaniknout.

Elektrický proud i vytékající z uzavřené plochy S (objemu V) je roven časové změně množství náboje q_V uvnitř této plochy:



$$i = - \frac{dq_V}{dt} \quad (6-11)$$

Tento zákon lze vyjádřit i v integrálním tvaru

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_V q_V dV \quad (6-12)$$

Obr. 6-5

V případě, že do objemu náboj současně přitéká i odtéká, je úbytek náboje v objemu V dán rozdílem vytékajícího a přitékajícího náboje. U vodičů v elektrickém obvodu je běžný případ, kdy se množství náboje v objemu V nezvyšuje ani nesnižuje ($dq_V/dt = 0$). Pak platí, že

$$i_{\text{out}} = 0$$

Bereme-li v úvahu i proud přitékající do objemu V , pak lze napsat

$$i_{\text{in}} + i_{\text{out}} = 0,$$

což odpovídá 1. Kirchhoffovu zákonu, který je ze zákona o zachování náboje odvozen za podmínky $dq_V/dt = 0$. V praxi nemusí být tato podmínka vždy zcela splněna. Vodiče a uzly mají vůči sobě malou (parazitní) kapacitu, která se projevuje pro signály s velmi vysokými kmitočty akumulací náboje.

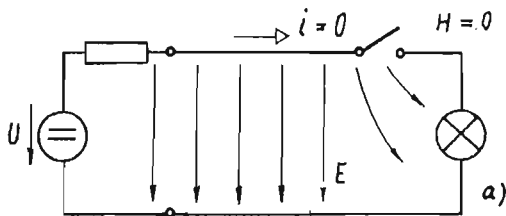
Poznámka: Spojíme-li dva elektrické náboje opačné polarity do jednoho celku, je výsledný náboj

$$q = -e + e = 0.$$

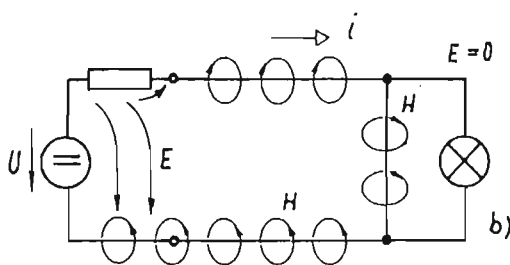
Neznamená to ale, že došlo k zániku nábojů. Při celkovém pohledu na těleso sledujeme výsledný náboj jako celek, nikoliv všechny elektrické náboje v tělese obsažené. Tak např. atom se jeví jako by byl bez elektrického náboje přesto, že je složen z elektronů a protonů.

d) Šíření elektrické energie v elektromagnetickém poli

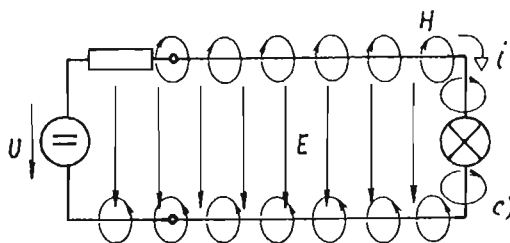
Tento problém si ukažme na jednoduchém obvodu s baterií a žárovkou. V prvním případě (a) není obvod uzavřen, neteče proud, není předáván výkon a žárovka nesvítí. Je vytvořeno pouze elektrické pole.



V druhém případě (b) je obvod zkratován, proud teče zkratem, ale je na něm nulové napětí. Všechny výkon se spotřebovává na vnitřním odporu zdroje, mimo zdroj je jen magnetické pole od zkratujícího vodiče. V třetím případě (c) je na žárovce napětí a teče jí proud, je do ní dodáván výkon. V tomto případě existuje současně jak elektrické, tak i magnetické pole. Je zřejmé, že současný výskyt elektrického a magnetického (elektromagnetického) pole je podmínkou přenosu energie.



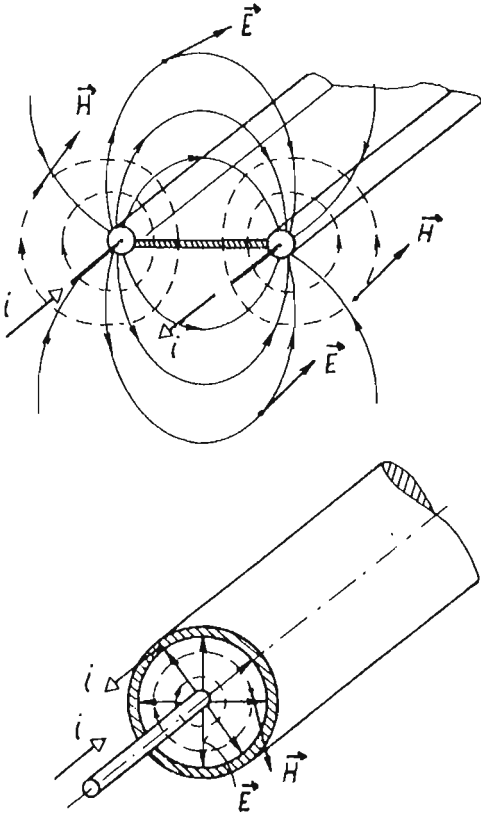
Poznali jsme již, že v elektrickém a magnetickém poli je obsažena energie. Proto lze říci, že energie se šíří elektromagnetickým polem a ne ve vodičích, jak to na první pohled vypadá. Vodiče jen usměrňují tok energie požadovaným směrem.



Typickým příkladem tohoto jevu je vedení signálu z antény do televizního přijímače. Používají se dva typy vedení.

Obr. 6-6

Je to tzv. dvojlinka a koaxiální kabel. Jak je zřejmé z obr.6-7a, u dvojlinky za-



sahuje elektrické a magnetické pole poměrně daleko od vodičů, i když se vzdáleností intenzity klesají. V případě koaxiálního kabelu je elektrické i magnetické pole uvnitř kabelu. (Uvědomme si, že magnetické napětí podél křivky, obepínající kabel, je rovno sumě proudů, což je nula vzhledem k opačnému směru proudů ve vodičích kabelu.) Je tedy vidět, že koaxiální kabel můžeme vést prakticky libovolným prostředím bez nebezpečí zvýšení ztrát energie vedeného signálu. K určitým ztrátám dochází jen v dielektriku kabelu, které odděluje vnitřní a vnější vodič. Naopak dvojlinku nelze vést libovolným prostředím. Elektromagnetická energie v okolí dvojlinky může být tímto prostředím pohlcována. Proto dvojlinka vyžaduje volný prostor v nejbližším okolí. Pak vlastní ztráty v dielektriku dvojlinky

Obr. 6-7

mohou být nižší než u koaxiálního kabelu.

Dalším důležitým praktickým dopadem toho, že energie se může šířit elektromagnetickým polem v prostoru, je možnost vysílání a přenosu informací z vysílače do rozhlasového nebo televizního přijímače pomocí elektromagnetických vln.

6.2 ELEKTRICKÉ OBVODY JAKO ZJEDNODUŠENÍ OBVODŮ V ELEKTROMAGNETICKÉM POLI

V elektrotechnice se pracuje převážně s elektrickými obvody. Jejich rozbor a návrh pomocí obecných zákonů elektromagnetického pole by byl sice přesný, ale většinou nesmírně složitý. Proto se tyto obecné zákony elektromagnetického pole zjednodušují pro podmínky elektrického obvodu. Jde vždy o zjednodušení s větší či menší přesností. Vždy je potřebné posuzovat potřebnou míru zjednodušení a odpovídající přesnost.

Jde především o tato zjednodušení :

- 1) Vodiče - uvažujeme s nulovým odporem, proto je na nich nulový úbytek napětí a všechny spojené vodiče uvažujeme jako jeden uzel (viz obr.3-3) se stejným napětím v libovolném místě. Ve skutečnosti existují případy, kdy se odpor vodiče uplatní (např. u dlouhých elektrických vedení).

- Uvažujeme, že vodiče neakumulují elektrický náboj a proto v obvodu platí 1. KZ. Ve skutečnosti vodiče vůči sobě vykazují kapacitu (malou, asi jednotky

Přehled veličin a vztahů v elektrickém a magnetickém poli

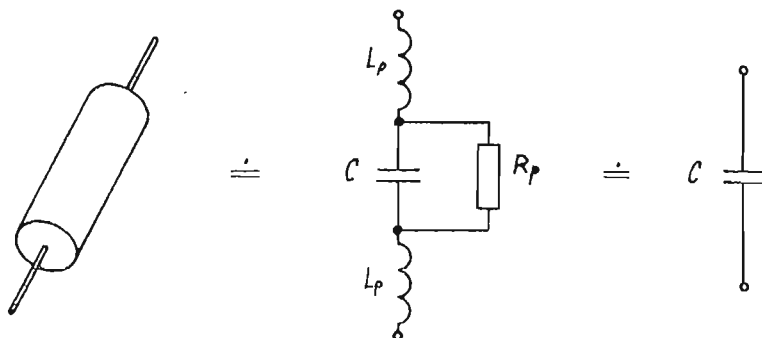
(analogie mezi elektrickým a magnetickým polem)

	elektrické pole	magnetické pole
vznik	existence el. náboje	pohyb el. náboje
působení sil	$\vec{F} = q \vec{E}$	$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$
intenzita pole	\vec{E} [V/m]	\vec{H} [A/m]
indukce (vyvolané účinky v izolantu)	$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ [C/m ²]	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ [T]
převod indukce na integrální veličiny	$\frac{\Psi}{S} = \epsilon \frac{U}{l}$	$\frac{\Phi}{S} = \mu \frac{U_M}{l}$, $\Phi = R_M U_M$ $R_M = \frac{l}{\mu S}$ [H ⁻¹]
vlastnost látky v poli	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m permitivita vakua $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m permeabilita vakua $c = 3 \cdot 10^8$ m/s .. rychlost světla
působení pole ve vodiči a převod na integrální veličiny	$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$ [A/m ²] γ - měrná el. vodivost $\frac{i}{S} = \gamma \cdot \frac{U}{l}$ ($i = G \cdot U$)	magnetické pole nemá magnetické náboje
integrální veličiny		
napětí	$u = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ [V]	$u_M = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$ [A]
intenzita toku	$\psi = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{S}$ [C]	$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$ [wb]
intenzita vodičového proudu	$i = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$ [A]	nejsou magnetické náboje
indukce napětí z druhého pole	$u_G = - \frac{d\psi}{dt}$ (II.MR)	$u_{MG} = i + \frac{d\phi}{dt}$ (I.MR)
Gaussova věta	$\psi = q$ (III.MR) zřídlové pole, neuzavřené siločáry mezi náboji	$\phi = 0$ (IV.MR) vírové pole, uzavřené siločáry

pF), takže určitá část náboje se akumuluje. To se začne projevovat při velmi vysokých kmitočtech (nad 100 MHz).

- Uvažujeme, že vodiče jsou ve stacionárním magnetickém poli a proto platí 2. KZ. Ve skutečnosti toto pole nemusí být stacionární a pak velikost indukovaného napětí do uzavřených smyček může hrát podstatnou roli. Z těchto důvodů mnohdy obvody stíníme (magneticky i elektricky), tj. zabráňujeme, aby vnější pole (magnetické i elektrické) na obvod působilo.

2) Prvky obvodu jsou fyzikální objekty působící v obecném elektromagnetickém poli.



Obr. 6-8

V elektrických obvodech obvykle používáme prvky, kde uvažujeme přeměnu elektrické energie na jeden typ energie. U rezistoru jde pouze o přeměnu na tepelnou energii, u induktoru na energii magnetického pole, u kapacitoru na energii elektrického pole. Reálné (skutečné) prvky tedy nahrazujeme buď idealizovanými prvky (např. kondenzátor → kapacitor), nebo při přesnějším vyjádření je nahrazujeme složitějšími náhradními schémata, jak je pro kapacitor ukázáno na obr. 6-8. Parazitní kapacity a indukčnosti obvykle uvažujeme jen pro vysoké kmitočty, kdy se projevují podstatněji. Při velmi vysokých kmitočtech (nad 1 GHz) již pojmy vodič, kapacitor a induktor ztrácejí smysl, protože na těchto kmitočtech má prakticky každý prvek vlastnosti kapacitoru i induktoru a dochází v něm k přeměně elektrické energie v teplo, energii elektrického i magnetického pole. Pak hovoříme o obvodech s rozloženými parametry, k jejichž popisu a řešení musíme využívat obecných zákonů elektromagnetického pole.

Otázky k samostatnému studiu

- 6-1 Proč je vhodné zobecnit elektrické a magnetické pole v elektromagnetické pole?
- 6-2 Jaký vztah vyjadřuje I. a II. Maxwellova rovnice ?
- 6-3 Vysvětlete princip I. Maxwellovy rovnice a uveďte praktické příklady jejího využití.
- 6-4 Vysvětlete princip II. Maxwellovy rovnice a uveďte praktické příklady jejího využití.
- 6-5 Vysvětlete podstatu III. a IV. Maxwellovy rovnice.
- 6-6 Vysvětlete princip zákona o zachování elektrického náboje a jeho aplikaci pro elektrické obvody (1. KZ).
- 6-7 Jakým způsobem se šíří energie v elektrických obvodech ? Uveďte praktické příklady.
- 6-8 Proč zjednodušujeme obecné zákony elektromagnetického pole pro řešení elektrických obvodů ?
- 6-9 V čem spočívá zjednodušení elektrických obvodů z hlediska použití vodičů ?

- 6-10 V čem spočívá zjednodušení elektrických obvodů z hlediska použitých prvků v obvodu ? Kdy použijeme pro prvek složitější náhradní schéma ?
- 6-11 Kdy nelze elektrický obvod zjednodušovat a je nutno jej řešit jako obvod v elektromagnetickém poli ?

7 OBVODY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

Obsah kapitoly :

7.1 ÚVOD DO HARMONICKÉHO USTÁLENÉHO STAVU

7.2 PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

7.3 VLASTNOSTI HARMONICKÉHO SIGNÁLU. FÁZOR.

Fázor, rotující fázor. Vztah mezi okamžitou hodnotou a fázorem. Střední a efektivní hodnota harmonického signálu.

7.4 ZÁKLADNÍ DVOJŘÁDÍ V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

Prvky R, L, C v harmonickém ustáleném stavu. Induktivní a kapacitní reaktance a susceptance. Impedance, admittance, imittance. Analýza obvodů v harmonickém ustáleném stavu pomocí fázorů. Obvody RLC. Rezonance. Kmitočtové charakteristiky.

7.5 VÝKONY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

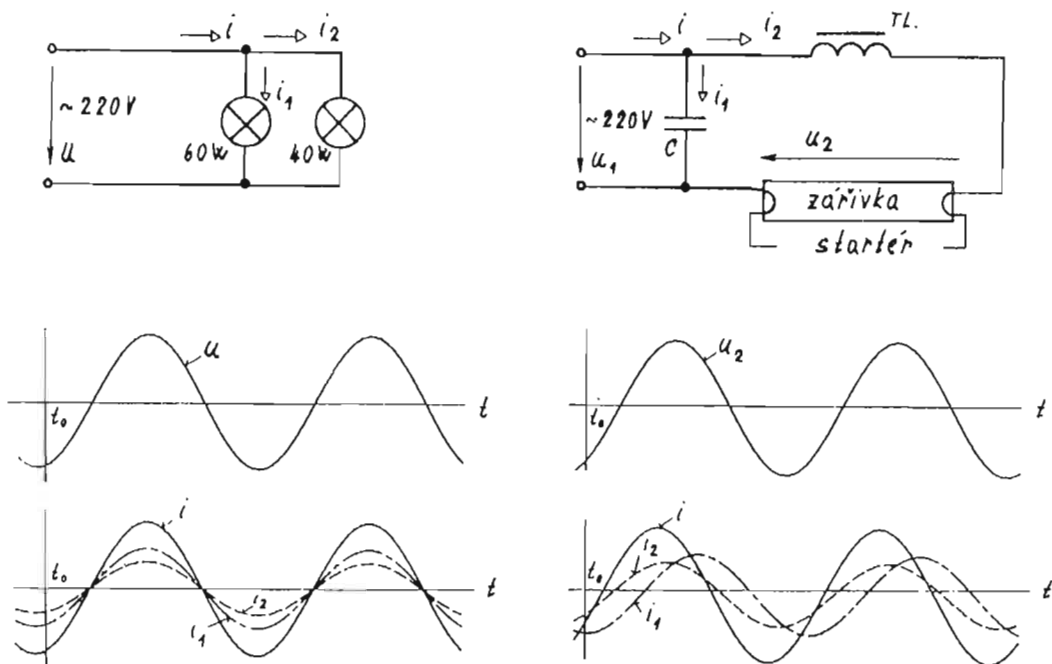
Okamžitý výkon. Činný, jalový, zdánlivý výkon. Účinník. Výkonové přizpůsobení.

7.6 MĚŘENÍ STŘÍDAVÝCH VELIČIN

Principy měření střídavého proudu. Měření I , U , P , Z , $\cos \varphi$, f .

7.7 VÍCEFÁZOVÉ OBVODY

7.1 ÚVOD DO HARMONICKÉHO USTÁLENÉHO STAVU



Obr. 7-1 Příklad obvodových veličin v harmonickém ustáleném stavu

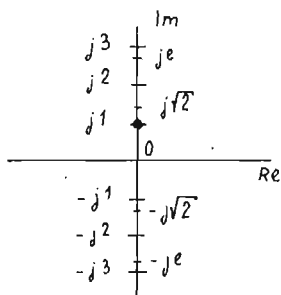
Velké množství běžně používaných elektrických spotřebičů je napájeno ze síťového napětí 220V/50Hz. Jsou to například světelné spotřebiče (žárovky, zářivky), tepelné spotřebiče (vařiče, topná tělesa), motorické spotřebiče (mixéry, sušiče vlasů) apod. Časový průběh síťového napětí je harmonická funkce času (funkce typu $\sin x$ nebo $\cos x$). Připojíme-li lineární spotřebič k napájecímu napětí, pak po určité krátké době dojde k tzv. harmonickému ustálenému stavu, kdy všechny obvodové veličiny ve spotřebiči - napětí i proudy - jsou harmonické. V harmonickém ustáleném stavu se mohou nacházet nejen uvedené spotřebiče, ale i různé elektronické přístroje a zařízení. V dalším se naučíme řešit podobné obvody.

Počítání s celými harmonickými časovými průběhy je velmi zdoluhavé. Proto se harmonický signál nahradí tzv. fázorem. Střídavý obvod se pak řeší podobně jako obvod stejnosměrný, pouze místo odporů se počítá s tzv. impedancemi, což jsou komplexní čísla. Proto si nejprve zopakujeme základní pravidla pro počítání s komplexními čísly.

7.2 PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

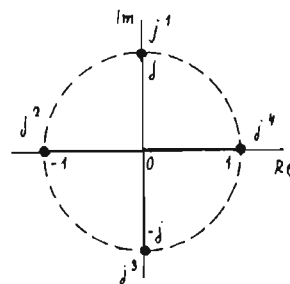
Komplexní čísla

Komplexní číslo \dot{Z} je číslo tvaru $x + jy$, kde x a y jsou reálná čísla a j je imaginární jednotka. x je tzv. reálná část (složka), y je tzv. imaginární část (složka) komplexního čísla : $x = \text{Re}\{\dot{Z}\}$, $y = \text{Im}\{\dot{Z}\}$. Komplexní číslo budeme značit s tečkou. Imaginární čísla jsou uspořádána na imaginární ose, která je kolmá k ose reálné :



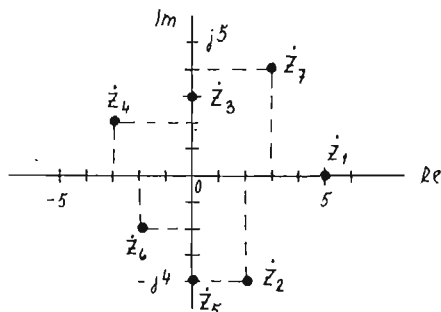
Pro mocniny imaginární jednotky platí :

$$\begin{aligned} j^2 &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \\ j^3 &= j^2 \cdot j = -j \\ j^4 &= j^3 \cdot j = -j \cdot j = 1 \\ j^5 &= j \\ &\vdots \end{aligned}$$



Dvě komplexní čísla $a + jb$ a $c + jd$ jsou stejná jen tehdy, když současně platí $a=c$ a $b=d$.

Tvar $\dot{Z} = x + jy$ se nazývá složkový nebo kartézský. Příklad komplexních čísel je uveden na obrázku.



$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= 5 \\ \dot{Z}_2 &= 2 - j4 \\ \dot{Z}_3 &= j3 \\ \dot{Z}_4 &= -3 + j2 \\ \dot{Z}_5 &= -j4 \\ \dot{Z}_6 &= -2 - j2 \\ \dot{Z}_7 &= 3 + j4 \end{aligned}$$

Jiný způsob vyjádření komplexního čísla

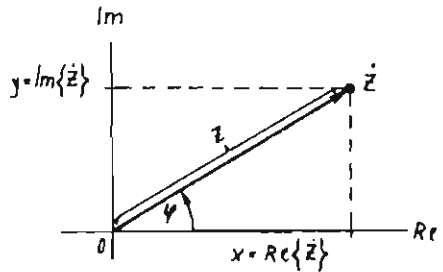
Vzdálenost Z bodu \dot{Z} od počátku se nazývá modul (absolutní hodnota, velikost) komplexního čísla.

Úhel φ se nazývá argument (fáze) komplexního čísla.

Z obrázku platí : $x = Z \cos \varphi$, $y = Z \sin \varphi$

$\dot{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$, neboli

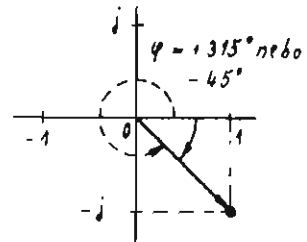
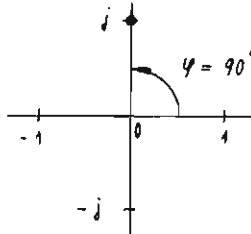
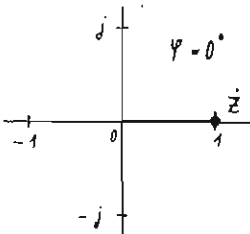
$$\dot{Z} = Z e^{j\varphi} .$$



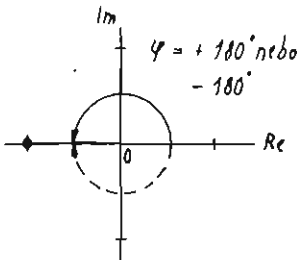
To je tzv. polární (exponenciální) tvar komplexního čísla. Někdy se užívá zkrácený, tzv. Kenellyho zápis :

$$\dot{Z} = Z \angle \varphi .$$

Všimněme si, čím se řídí znaménko úhlu φ :



Významné místo zaujímá úhel 180 :



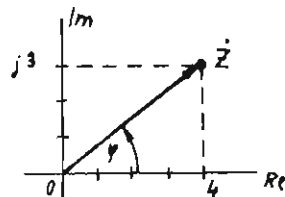
Zde jsou správná obě znaménka.

Převod ze složkového tvaru na exponenciální a naopak

Složkový tvar \rightarrow exponenciální tvar

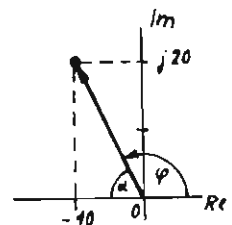
Př. 7-1 : Vyjádřete $\dot{Z} = 4 + j3$ ve tvaru $\dot{Z} = Z \angle \varphi$.

Řešení : $Z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 $\text{tg } \varphi = 3/4$, $\varphi = 36,9^\circ \Rightarrow$
 $\dot{Z} = 5 \angle 36,9^\circ$.



Př. 7-2 : Vyjádřete $\dot{Z} = -10 + j20$ ve tvaru $\dot{Z} = Z \angle \varphi$.

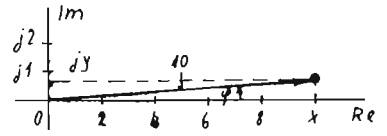
Řešení : $Z = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,4$
 Z obrázku vidíme, že $\varphi > 90^\circ$. Platí
 $\text{tg } \alpha = 20/10 = 2 \Rightarrow \alpha = 63,4^\circ \Rightarrow \varphi = 180 - \alpha = 116,6^\circ$
 $\dot{Z} = 22,4 \angle 116,6^\circ$.



Exponenciální tvar → složkový tvar

Př. 7-3 : Vyjádřete $\dot{Z} = 10 \angle 3,5^\circ$ ve tvaru $\dot{Z} = x + jy$.

Řešení : $\left. \begin{aligned} x &= 10 \cos 3,5^\circ = 9,98 \\ y &= 10 \sin 3,5^\circ = 0,61 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{Z} = 9,98 + j0,61$

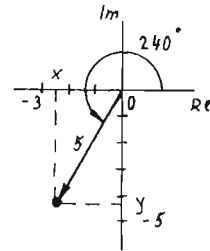


Př. 7-4 : Vyjádřete $\dot{Z} = 5 \angle 240^\circ$ ve tvaru $\dot{Z} = x + jy$.

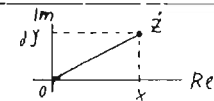
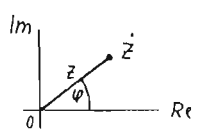
Řešení : Z obrázku vidíme, že $x < 0$, $y < 0$.

Platí :

$\left. \begin{aligned} x &= 5 \cos 240^\circ = -2,5 \\ y &= -5 \sin 240^\circ = -4,33 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{Z} = -2,5 - j4,33$



Převodní vztahy jsou uvedeny v přehledné tabulce :

	složkový tvar $\dot{Z} = x + jy$	
exponenciální tvar $\dot{Z} = Z \angle \varphi$ 	$x = Z \cos \varphi$ $y = Z \sin \varphi$	$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{pro } x \geq 0 \\ 180^\circ + \arctg \frac{y}{x} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

Tab. 7-1 Vzájemný převod mezi složkovým a exponenciálním tvarem komplexního čísla

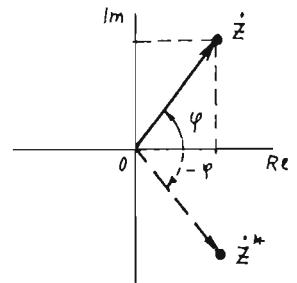
Komplexně sdružené číslo \dot{Z}^*

má opačné znaménko imaginární složky než číslo původní :

$$\dot{Z} = x + jy \Rightarrow \dot{Z}^* = x - jy$$

Z obrázku plyne, že

$$\dot{Z} = Z \angle \varphi \Rightarrow \dot{Z}^* = Z \angle -\varphi$$



Sčítání a odčítání komplexních čísel

se snadno provádí, když jsou obě čísla ve složkovém tvaru. Jsou-li čísla v jiném tvaru, převedeme je nejprve do tvaru složkového.

Př. 7-5 : Sečtěte komplexní čísla $\dot{Z}_1 = 5 - j2$ a $\dot{Z}_2 = -3 - j8$.

Řešení : $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = 5 - j2 - 3 - j8 = 2 - j10$.

Př. 7-6 : Vypočítejte rozdíl komplexních čísel \dot{Z}_1 a \dot{Z}_2 z předchozího příkladu.

Řešení : $\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = 5 - j2 - (-3 - j8) = 8 + j6$.

Násobení komplexních čísel

je možno provést ve složkovém i exponenciálním tvaru. Násobení v exponenciálním tvaru je rychlejší.

Př. 7-7 : Vypočítejte součin komplexních čísel $\dot{z}_1 = 5 e^{j60^\circ}$ a $\dot{z}_2 = 2 e^{-j30^\circ}$.
Řešení : $\dot{z}_1 \dot{z}_2 = 5 e^{j60^\circ} \cdot 2 e^{-j30^\circ} = 10 e^{j(60^\circ - 30^\circ)} = 10 e^{j30^\circ}$.

Obecně $\dot{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1$, $\dot{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2 \Rightarrow \dot{z}_1 \dot{z}_2 = z_1 z_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$.

Př. 7-8 : Vypočítejte součin komplexních čísel $\dot{z}_1 = 2+j3$ a $\dot{z}_2 = -1-j3$.

Řešení : $\dot{z}_1 \dot{z}_2 = (2+j3) \cdot (-1-j3) = -2 -j6 -j3 -j^2 9 = -2 -j9 -j(6+3) + 9 = 7 -j12$.

Dělení komplexních čísel

je výhodnější v exponenciálním zápise. Jsou-li komplexní čísla ve složkovém tvaru, pak je buď převedeme na exponenciální tvar, nebo provedeme tzv. usměrnění.

Př. 7-9 : Vypočítejte podíl komplexních čísel $\dot{z}_1 = 10 \angle 30^\circ$ a $\dot{z}_2 = 5 \angle -15^\circ$.

Řešení : $\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2} = \frac{10 e^{j30^\circ}}{5 e^{-j15^\circ}} = \frac{10}{5} e^{j(30^\circ + 15^\circ)} = 2 \angle 45^\circ$.

Obecně $\dot{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1$, $\dot{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2 \Rightarrow \frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$.

Př. 7-10 : Vypočítejte podíl komplexních čísel $\dot{z}_1 = 5+j3$ a $\dot{z}_2 = 5-j6$.

Řešení : Obě čísla převedeme na exponenciální tvar

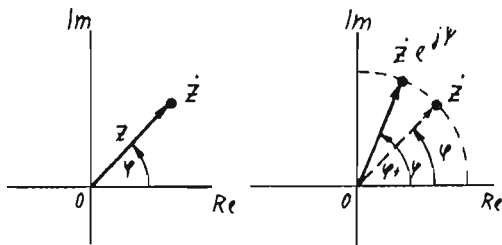
$$\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2} = \frac{5+j3}{5-j6} = \frac{\sqrt{5^2+3^2} \angle \arctg(3/5)}{\sqrt{5^2+6^2} \angle \arctg(-6/5)} = \frac{2,83 \angle 30,96^\circ}{7,81 \angle -50,19^\circ} = 0,717 \angle 81,16^\circ$$

Poznámka : Číslo typu $e^{j\psi}$ má modul 1.

Násobení tímto číslem znamená otáčení o úhel ψ :

$$\dot{z} = z e^{j\psi}; \dot{z} \cdot e^{j\psi} = z e^{j(\psi + \psi)}$$

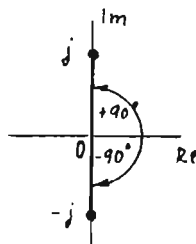
Násobení číslem $e^{j180^\circ} = -1$ znamená změnu znaménka komplexního čísla.



Různé tvary imaginární jednotky :

$$j = e^{j90^\circ}$$

$$\frac{1}{j} = e^{-j90^\circ} = -j, \text{ nebo } \frac{1}{j} = \frac{1 \cdot j}{j \cdot j} = \frac{j}{j^2} = -j$$



Příklady k procvičení

- 7-1 Znázorněte v komplexní rovině tato čísla : 5, -8, j, -j, 5+j, -8-j.
- 7-2 Převedte čísla z př. 7-1 do exponenciálního tvaru. Získaný výsledek převedte zpět do složkového tvaru. Musí vyjít stejný výsledek jako v př. 7-1.
- 7-3 Napište k číslům v př. 7-1 čísla komplexně sdružená.

- 7-4 Převedte čísla j , $-j$ do exponenciálního tvaru.
- 7-5 Sečtěte tyto dvojice čísel početně i graficky ($5+j$, $-8-j$); ($5\sqrt{45^\circ}$, -5).
- 7-6 Odečtěte dvojice čísel z př. 7-5 početně i graficky.
- 7-7 Vynásobte dvojice čísel z př. 7-5.
- 7-8 Vydělte dvojice čísel z př. 7-5.
- 7-9 Určete modul a fázi těchto čísel: 1 , j , -1 , $-j$, j^2 , j^3 , j^4 , $-j^2$, $-j^3$, $-j^4$, $\frac{1}{j}$, $-\frac{1}{j}$, e^{j30° , $5e^{-j30^\circ}$, $1+j$, $\frac{1}{1+j}$, $3+4j$, $3-4j$.
- 7-10 Jak se změní modul a fáze, když komplexní číslo vynásobíme číslem $e^{j\psi}$?

7.3 VLASTNOSTI HARMONICKÉHO SIGNÁLU. FÁZOR

Představme si vektor, který se rovnoměrně otáčí kolem pevného bodu O v komplexní rovině, takže jeho koncový bod opisuje kružnici o poloměru U_m . Je to tzv. rotující fázor. Jednu otáčku vykoná za dobu T , kterou nazveme periodou. Natočení vektoru budeme měřit úhlem, který svírá s osou Re . O jaký úhel se vektor otočí za čas t ? Určíme to z přímé úměry :

za periodu T o úhel 2π
za libovolný čas t . . . o neznámý úhel α
Neznámý úhel $\alpha = \frac{2\pi}{T} t$.

Veličina $1/T$ udává, kolikrát za sekundu došlo k otočení fázoru. Je to kmitočt f a jeho jednotka je 1 herzt [Hz]:

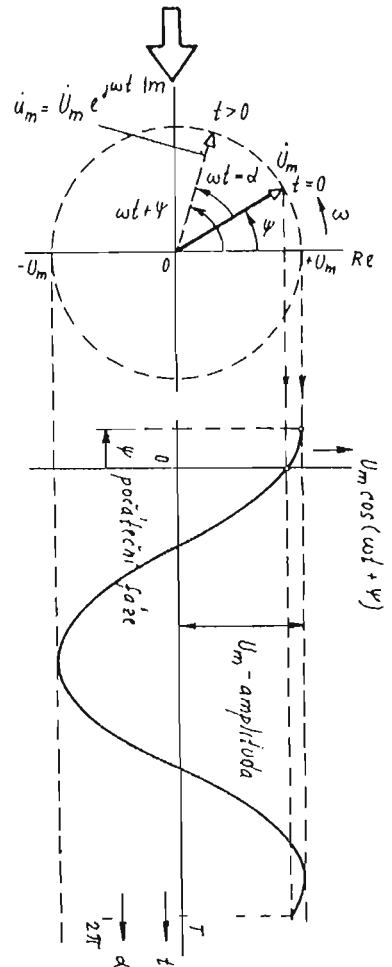
$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}] \quad (7-1)$$

Veličinu $2\pi/T = 2\pi f$ nazveme kruhovým kmitočtem ω . Jeho jednotka je radián za sekundu [rad/s]:

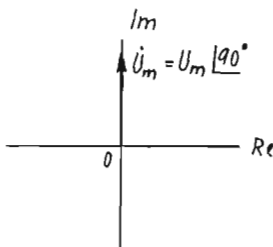
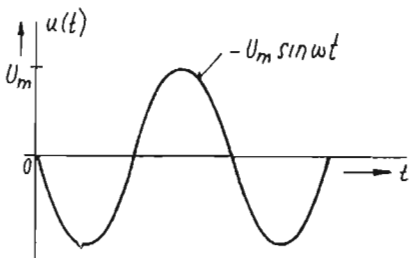
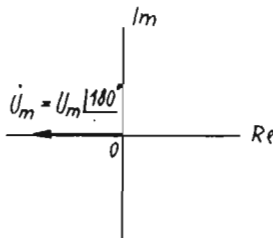
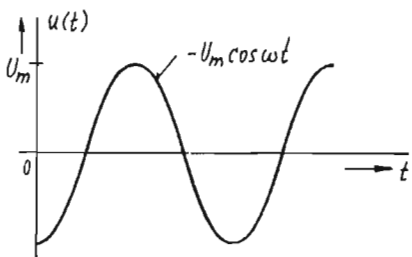
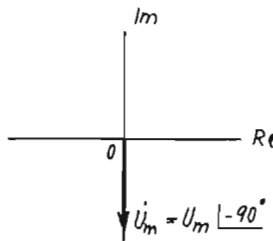
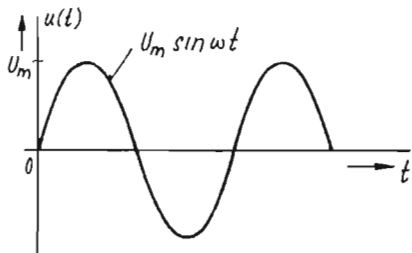
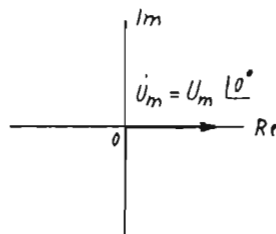
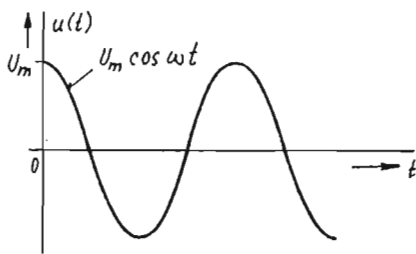
$$\omega = 2\pi f \quad [\text{rad/s}] \quad (7-2)$$

Vektor znázorňuje komplexní číslo. Tak např. v čase $t=0$, kdy začneme pozorování, je to komplexní číslo $\dot{u}_m = \dot{U}_m = U_m \angle \psi$. Tomuto komplexnímu číslu říkáme fázor, úhlu ψ počáteční fáze a U_m je amplituda. Pozorování budeme provádět ve směru šipky, takže vnímáme jen průmět vektoru do reálné osy. Časový průběh tohoto průmětu je znázorněn na obr. 7-2. V čase $t > 0$ se vektor otočí o úhel $\alpha = \omega t$, takže komplexní číslo \dot{u}_m bude

v čase $t=0$. . . $\dot{u}_m = \dot{U}_m = U_m \angle \psi$
v čase $t > 0$. . . $\dot{u}_m = \dot{U}_m \angle \omega t = U_m \angle \omega t + \psi$.



Obr. 7-2 Rotující fázor



Obr. 7-3 Vyjádření časového průběhu fázorem

Rotující fázor v čase t $\dot{u}_m = \dot{U}_m e^{j\omega t}$ se nazývá komplexor. Jeho reálná složka dává harmonickou funkci typu $\cos x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \dot{U}_m e^{j\omega t} \} &= \\ &= \operatorname{Re} \{ U_m e^{j(\omega t + \psi)} \} = \\ &= U_m \cos(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Vidíme, že harmonický pohyb vzniká z pohybu kruhového. Na tomto principu pracují v elektrárnách generátory střídavého napětí.

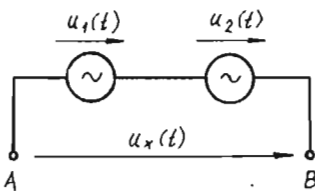
Hodnota napětí $u(t)$ v čase t se nazývá okamžitá hodnota. Zopakujeme:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi),$$

- U_m ... amplituda
- ω ... kruhový kmitočet
- ψ ... počáteční fáze.

Kreslit časový průběh harmonického signálu je zdoluhavé. Proto místo toho můžeme pracovat s fázorem. Na obr. 7-3 jsou uvedeny různé harmonické signály a jim odpovídající fázory. Výhody počítání s fázory ukážeme na příkladu.

Pr. 7-11 : Máme dva zdroje harmonického napětí o stejném kmitočtu, které jsou zapojeny do série : $u_1(t) = 5\cos(\omega t + 30^\circ)$, $u_2(t) = 8\cos(\omega t + 45^\circ)$. Jaký bude průběh napětí na svorkách A - B?



Řešení : $u_x(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

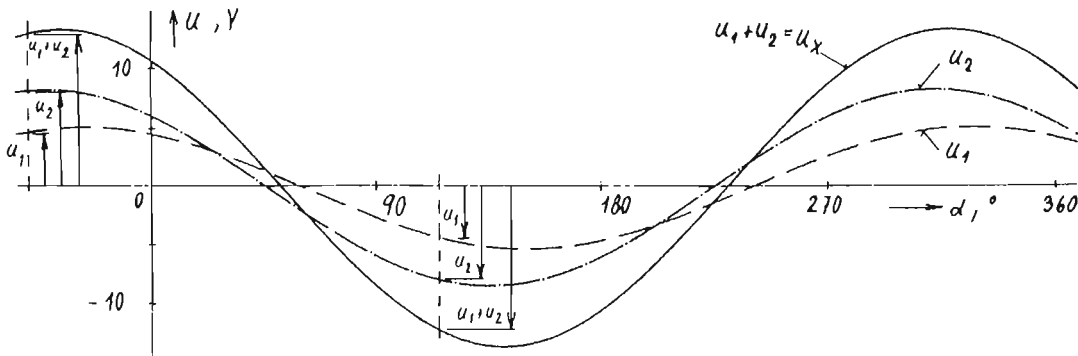
Na obr. 7-4 je provedeno grafické sečtení obou signálů. Vidíme, že $u_x(t)$ je rovněž harmonický signál. Určíme pomocí fázorů jeho amplitudu a počáteční fázi.

$u_1(t)$ a $u_2(t)$ převedeme na fázory:

$$u_1(t) = 5\cos(\omega t + 30^\circ) \dots U_1 = 5 \sqrt{30^\circ} \text{ V} \doteq 4,33 + j2,5 \text{ V}$$

$$u_2(t) = 8\cos(\omega t + 45^\circ) \dots U_2 = 8 \sqrt{45^\circ} \text{ V} \doteq 5,66 + j5,66 \text{ V}$$

$$\text{Fázor } U_x \text{ bude} \quad U_x = U_1 + U_2 \doteq 9,99 + j8,16 \text{ V} \doteq 12,90 \sqrt{39,2^\circ} \text{ V.}$$



Obr. 7-4 Součet dvou harmonických signálů

Proto $u_x(t) = 12,9 \cos(\omega t + 39,2^\circ)$ V.

Poznatek z příkladu : Součet dvou harmonických signálů se stejným kmitočtem je opět harmonický signál se stejným kmitočtem.

Napětí u_1 , u_2 a u_x jsou vůči sobě posunuty. Posunutí vyjadřujeme fázovými posuvy :

$$\varphi_{u_1 u_2} = \varphi_{u_1} - \varphi_{u_2} = 30^\circ - 45^\circ = -15^\circ$$

$$\varphi_{u_1 u_x} = \varphi_{u_1} - \varphi_{u_x} = 30^\circ - 39,2^\circ = -9,2^\circ$$

$$\varphi_{u_2 u_x} = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_x} = 45^\circ - 39,2^\circ = 5,8^\circ$$

Obecně je to úhel, který svírají oba fázory.

Dohoda : fázový posuv mezi napětím a proudem budeme značit zkráceně φ : $\varphi_{UI} = \varphi$.

Př. 7-12 : Odvoďte následující početní pravidla pro počítání s fázory.

Tab. 7-2 Základní pravidla pro počítání s fázory

časový průběh $u(t)$	fázor \dot{U}_m
$u_1(t) + u_2(t)$	$\dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m}$
$A u_1(t)$	$A \dot{U}_{1m}$
$\frac{du_1(t)}{dt}$	$j\omega \dot{U}_{1m}$
$\int u_1(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} \dot{U}_{1m}$

Z tabulky jsou vidět výhody počítání s fázory : rovnice, které obsahují derivace a integrály (integrodiferenciální), jsou obtížně řešitelné. Při počítání s fázory však derivaci nahradíme násobením $j\omega$, integrál násobením $1/j\omega$. Místo diferenciálních rovnic proto počítáme s obyčejnými algebraickými rovnicemi.

Střední a efektivní hodnota harmonického signálu

V praxi stojíme před problémem změřit voltmetrem nebo ampérmetrem velikost harmonického signálu. Co však měřit, když velikost signálu se neustále mění? Často stačí změřit jen "průměrné hodnoty" signálu - střední a efektivní hodnotu.

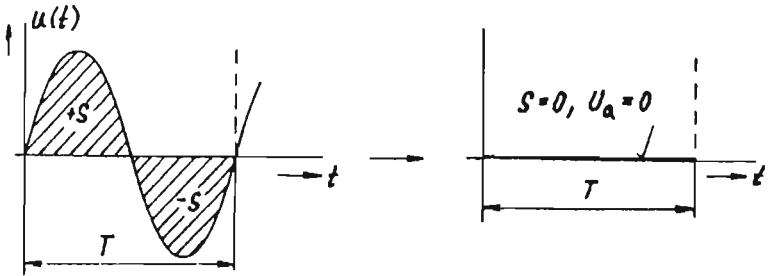
Střední hodnota signálu za jednu periodu je jeho průměrná hodnota za jednu pe-

riodu. Určí se tak, že se vypočte plocha S , kterou signál ohraničuje za jednu periodu, a pak se nahradí konstantním signálem, který ohraničuje stejnou plochu. Střední hodnota U_a se pak vypočte $U_a = S/T$. Plocha se vypočte z integrálu signálu $u(t)$ za jednu periodu :

$$S = \int_0^T u(t) dt .$$

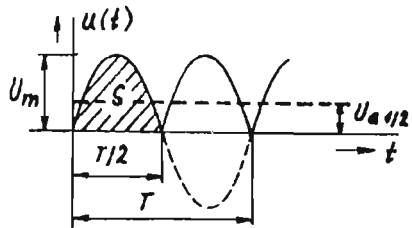
Obr. 7-5 K vysvětlení pojmu střední hodnota signálu

Střední hodnota harmonického signálu za jednu periodu je nula, protože signál je symetrický a celková plocha za jednu periodu je nulová. V praxi se často harm. signál převádí na signál podle obr. 7-7 přístrojem zvaným usměrňovač, který všechny záporné půlvlny změnil na kladné. Usměrňovač je např. v měřicím přístroji pro měření střídavého (harmonického) napětí. Střední hodnota tohoto signálu už není nula. Proto se u harmonického signálu zavádí tzv. střední hodnota za půl periody $U_{a1/2}$, neboli střední hodnota kladné půlvlny : $U_{a1/2} = \frac{S}{T/2}$. Plocha S se dá vypočíst pomocí integrálu a vyjde $S = \frac{T}{\pi} U_m$. Proto



Obr. 7-6 Střední hodnota harmonického signálu = 0

$U_{a1/2} = \frac{\frac{T}{\pi} U_m}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m$. Proto



Obr. 7-7 Střední hodnota za půl periody

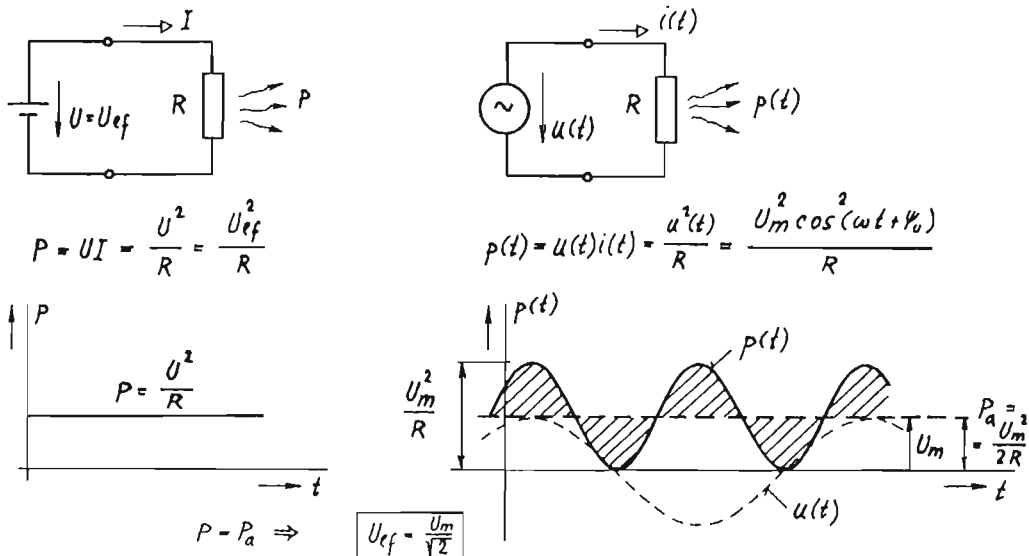
Efektivní hodnota

Provedeme pokus. Máme dva stejné rezistory R . K jednomu rezistoru připojíme harmonické napětí $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$. Za chvíli zjistíme, že rezistor je teplý : zdroj napětí dodává do rezistoru výkon a ten se mění na teplo.

K druhému rezistoru připojíme baterii. Rezistor se také zahřívá. Nastavíme takové napětí, aby teploty obou rezistorů byly stejné. Potom napětí baterie bude rovno efektivní hodnotě harmonického signálu.

Efektivní hodnota signálu proto charakterizuje tepelné (výkonové) účinky signálu. V prvním případě, při napájení stejnoseměrným napětím, je výkon do zátěže stále stejný $P = U^2/R$. Při napájení střídavým signálem se ale výkon periodicky mění. Rezistor se zahřeje na teplotu, která odpovídá střední hodnotě výkonu P_a . Z rovnosti $P = P_a$ plyne vztah mezi efektivní a maximální hodnotou harmonického signálu:

$$U_{ef} = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m , U_m = \sqrt{2} U_{ef} \approx 1,414 U_{ef} . \quad (7-3)$$



Obr. 7-8 K vysvětlení pojmu efektivní hodnota signálu

Poznámka : U jiných signálů než harmonických je vztah mezi U_{ef} a U_m jiný.

Poznámka : Dále budeme efektivní hodnotu značit symbolem U : $U = U_{ef}$.

Př. 7-13 : V rozvodné síti je harmonické napětí o efektivní hodnotě 220 V a kmitočtu 50 Hz. Nakreslete časový průběh tohoto napětí.

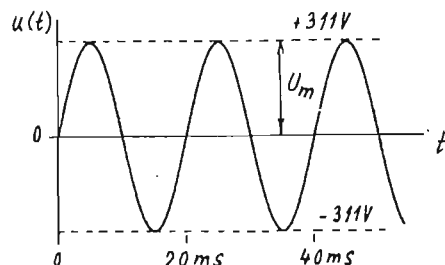
Řešení : Abychom mohli nakreslit časový průběh,

musíme znát amplitudu a periodu. Známe :

$$U = 220 \text{ V} \Rightarrow U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \cdot 220 \approx 311 \text{ V},$$

$$f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}.$$

Počáteční fáze závisí na tom, v kterém okamžiku jsme signál začali pozorovat, proto ji můžeme zvolit libovolně.



Poznámka : V některých případech se kromě fázoru

$$\dot{U}_m = U_m \underline{\psi} \text{ (komplexní amplituda)}$$

zavádí fázor $\dot{U} = U \underline{\psi}$, který se liší

$$\text{jen modulem : } \dot{U} = \dot{U}_m / \sqrt{2}.$$

Obr. 7-9

Otázky k samostatnému studiu

- 7-1 Nakreslete časový průběh obecného harmonického signálu. Vysvětlete pojmy : amplituda, perioda, kmitočet, kruhový kmitočet, počáteční fáze.
- 7-2 Co je to fázor a rotující fázor ? Jak lze určit z fázoru amplitudu a počáteční fázi harmonického signálu ? Jak lze určit z rotujícího fázoru časový průběh harmonického signálu ?
- 7-3 Vysvětlete převádění fázoru na okamžitou hodnotu a převádění okamžité hodnoty na fázor.
- 7-4 Napište základní pravidla pro počítání s fázory. Vysvětlete jejich význam.
- 7-5 Jak se počítá fázový posuv mezi napětím a proudem ? Jak se vypočte z fázového posuvu časové posunutí (zpoždění) ?
- 7-6 Co je to efektivní hodnota, střední hodnota a střední hodnota za půl periody ? Jaké jsou tyto hodnoty pro harmonický signál ?

Příklady_k_procvíčení

7-11 Určete fázory k těmto časovým průběhům :

$$u_1(t) = 5 \cos(314t) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 12 \cos(314t+90^\circ) \text{ A}$$

$$u_2(t) = 8 \sin(300t) \text{ V}$$

$$i_2(t) = -11 \sin(300t-45^\circ) \text{ A}$$

$$u_3(t) = -5 \cos(628t) \text{ V}$$

$$i_3(t) = -\sin(628t) \text{ A}$$

Výsledek :

$$\dot{U}_1 = 5 \underline{10^\circ} \text{ V}, \quad \dot{U}_2 = 8 \underline{-90^\circ} \text{ V}, \quad \dot{U}_3 = 5 \underline{180^\circ} \text{ V}, \quad \dot{I}_1 = 12 \underline{90^\circ} \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 11 \underline{45^\circ} \text{ A}, \\ \dot{I}_3 = 1 \underline{90^\circ} \text{ A}.$$

7-12 Určete okamžité hodnoty k těmto fázorům, které rotují úhlovou rychlostí

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ rad/s} :$$

$$\dot{U}_1 = 311 \underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = 5 \underline{-270^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{U}_2 = 5 \underline{90^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = 0,3 \underline{360^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{U}_3 = 0 \underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_3 = 1 \underline{180^\circ} \text{ A}$$

$$\text{Výsledek : } u_1 = 311 \cos(314t) \text{ V}, \quad u_2 = -5 \sin(314t) \text{ V}, \quad u_3 = 0 \text{ V}, \\ i_1 = -5 \sin(314t) \text{ A}, \quad i_2 = 0,3 \cos(314t) \text{ A}, \quad i_3 = -\cos(314t) \text{ A}.$$

7-13 Určete fázový posuv mezi u_1 a i_1 , u_2 a i_2 , u_3 a i_3 v příkladu 7-11. Z fázového posuvu určete časové posunutí Δt .

$$\text{Výsledek : } \varphi_{11} = -90^\circ, \quad \varphi_{22} = -135^\circ, \quad \varphi_{33} = 90^\circ, \quad \Delta t_{11} = -5 \text{ ms}, \\ \Delta t_{22} = -7,854 \text{ ms}, \quad \Delta t_{33} = 2,5 \text{ ms}.$$

7-14 Z příkladu Př. 7-15 určete fázový posuv φ_R mezi napětím a proudem na rezistoru a φ_C mezi napětím a proudem kapacitoru.

$$\text{Výsledek : } \varphi_R = 0^\circ, \quad \varphi_C = -90^\circ.$$

7-15 Topná spirála pracuje při střídavém napětí o amplitudě 200 V. Pro její napájení však máme jen zdroj stejnosměrného napětí. Jaké napětí musíme použít, abychom dosáhli stejného tepelného výkonu ?

$$\text{Výsledek : } 141 \text{ V}.$$

7.4 ZÁKLADNÍ DVOJPÓLY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

Odvodíme časové průběhy napětí a proudu na rezistoru, kapacitoru a induktoru. Vypočítáme ekvivalentní odpory, které kladou kapacitor a induktor střídavému proudu.

1. Rezistor

Pro rezistor platí

$$u = R i \Rightarrow \dot{U}_m = R \dot{I}_m, \quad \dot{I}_m = G \dot{U}_m, \quad G = \frac{1}{R}$$

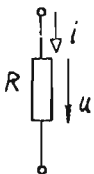
Napětí a proud jsou ve fázi, fázový posuv $\varphi_{UI} = \varphi_U - \varphi_I = 0$.

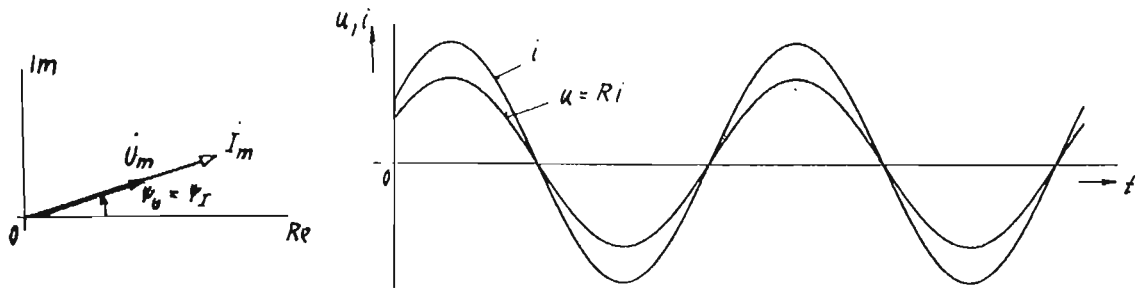
Ohmův zákon platí pro okamžité hodnoty, amplitudy i fázory :

$$u = R i$$

$$U_m = R I_m$$

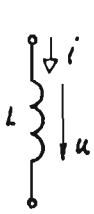
$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m$$





Obr. 7-10 Obvodové veličiny rezistoru v harmonickém ustáleném stavu

2. Induktor



Pro induktor platí $u = L \frac{di}{dt}$.

Použijeme pravidlo pro fázor derivace a dostaneme $\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m$.

Vidíme, že pro fázory rovněž platí Ohmův zákon, ale "odpor" $j\omega L$ je imaginární. Označíme ho jX_L :

$$\dot{U}_m = jX_L \dot{I}_m, \quad X_L = \omega L. \quad (7-4)$$

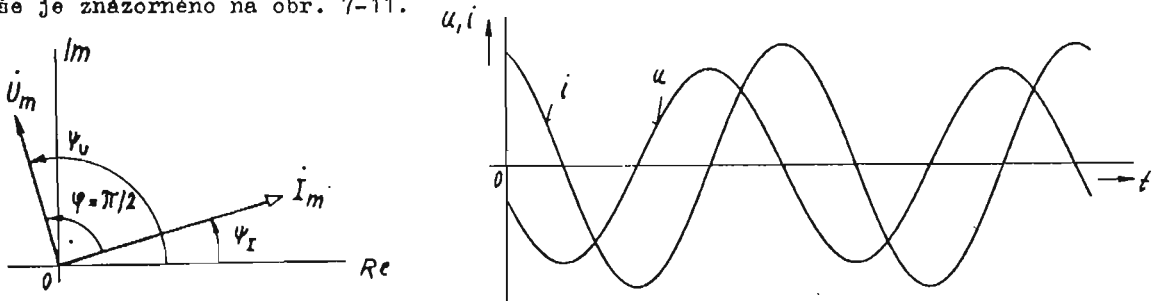
X_L se nazývá induktivní reaktance.

Fázový posuv mezi u a i se určí takto:

$$\psi_U = \psi(j\omega L) + \psi_I = \frac{\pi}{2} + \psi_I \Rightarrow \varphi = \varphi_{UI} = \psi_U - \psi_I = \frac{\pi}{2}.$$

Poznámka: Protože $\dot{U}_m = \sqrt{2} \dot{U}$, platí i $\dot{U} = jX_L \dot{I}$ i pro efektivní hodnoty.

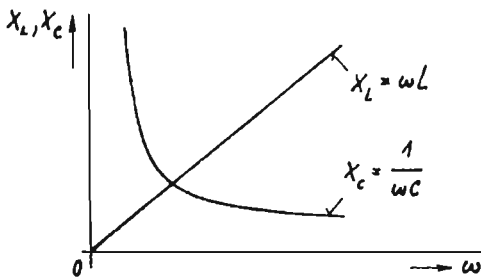
Vše je znázorněno na obr. 7-11.



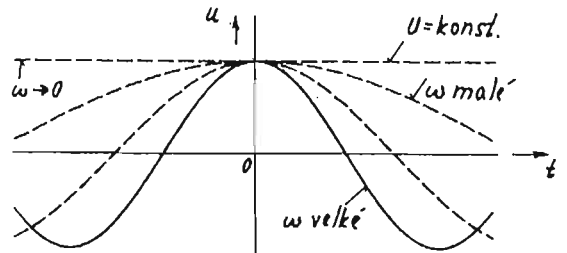
Obr. 7-11 Obvodové veličiny induktoru v harmonickém ustáleném stavu

Říkáme, že proud je zpožděn za napětím o $\pi/2$ (o 90°).

Velikost reaktance X_L závisí přímo úměrně na kmitočtu podle obr. 7-12. Pro ní-



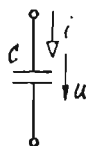
Obr. 7-12



Obr. 7-13

zké kmitočty představuje induktor malý "odpor". Pro kmitočet $\omega = 0$ je $X_L = 0$. Stejnoseměrné napětí si lze představit jako zvláštní případ harmonického napětí pro kmitočet $\omega = 0$ (viz obr. 7-13). Proto ideální induktor představuje pro stejnosměrné napětí zkrat. Ideální induktor je totiž vyroben z drátu o nulovém odporu.

3. Kapacitor



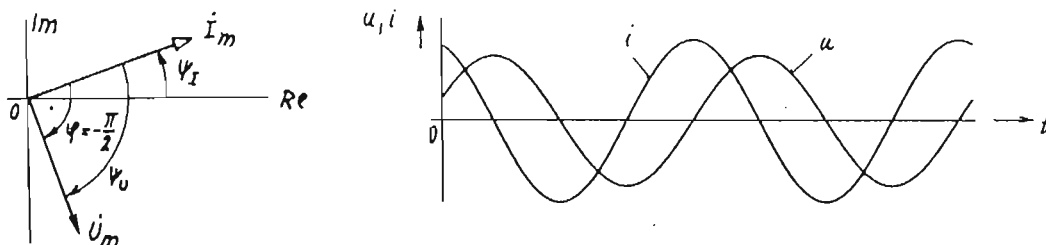
Pro kapacitor platí $i = C \frac{du}{dt}$. Opět použijeme pravidlo pro fázor derivace a dostaneme $\dot{i}_m = j\omega C \dot{u}_m$, neboli $\dot{u}_m = \frac{1}{j\omega C} \dot{i}_m$. Veličina $\frac{1}{j\omega C}$ má význam "odporu" pro harmonický signál. Označíme ji $\frac{1}{j} X_C = -j X_C$:
 $\dot{u}_m = -j X_C \dot{i}_m$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$. (7-5)

X_C se nazývá kapacitní reaktance.

Fázový posuv mezi napětím a proudem se určí takto:

$$\varphi_U = \varphi(-j X_C) + \varphi_I = -\frac{\pi}{2} + \varphi_I \Rightarrow \varphi = \varphi_U - \varphi_I = -\frac{\pi}{2}.$$

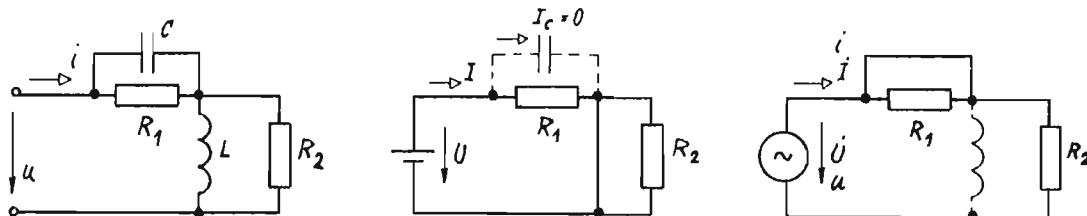
Říkáme, že napětí je zpožděno za proudem o $\pi/2$ (o 90°). Situace je znázorněna na obr. 7-14. Velikost X_C závisí na kmitočtu podle obr. 7-12. Vidíme, že charakter je



Obr. 7-14 Obvodové veličiny kapacitoru v harmonickém ustáleném stavu

opačný než u induktoru. Pro nízké kmitočty se kapacitor chová jako vysoký "odpor", pro $\omega \rightarrow 0$ $X_C \rightarrow \infty$. To je vysvětlitelné tím, že pro stejnosměrný signál představuje ideální kapacitor nekonečný odpor (izolant mezi elektrodami).

Př. 7-14: Jaký proud i poteče do obvodu při napájení a) baterií o $U = 10$ V,



Obr. 7-15

b) harmonickým generátorem o $\dot{U} = 10 \angle 0^\circ$ V o velmi vysokém kmitočtu ($f \rightarrow \infty$)? Je dáno: $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 0,1$ H.

Řešení: a) Při stejnosměrném napájení představuje C nekonečně velký odpor (můžeme ho odstranit), L představuje zkrat (viz obr. 7-15a). Pak

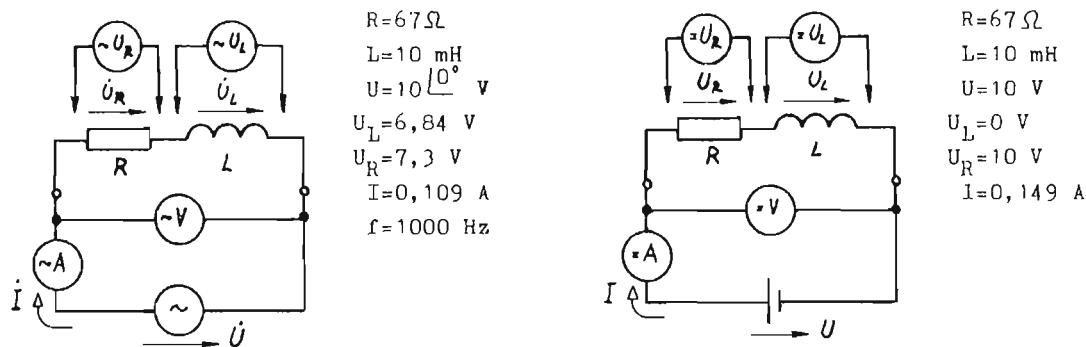
$$i = U/R_1 = 10/100 = 0,1 \text{ A} = 100 \text{ mA}.$$

b) Při velmi vysokém kmitočtu představuje kapacitor zkrat ($X_C \rightarrow 0$), induktor rozpojení ($X_L \rightarrow \infty$) (viz obr. 7-15b). Pak

$$i = \dot{U}/R_2 = 10 \underline{0^\circ} / 500 = 0,02 \underline{0^\circ} \text{ A} = 20 \underline{0^\circ} \text{ mA} .$$

Impedance, admittance, imittance

Víme, že induktor i kapacitor kladou jiný "odpor" stejnosměrnému a střídavému proudu. Ověříme to pokusem. Sériový člen RL budeme napájet nejprve stejnosměrným (ss) a pak střídavým napětím. V obou případech budeme měřit celkové napětí U a celkový

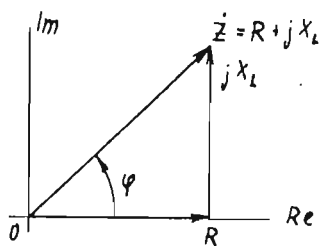


Obr. 7-16 K vysvětlení pojmu impedance

proud I. Celkový "odpor" pak určíme z Ohmova zákona.

Při stejnosměrném měření zjistíme tyto údaje : U_L = 0 V, U_R = U = 10 V, I = U/R = 0,149 A. Celkový odpor RL členu je proto R_c = U/I = 67Ω = R. Reaktance induktoru se neuplatnila, protože je nulová.

Při harmonickém napájení naměříme zcela jiné údaje. Induktor bude mít na kmitočtu 1000 Hz reaktanci X_L = ωL = 62,8Ω. Celkový "odpor" sériového spojení R a L označíme symbolem Z a nazveme impedance :



$$\dot{Z} = R + jX_L = (67 + j62,8)\Omega \hat{=} 91,8 \underline{43^\circ} \Omega = Z \underline{\varphi}$$

(viz obr. 7-17), obecně

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{I} \quad (7-6)$$

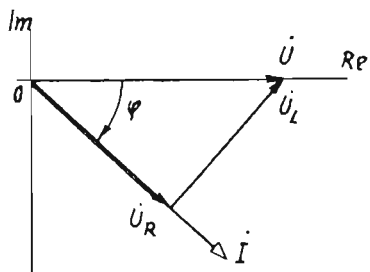
Vidíme, že impedance na kmitočtu 1000 Hz je již větší než celkový odpor při ss napájení:

Z = 91,8Ω > R_c = 67Ω. Navíc je impedance komplexní číslo s fází φ = 43°, což je fázový posuv mezi napětím U a proudem I. Proto ampérmetrem

Obr. 7-17

změříme proud I = U/Z = 10/91,8 = 0,109 A. Tento proud bude mít počáteční fázi φ_I = -φ_U - φ = -43°. Na rezistoru a induktoru změříme napětí U_R = RI = 7,3 V, U_L = X_LI = 6,84 V. Všimněte si, že součet hodnot U_R + U_L = 14,1 V > U=10V. Je tomu tak proto, že fázory U_R a U_L svírají pravý úhel, a proto se napětí U_R a U_L musí sčítat ve smyslu Pythagorovy věty. Ukazuje to fázorový diagram na obr. 7-18 :

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{7,3^2 + 6,84^2} \hat{=} 10 \text{ V} .$$



Poznámka : Admittance Y je "vodivost" obvodu v harmonickém ustáleném stavu. Určí se z impedance

Obr. 7-18

takto :

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z}$$

(7-7)

Společný název pro impedanci a admitanci je imittance.

Poznámka : impedance induktoru jX_L , $X_L = \omega L$
 impedance kapacitoru $-jX_C$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$

admitance induktoru $\frac{1}{jX_L} = -j \frac{1}{X_L} = -jB_L$, $B_L = \frac{1}{\omega L}$

admitance kapacitoru $\frac{1}{-jX_C} = j \frac{1}{X_C} = jB_C$, $B_C = \omega C$

Veličina $B = \frac{1}{X}$ se nazývá susceptance.

Řešení obvodů v harmonickém ustáleném stavu pomocí fázorů

Obvody v harmonickém ustáleném stavu, které obsahují prvky R, L, C, řešíme stejně jako obvody stejnosměrné s tím rozdílem, že u každého prvku spočítáme jeho impedanci (nebo admitanci). Pak používáme Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony v komplexním tvaru :

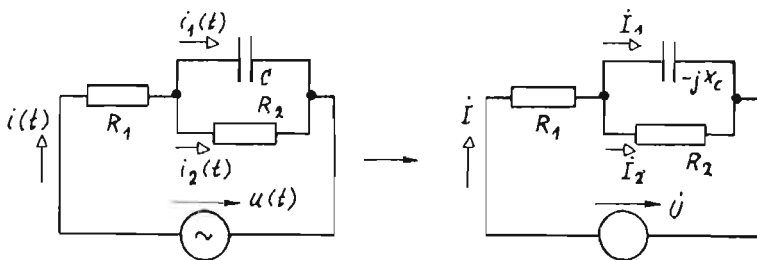
$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{Z} \dot{I} & \text{(nebo } \dot{I} = \dot{Y} \dot{U} \text{)} & \dots \text{ Ohmův zákon} \\ \sum_k \dot{I}_k = 0 & \dots \text{ 1. KZ (součet všech fázorů proudů, te-} \\ & \text{koucíoh do uzlu, je nula)} \\ \sum_k \dot{U}_k = 0 & \dots \text{ 2. KZ (součet všech fázorů napětí v} \\ & \text{uzavřené smyčce je nula)} \end{cases}$$

Z toho pak plynou obdobná pravidla jako u stejnosměrných obvodů :

$$\begin{cases} \dot{Z}_c = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots & \text{celková impedance sériově řazených impedancí je rovna} \\ & \text{jejich součtu} \\ \dot{Y}_c = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dots & \text{celková admitance paralelně řazených admitancí je rovna} \\ & \text{jejich součtu} \end{cases}$$

Analýzu obvodů v harmonické ustáleném stavu metodou zjednodušování objasníme na řešeném příkladu.

Př. 7-15 : Určete všechna napětí a proudy v obvodu na obrázku. Je dáno :



- $R_1 = 200 \Omega$
- $R_2 = 100 \Omega$
- $C = 10 \mu F$
- $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U)$
- $U_m = 100 V$
- $f = 50 Hz$
- $\psi_U = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

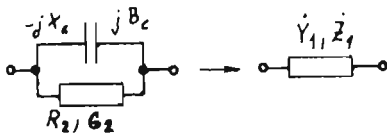
Obr. 7-19

Poznámka : Pro jednoduchost vynechte u fázorů index "m".

Řešení: 1. V obrázku nahradíme všechny okamžité hodnoty fázory a vypočteme reaktanci kapacitoru

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 318,3 \Omega, \quad B_C = \frac{1}{X_C} = 3,14 \cdot 10^{-3} S.$$

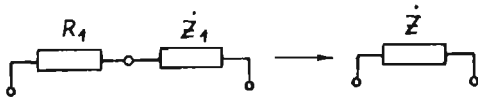
2. Vypočteme celkovou admitanci a impedanci paralelního řazení C, R₂ :



$$\dot{Y}_1 = G_2 + jB_C = (0,01 + j3,14 \cdot 10^{-3}) S = 1,05 \cdot 10^{-2} \angle 17,4^\circ S$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{\dot{Y}_1} = \frac{1}{1,05 \cdot 10^{-2} \angle 17,4^\circ} = (90,8 - j28,5) \Omega$$

3. Vypočteme celkovou impedanci obvodu



$$\begin{aligned} \dot{Z} &= R_1 + \dot{Z}_1 = 200 + 90,8 - j28,5 = \\ &= (290,8 - j28,5) \Omega = 292,2 \angle 5,6^\circ \Omega \end{aligned}$$

4. Celkový proud bude

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{100 \angle 30^\circ}{292,2 \angle -5,6^\circ} = 0,342 \angle 35,6^\circ A$$

5. Napětí na R₁

$$\dot{U}_{R_1} = R_1 \dot{I} = 200 \cdot 0,342 \angle 35,6^\circ = 68,4 \angle 35,6^\circ V$$

6. Napětí na Z₁

$$\dot{U}_{Z_1} = \dot{Z}_1 \dot{I} = 95,2 \angle -17,4^\circ \cdot 0,342 \angle 35,6^\circ = 32,6 \angle 18,2^\circ V$$

7. Proudů \dot{I}_1 a \dot{I}_2

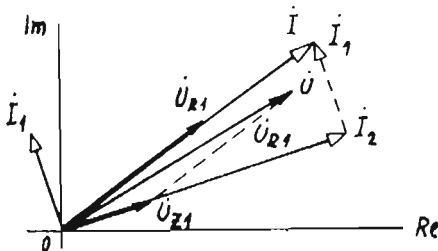
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{Z_1}}{-jX_C} = \frac{32,6 \angle 18,2^\circ}{-j318,3} = 0,102 \angle 108,2^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{Z_1}}{R_2} = \frac{32,6 \angle 18,2^\circ}{100} = 0,326 \angle 18,2^\circ A$$

Kontrola : $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}$

$$0,102 \angle 108,2^\circ + 0,326 \angle 18,2^\circ = 0,278 + j0,199 = 0,342 \angle 35,6^\circ = \dot{I}$$

Fázorový diagram :



Okamžité hodnoty :

$$u(t) = 100 \cos(\omega t + 30^\circ) V$$

$$u_{R_1}(t) = 68,4 \cos(\omega t + 35,6^\circ) V$$

$$u_{Z_1}(t) = 32,6 \cos(\omega t + 18,2^\circ) V$$

$$i(t) = 0,342 \cos(\omega t + 35,6^\circ) A$$

$$i_1(t) = 0,102 \cos(\omega t + 108,2^\circ) A$$

$$i_2(t) = 0,326 \cos(\omega t + 18,2^\circ) A$$

Obr. 7-20

Poznámka : Příklad je možno řešit libovolnou obecnou metodou analýzy : metodou Kirchhoffových a prvkových rovnic, metodou uzlových napětí či smyčkových proudů.

Otázky k samostatnému studiu

- 7-7 Popište chování prvků R, L a C v harmonickém ustáleném stavu. Napište pro tyto prvky Ohmův zákon v komplexním tvaru.
7-8 Co je to kapacitní a induktivní reaktance ? Uveďte jejich výpočet a závislost na kmitočtu.

- 7-9 Nakreslete časové průběhy napětí a proudu na prvcích R, L, C a příslušné fázorové diagramy.
 7-10 Vysvětlete pojmy impedance, admittance, imittance.
 7-11 Napište Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony v komplexním tvaru. Jaká pravidla platí pro výpočet imitancí sériově a paralelně řazených prvků?
 7-12 Jak se pozná podle znaménka $\varphi_{UI} = \varphi$, zda obvod má kapacitní nebo induktivní charakter?

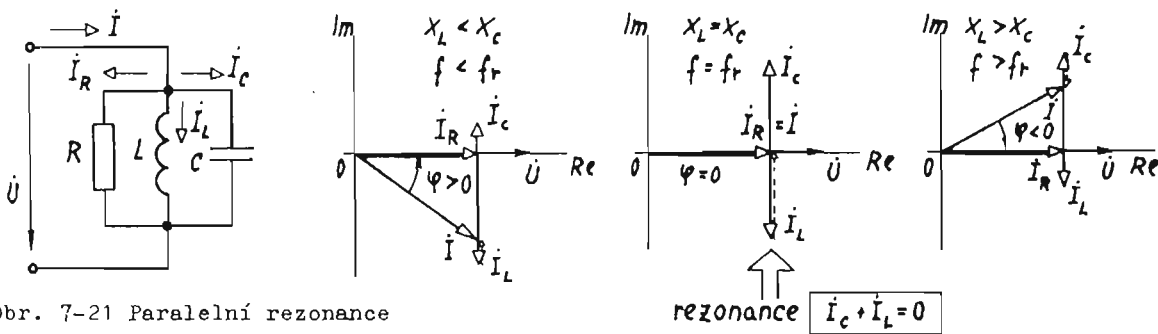
Příklady k procvičení

- 7-16 Vypočtete reaktanci kapacitoru o $C = 100 \text{ nF}$ a reaktanci induktoru o $L = 0,1 \text{ H}$ na kmitočtu (0, 1, 10, 100) kHz.
 Výsledek : $X_C = (\infty ; 1592 ; 159,2 ; 15,92) \Omega$,
 $X_L = (0 ; 628,3 ; 6283 ; 62832) \Omega$.
- 7-17 Sériová kombinace $R = 100 \Omega$ a $C = 100 \text{ nF}$ je napájena z harmonického zdroje o $f = 10 \text{ kHz}$. Na R bylo naměřeno napětí 10 V. Jaké napětí je na kapacitoru a na sériové kombinaci? Nakreslete fázorový diagram za předpokladu, že $\dot{I} = I \angle 0^\circ$.
 Výsledek : $\dot{U}_R = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_C = 15,9 \angle -90^\circ \text{ V}$, $\dot{U} = 18,8 \angle -57,8^\circ \text{ V}$, $\dot{I} = 0,1 \angle 0^\circ \text{ A}$.
- 7-18 Vypočtete impedanci sériového spojení $C = 500 \text{ nF}$ a $L = 1 \text{ mH}$ při kmitočtu $f = 100 \text{ kHz}$. Při jakém kmitočtu je impedance nulová?
 Výsledek : $j310 \Omega$, $71,2 \text{ kHz}$.

Obvody RLC. Rezonance

V obvodech, které obsahují rezistory, kapacitory a induktory, může dojít k zajímavému jevu. Při určitém kmitočtu zjistíme, že napětí a proud jsou ve fázi. Obvod se chová tak, jako kdyby vůbec neobsahoval prvky L a C. Tomuto jevu říkáme rezonance.

1) Paralelní rezonance



Obr. 7-21 Paralelní rezonance

Tvar fázorového diagramu paralelního obvodu RLC závisí na relaci mezi I_C a I_L . Tato relace závisí na kmitočtu signálu.

Sledujme tento logický řetěz : $f \rightarrow X_C, X_L \rightarrow I_C, I_L \rightarrow I \rightarrow \varphi$.

- a) kmitočet f malý : X_C velké, X_L malé $\rightarrow I_C$ malý, I_L velký $\rightarrow \varphi > 0$.
 Obvod má induktivní charakter.
- b) kmitočet f velký : X_C malé, X_L velké $\rightarrow I_C$ velký, I_L malý $\rightarrow \varphi < 0$.
 Obvod má kapacitní charakter.

Zřejmě existuje kmitočet, při kterém $X_C = X_L$:

$$f_r \dots : X_C = X_L \rightarrow I_C = I_L \rightarrow I = I_R \rightarrow \varphi = 0 \dots \text{ obvod má reálný charakter}$$

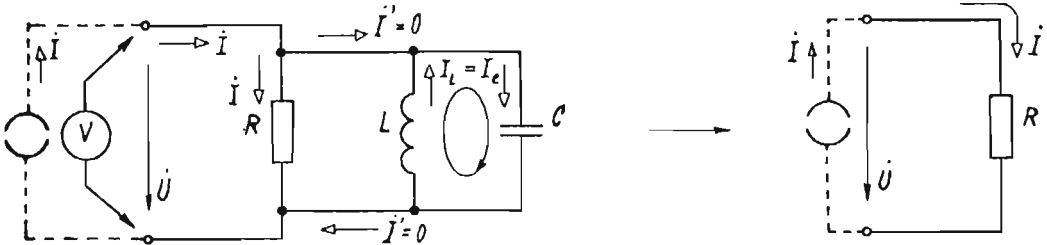
$$X_C = X_L \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = \omega L \Rightarrow \omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Thomsonův vztah pro rezonanční kmitočet :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

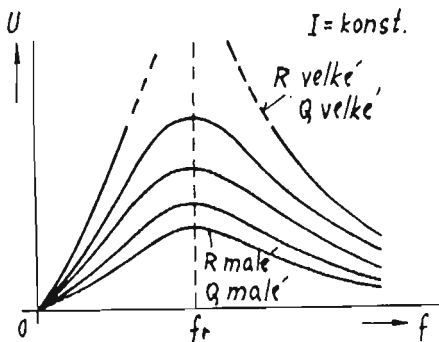
(7-8)

Jak poznáme měřením, že v obvodu došlo k rezonanci ?



Obr. 7-22 Chování paralelního obvodu RLC při rezonanci

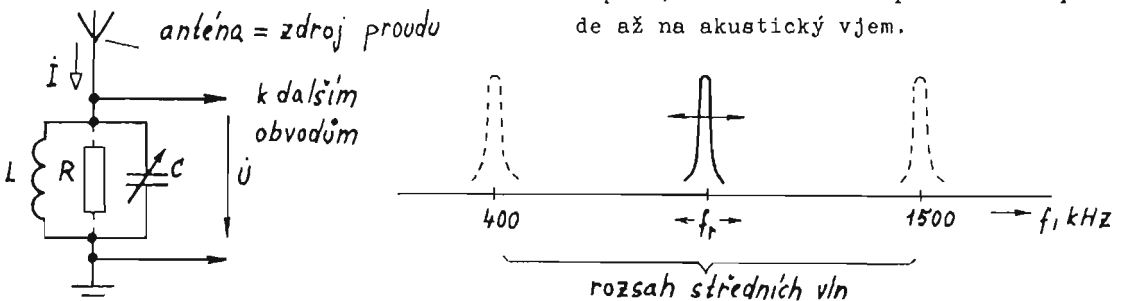
Budeme obvod napájet ze zdroje střídavého proudu \dot{I} a měřit napětí U . Toto napětí bude záviset na kmitočtu zdroje. Při nízkém kmitočtu bude reaktance $X_L = \omega L$ malá a bude zkratovávat svorky voltmetru. Měřené napětí bude malé. Naopak při vysokém kmitočtu bude sice reaktance $X_L = \omega L$ velká, avšak svorky voltmetru bude zkratovávat malá X_C , kde reaktance $X_C = 1/\omega C$. Měřené napětí bude opět nízké. V rezonanci, kdy $X_C = X_L$, platí $\dot{I}_C + \dot{I}_L = 0$, $\dot{I} = \dot{I}_R$ (viz vektorový diagram). Napětí U bude $U = R \cdot I$ a bude maximální možné. Mezi L a C dochází k neustálé výměně elektrické a magnetické energie a elektrické proudy \dot{I}_L a \dot{I}_C jsou uzavřeny ve smyčce podle obr. 7-22. Rezonanční obvod má čistě reálný charakter.



Obr. 7-23 Rezonanční křivka

Závislost napětí na kmitočtu je na obr. 7-23). Je to tzv. rezonanční křivka. Její tvar závisí na odporu R . Vysvětlete proč !

Na dalším obrázku je znázorněn princip použití rezonančního obvodu v rozhlasovém přijímači. Anténa zde funguje jako zdroj proudu. Otočným kondenzátorem C měníme rezonanční kmitočet např. v rozsahu středních vln. Při naladění na kmitočet vysílače se objeví na rezonančním obvodu napětí, které se dále zpracovává a převede až na akustický vjem.



Obr. 7-24 Využití paralelní rezonance v radiotechnice

K dobrému vyladění je třeba, aby rezonanční křivka byla dostatečně úzká. Obvod musí mít vysoký činitel jakosti Q. Jak se tento činitel určí ?

Q značí, kolikrát je proud akumulacním prvkem při rezonanci větší než "ztrátový"

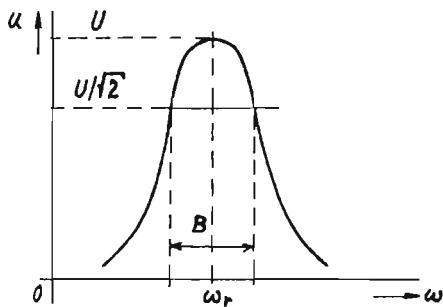
proud činným rezistorem : $I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{U/X_C}{U/R} = \frac{R}{X_C} = \omega_r RC$

Kromě činitele jakosti se definuje šířka pásma $B = \frac{\omega_r}{Q}$. (7-9)

Způsob definice šířky pásma je znázorněn na obr. 7-25. Čím je větší činitel jakosti, tím je menší šířka pásma.

Pro činitel jakosti platí jednoduchý vzorec

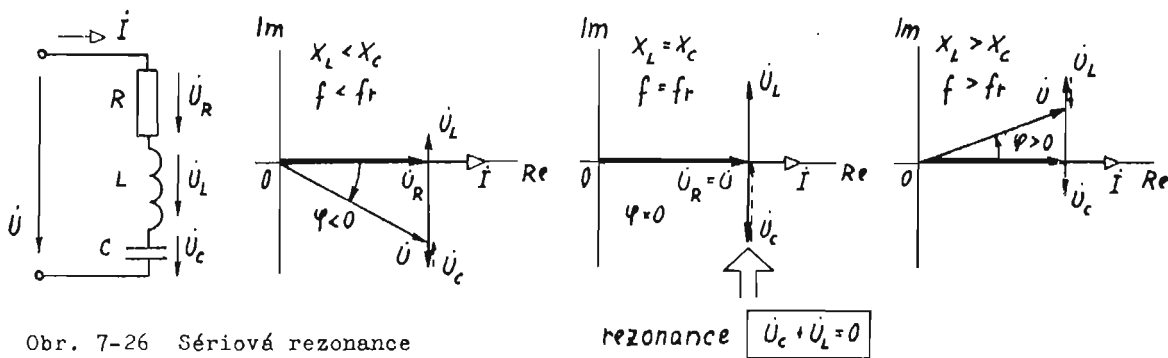
$$Q = \frac{R}{Z_0} , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7-10)$$



Obr. 7-25 K definici šířky pásma

Z_0 ... charakteristická impedance paralelního rezonančního obvodu. Odvoďte !

2) Sériová rezonance



Obr. 7-26 Sériová rezonance

Princip sériové rezonance je patrný z obrázku.

Určete :

a) při jakých kmitočtech má obvod kapacitní, induktivní a reálný charakter

Řešení : pro $f < f_r$ $\varphi < 0$ kapacitní
 pro $f = f_r$ $\varphi = 0$ reálný
 pro $f > f_r$ $\varphi > 0$ induktivní

b) jaká je impedance při rezonanci

Řešení : $Z = R$ reálná, minimální možná

c) jak zjistíme měřením, že došlo k rezonanci

Řešení : při napájení zdrojem napětí poteče maximální možný proud

d) jak určíme rezonanční kmitočet

Řešení : stejně jako u paralelního rezonančního obvodu z podmínky $X_L = X_C$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e) jaký je tvar rezonanční křivky $I = f(f)$, $U = \text{konst.}$

Řešení : stejný jako u rezonanční křivky paralelního rezonančního obvodu. Maximum = $I_{\text{max}} = U/R$

Jakost sériového rezonančního obvodu Q :

Q značí, kolikrát je napětí na akumulacním prvku při rezonanci větší než napětí na "ztrátovém" rezistoru

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{X_L I}{R I} = \frac{X_L}{R} = \omega_r \frac{L}{R}$$

Činitel jakosti je možno určit z vztahu

$$Q = \frac{Z_0}{R}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (7-11)$$

Z_0 ... charakteristická impedance sériového rezonančního obvodu. Odvoďte !

Poznámka : Principu rezonance se využívá v energetice k tzv. kompenzaci účinníku $\cos \varphi$. O této problematice bude pojednáno v kapitole o výkonech.

Otázky k samostatnému studiu

- 7-13 Vysvětlete pojem paralelní rezonance. Jaké vlastnosti má obvod při paralelní rezonanci ? Jakými veličinami se tyto vlastnosti popisují ? Uveďte jejich výpočet.
- 7-14 Popište rezonanční křivku paralelního rezonančního obvodu a princip využití tohoto obvodu v rozhlasovém přijímači. Jaké vlastnosti musí křivka mít v tomto případě ?
- 7-15 Vysvětlete pojem sériová rezonance. Jaké vlastnosti má obvod při sériové rezonanci ? Jakými veličinami se tyto vlastnosti popisují ? Uveďte jejich výpočet.

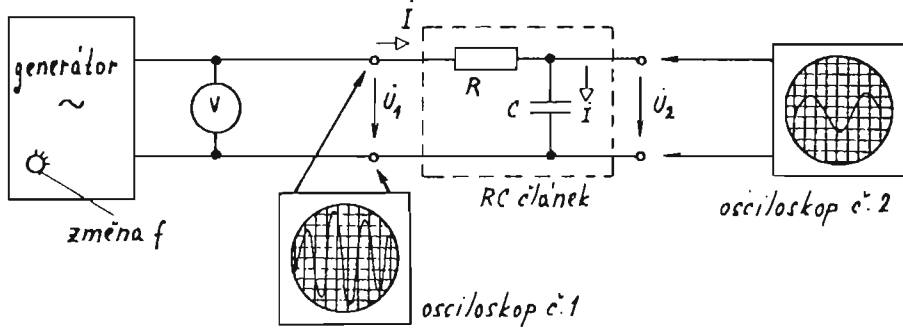
Příklady k procvičení

- 7-19 Odvoďte vzorec pro impedanci sériového rezonančního obvodu RLC. Jaká je impedance při rezonanci ?
Výsledek : $\dot{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, $\dot{Z}_r = R$.
- 7-20 Odvoďte vzorec pro admitanci paralelního rezonančního obvodu RLC. Jaká je admitance při rezonanci ?
Výsledek : $\dot{Y} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$, $\dot{Y}_r = \frac{1}{R}$.
- 7-21 Jaký kapacitor musíme připojit paralelně k induktoru o $L = 1 \mu\text{H}$, aby došlo k rezonanci na kmitočtu 1 MHz ?
Výsledek : 25,3 nF.
- 7-22 Paralelní rezonanční obvod je kapacitorem $C = 330 \text{ pF}$ naladěm na rezonanční kmitočet 1 MHz. Jak velký musí být celkový paralelní odpor R, abychom dosáhli šířky pásma $B = 9 \text{ kHz}$?
Výsledek : $R = 336,7 \text{ k}\Omega$.

Kmitočtové charakteristiky

Provedeme pokus : budeme zjišťovat tzv. kmitočtovou charakteristiku RC článku na obr. 7-27. Na vstup článku připojíme generátor (zdroj) harmonického signálu

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \dots \quad \dot{U}_{1m} = U_{1m} \frac{1}{\omega}$$



Obr. 7-27 Princip měření kmitočtové charakteristiky RC článku

Tento signál můžeme sledovat oscilóskopem č.1. Na výstupu RC článku budeme sledovat harmonické napětí $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \psi_2)$ $\dot{U}_{2m} = U_{2m} \angle \psi_2$.

Obě napětí se budou lišit - budou mít jinou amplitudu i počáteční fázi. Říkáme, že vstupní signál $u_1(t)$ se přenesl ze vstupu na výstup a změnil se : je zeslabený a časově (i fázově) zpožděný.

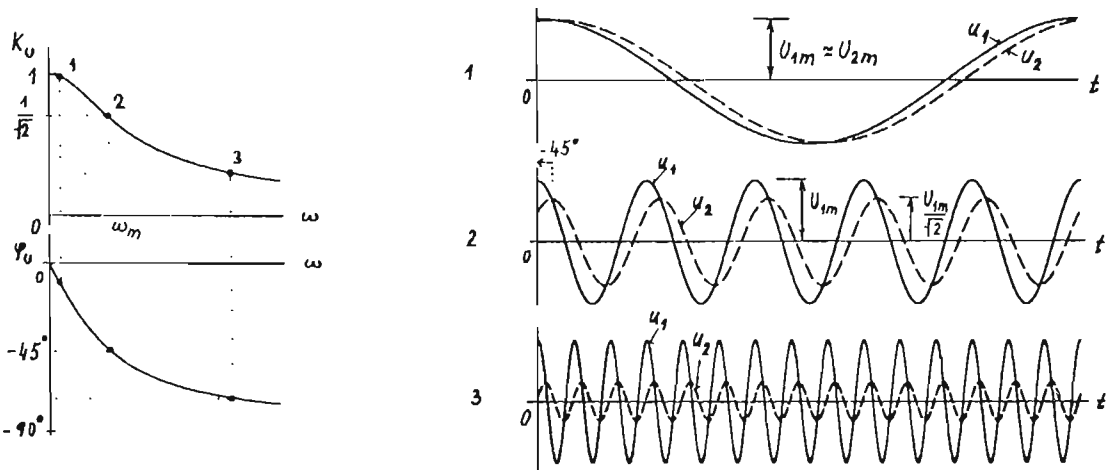
Kdybychom nyní změnili kmitočet ω na generátoru, viděli bychom, že vztah mezi u_1 a u_2 je zase jiný. Zeslabení i fázový posuv jsou závislé na kmitočtu, protože obvod obsahuje kmitočtově závislý prvek - kapacitor. RC článek funguje jako dělič napětí. Protože X_C závisí na kmitočtu, bude se přenos tohoto děliče měnit s kmitočtem. Při nízkém kmitočtu je X_C velká a $u_1 \approx u_2$. S rostoucím kmitočtem X_C klesá, zkratovává výstupní svorky a u_2 klesá. Výpočet \dot{U}_2 je jednoduchý :

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{-jX_C}{-jX_C + R} = \dot{U}_1 \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{-j \frac{1}{\omega C} + R} = \dot{U}_1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Určíme, kolikrát je \dot{U}_2 větší než \dot{U}_1 . K tomu slouží přenos napětí \dot{K}_U :

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\arctg \omega RC = K_U \angle \psi_U$$

Přenos napětí je komplexní číslo. Modul K_U říká, jaký je poměr amplitud U_{2m} a U_{1m} .



Obr. 7-28 Kmitočtová charakteristika RC článku a odpovídající časové průběhy

Argument (fáze) říká, jaký je fázový posuv mezi \dot{U}_1 a \dot{U}_2 . Modul i fáze jsou funkcí kmitočtu ω . Graf $K_U(\omega)$ se nazývá amplitudová (modulová) kmitočtová charakteristika, graf $\varphi_U(\omega)$ fázová (argumentová) kmitočtová charakteristika. Význam charakteristik je zřejmý z obr. 7-28.

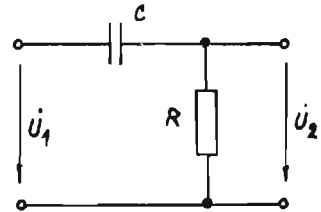
Otázky k samostatnému studiu

- 7-16 Co je to přenos napětí ? Proč byl zaveden ? Jakou má jednotku ?
 7-17 Co je to amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika ? K čemu slouží ?
 7-18 Vysvětlete tvar amplitudové kmitočtové charakteristiky RC článku na obr.7-28.
 7-19 Pomocí fázorového diagramu vysvětlete tvar fázové kmitočtové char. RC článku.

Příklady k procvičení

7-23 Mezní kmitočet ω_m RC článku na obr. 7-27 je kmitočet, při kterém klesne přenos napětí K_U na hodnotu $1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Vypočtete jeho hodnotu pomocí R a C. Výsledek : $\omega_m = 1/RC$.

7-24 Odvoďte kmitočtovou charakteristiku článku na obrázku. Nakreslete časové průběhy pro různé kmitočty podobně jako u obr. 7-28.
 Výsledek : $K_U = j\omega RC / (1 + j\omega RC)$.

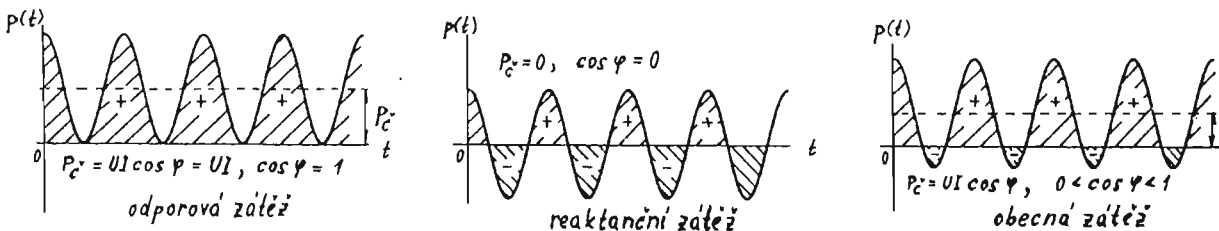


7.5 VÝKONY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

V harmonickém ustáleném stavu se mění napětí i proud dvojpólu (zátěže) harmonicky s časem, např.: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, $i(t) = I_m \cos \omega t$. Proto se s časem mění i výkon na zátěži : $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Po dosazení a úpravě vyjde

$$p(t) = \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{konstantní složka}} + \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi)}_{\text{proměnná složka}} \quad (7-12)$$

Na obr. 7-29 jsou nakresleny časové průběhy $p(t)$ pro různé fázové posuvy φ mezi



Obr. 7-29 Průběhy okamžitého výkonu na různých typech zátěží

napětím a proudem. Pro $\varphi=0$ má zátěž odporový charakter a výkon je stále kladný, takže zátěž se stále chová jako spotřebič. Průměrná hodnota výkonu je $UI \cos \varphi = UI$. Tento výkon způsobuje zahřívání zátěže nebo je schopen konat jinou práci. Proto se nazývá činný výkon. Obecně se vypočte z vzorce

$$P_c = UI \cos \varphi \quad [W] \quad (7-13)$$

Jednotka je 1 W (watt). Další obrázek ukazuje průběh výkonu na reaktanční zátěži s prvky typu L a C. V jedné půlperiodě je výkon dodáván do zátěže, v další půlperiodě se vrací zpět do zdroje. Střední hodnota výkonu je nula, takže tohoto výkonu není možno využít ke konání práce, např. k ohřevu, k pohánění motorů atd. Proto se tento výkon nazývá jalový a vypočte se z vzorce

$$P_j = UI \sin \varphi \quad [VAR] \quad (7-14)$$

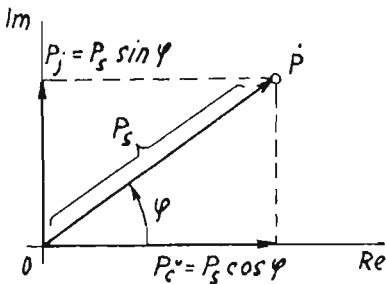
Jednotka je 1 VAR (voltampér reaktanční). Poslední obrázek ukazuje průběh výkonu na libovolné RLC zátěži. Činný výkon je menší než v případě čistě odporové zátěže, protože je zmenšen o jalový výkon. Součin

$$P_s = UI \quad [VA] \quad (7-15)$$

je tzv. zdánlivý výkon. Je to maximální hodnota činného výkonu, které bychom dosáhli při $\cos \varphi = 1$. Jednotka je 1 VA (voltampér).

Veličině $\cos \varphi$ se v energetice říká účinník. Ideální je stav, kdy $\cos \varphi = 1$ (maximální P_c , nulový P_j).

Vztah mezi výkony udává tzv. trojúhelník výkonů. Obr. 7-30 znázorňuje tzv.



komplexní výkon \dot{P} :

$$\dot{P} = P_c + j P_j \quad (7-16)$$

který můžeme vypočítat jako součin fázoru napětí \dot{U} a komplexně sdruženého fázoru proudu \dot{I}^* :

$$\dot{P} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* \quad [VA] \quad (7-17)$$

Reálná složka \dot{P} udává přímo činný výkon, imaginární složka jalový výkon. Modul je roven zdánlivému výkonu a fáze φ je fázový posuv mezi napětím a proudem.

Obr. 7-30 Trojúhelník výkonů

Př. 7-16 : Měřením na elektrickém spotřebiči bylo zjištěno :

$u(t) = 311 \cos \omega t$ V, $i(t) = 3,214 \cos(\omega t + 26^\circ)$ A. Určete trojúhelník výkonů a účinník.

Řešení :

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{U} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{I} = 2,273 \angle 26^\circ \text{ A}, \quad \dot{P} = \dot{U} \dot{I}^* = 220 \cdot 2,273 \angle -26^\circ = \\ &= 500 \angle -26^\circ \text{ VA}. \end{aligned}$$

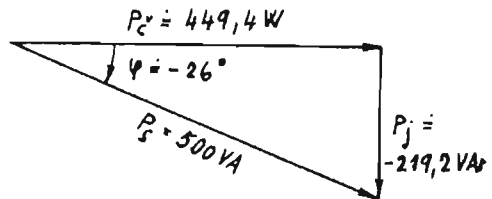
Z komplexního výkonu vypočteme P_s , P_c a P_j :

$$P_s = P = 500 \text{ VA}$$

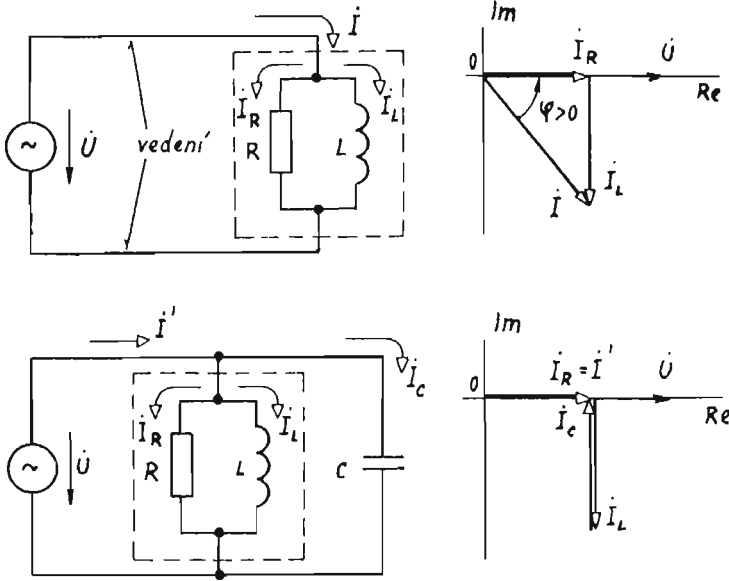
$$P_c = P \cos \varphi = 449,4 \text{ W}$$

$$P_j = P \sin \varphi = -219,2 \text{ VAR}$$

Induktivní zátěž, $\cos \varphi = 0,899$.



Kompence účinníku



K zdroji napětí je přes vedení připojen spotřebič indukčního charakteru (např. el. motor). Z obr. 7-31 plyne, že $\varphi > 0$ a $I > I_R$; proud vedením je větší než činný proud I_R , který koná práci. Na vedení proto vznikají zbytečně velké úbytky napětí a ztráty. Využijeme jevu paralelní rezonance: Připojíme paralelně k spotřebiči kapacitor. Další obrázek ukazuje, že pak $I' = I_R$. Proud vedením je nyní roven proudu I_R , je menší než v prvním případě a způsobuje na vedení menší ztráty.

Obr. 7-31

Podmínka výkonového přizpůsobení v harmonickém ustáleném stavu

V kapitole 3.2 jsme řešili otázku, kdy je ze stejnosměrného zdroje do odporové zátěže dodáván maximální výkon. U střídavých obvodů v harmonickém ustáleném stavu bude problém obdobný. Ze zdroje o vnitřním napětí \dot{U}_1 a vnitřní impedanci \dot{Z}_1 je napájena zátěž \dot{Z}_2 . Úkolem je nalézt podmínku mezi \dot{Z}_1 a \dot{Z}_2 takovou, aby činný výkon, přenášený ze zdroje do zátěže, byl maximální. Řešení sestavíme z těchto poznatků:

- a) Činný výkon vzniká na odporové složce zátěže \dot{Z}_2 , t.j. na R_z .
- b) Na rezistoru R_z je maximální výkon, když jím teče maximální proud I .
- c) Obvodem teče maximální proud, jestliže dojde k sériové rezonanci: $jX_1 + jX_z = 0$.
Celková impedance je $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_z = R_1 + jX_1 + R_z + jX_z = R_1 + R_z$, je tedy za rezonance minimální. Platí-li podmínka $jX_1 + jX_z = 0$, pak se při přenosu výkonu uplatní pouze rezistory R_1 a R_z .
- d) Jestliže se při přenosu výkonu uplatní jen R_1 a R_z , pak při známé podmínce $R_1 = R_z$ bude výkon na R_z maximální.

Shrňme: Podmínka výkonového přizpůsobení

$$\left. \begin{array}{l} 1. jX_1 + jX_z = 0 \\ 2. R_1 = R_z \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 \\ \dot{Z}_z = R_1 - jX_1 \end{array} \right\} \boxed{\dot{Z}_1 = \dot{Z}_z^*} \quad (7-18)$$

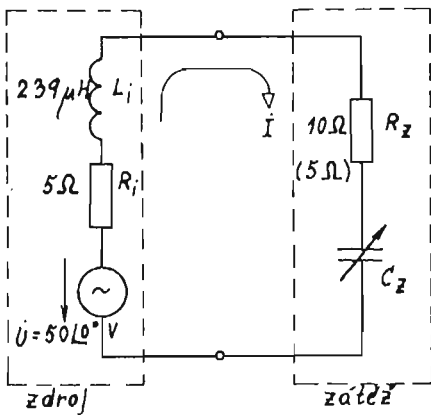
Jsou-li splněny podmínky 1 i 2, hovoříme o úplném výkonovém přizpůsobení.
Je-li splněna jen podmínka 1 nebo 2, hovoříme o neúplném (částečném) přizpůsobení.

Př. 7-17: a) Najděte takovou hodnotu kapacity C_z , aby výkon na rezistoru R_z byl maximální.

b) Jak se změní velikost tohoto výkonu, bude-li $R_z = 5 \Omega$?

Řešení: Protože $R_z \neq R_1$, dojde jen k částečnému přizpůsobení. Můžeme splnit pouze

podmínku $jX_L - jX_C = 0$, t.j. docílit sériové rezonance :



$$j\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_z} \Rightarrow C_z = \frac{1}{\omega^2 L_1} = \frac{1}{(2\pi \cdot 2000)^2 \cdot 239 \cdot 10^{-6}} = 26,5 \mu\text{F}.$$

$$\text{Pak } \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_z} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 + 10} = 3,3 \text{ A}$$

$$P_{\check{c}} = R_z I^2 = 10 \cdot 3,3^2 = 111,1 \text{ W},$$

$$\text{obecně } P_{\check{c}} = U^2 \frac{R_z}{(R_1 + R_z)^2}.$$

b) Při $R_z = 5 \Omega$ dojde k úplnému přizpůsobení. Pak

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_z} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 + 5} = 5 \text{ A}$$

$$P_{\check{c}} = R_z I^2 = 5 \cdot 25 = 125 \text{ W}, \quad \text{obecně } P_{\check{c}} = U^2 \frac{R_1}{(R_1 + R_1)^2} = \frac{U^2}{4R_1}.$$

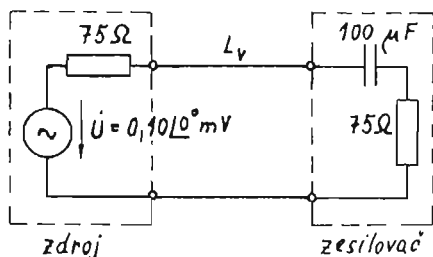
Při úplném přizpůsobení vyšel výkon větší než při částečném.

Otázky k samostatnému studiu

- 7-20 Jak vypadá časový průběh výkonu na rezistoru, na akumulacním prvku a na obecné RLC zátěži v harmonickém ustáleném stavu? Jaký je činný a jalový výkon v uvedených případech?
- 7-21 Co je to činný, jalový a zdánlivý výkon? Ukažte způsob výpočtu a napište jednotky.
- 7-22 Co je to komplexní výkon? Jak se z něj určí činný, jalový a zdánlivý výkon, účinník a charakter zátěže? Jak se komplexní výkon určí z fázorů napětí a proudů?
- 7-23 Co je to kompenzace účinníku, proč a jak se provádí?
- 7-24 Co znamená výkonové přizpůsobení ve střídavém obvodu v harmonickém ustáleném stavu?
- 7-25 Napište a vysvětlete podmínky úplného výkonového přizpůsobení.
- 7-26 Jaký je rozdíl mezi úplným a částečným výkonovým přizpůsobením?

Příklady k procvičení

- 7-25 Obvod je napájen napětím $u = 200 \sin(\omega t + 110^\circ)$ V a odebírá proud $i = 5 \sin(\omega t + 20^\circ)$ A. Určete trojúhelník výkonů.
Výsledek : $P_{\check{c}} = 0$, $P_j = 500 \text{ VAR}$, $P_g = 500 \text{ VA}$, $\cos \varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$... induktivní zátěž.
- 7-26 Dvě impedance $Z_1 = 5,83 \angle -59^\circ \Omega$ a $Z_2 = 8,95 \angle 63,4^\circ \Omega$ jsou v sérii a prochází jimi efektivní proud 5 A. Určete trojúhelník výkonů.
Výsledek : $P_{\check{c}} = 175 \text{ W}$, $P_j = 75 \text{ VAR}$, $P_g = 190 \text{ VA}$, $\cos \varphi = 0,919$, $\varphi = 23,2^\circ$... induktivní zátěž.
- 7-27 Elektrický motor má náhradní schéma podle obr. 7-31, $R = 48 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$. Určete $\cos \varphi$, je-li motor napájen ze sítě o kmitočtu 50 Hz. Vypočtete kapacitu C_X kondenzátoru, který musíme připojit paralelně k motoru, abychom provedli kompenzaci účinníku na $\cos \varphi = 1$.
Výsledek : $\cos \varphi = 0,837$; $C_X = 101,3 \mu\text{F}$.



Zesilovač je napájen ze zdroje signálu vedením o indukčnosti $L_v = 0,2 \text{ mH}$ podle obrázku. Určete velikost přeneseného činného výkonu při kmitočtu $f = 1 \text{ kHz}$. Při jakém kmitočtu dojde k úplnému přizpůsobení ?

Výsledek : $33,3 \mu\text{W}$; $f = 1,125 \text{ kHz}$.

7.6 MĚŘENÍ STŘÍDAVÝCH VELIČIN

Protože střídavé veličiny se neustále mění v čase, můžeme k jejich měření přistoupit dvěma způsoby :

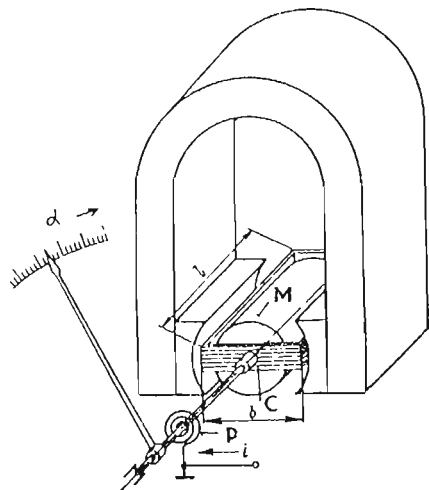
1. Známe-li tvar měřeného průběhu (např. při měření harmonického signálu), pak stačí měřit jen "průměrné" hodnoty průběhu - střední nebo efektivní hodnotu.
2. Neznáme-li tvar měřeného průběhu, musíme navíc provést jeho zobrazení pomocí osciloskopu nebo elektromechanického zapisovače.

a) Měření napětí, proudu a výkonu

Všechna tato měření jsou založena na společném principu : měřicí systém převádí elektrický proud na výchylku ukazatele. V praxi se nejčastěji setkáme s těmito měřicími systémy : 1. magnetoelektrické (ME), 2. feromagnetické (FM), 3. elektrodynamické (ED) a ferodynamické (FD).

Kromě toho lze napětí a proud měřit tzv. číslicovými multimetry, kde naměřený údaj čteme přímo na displeji měřidla.

1. Magnetoelektrické (ME) měřicí přístroje. Na obr. 7-32 je náčrtek ME měřicího



systemu. Permanentní magnet "M" vytváří ve vzduchové mezeře magnetické pole, v kterém je umístěna otočná cívka "C". S cívkou je spojena ručička, která udává výchylku na stupnici přístroje. Cívka je udržována v klidové poloze pružinami "P", které zároveň slouží pro přívod proudu do cívky. Při průtoku proudu cívkou se cívka vychýlí z klidové polohy, protože na vodič v magnetickém poli, kterým protéká proud, působí síla. Výchylka α je tím větší, čím větší je elektrický proud i :

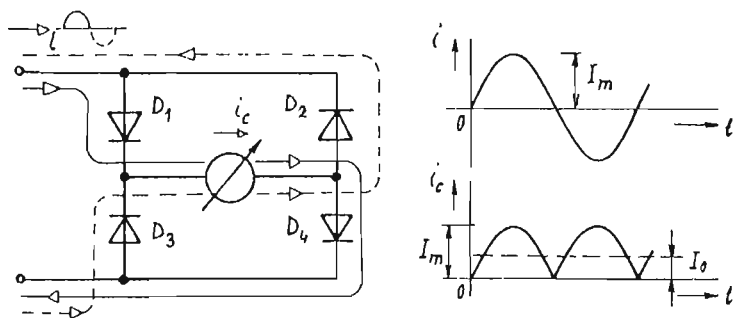
$$\alpha \sim i \quad (7-19)$$

Jestliže cívka systému má odpor R_{mp} , pak jej můžeme použít buď jako A-metr pro měření proudu $i = 0$ až i_{max} , nebo jako V-metr pro měření napětí $u = 0$ až u_{max} , kde

$$u_{max} = R_{mp} \cdot i_{max} \quad (7-20)$$

Obr. 7-32 Magnetoelektrický měřicí systém

ME systémy jsou velmi citlivé, a proto výsledek měření je ovlivňován rušivými vlivy. Z toho důvodu jsou citlivé μA -metry méně přesné (1,5 % až 2,5 %). Při změně proudu i by se podle (7-19) měla současně měnit i výchylka α . Protože však pohyb ručičky probíhá s určitou setrvačností, nestačí ručička sledovat rychlé změny proudu a reaguje pak na "průměrnou" - střední hodnotu proudu. Protože střední hodnota střídavého proudu je nula (viz obr. 7-6), nelze tyto střídavé proudy přímo měřit ME systémy. Měřicí systém musíme doplnit tzv. usměrňovačem (obr. 7-33). Z obrázku



Obr. 7-33 ME systém s usměrňovačem

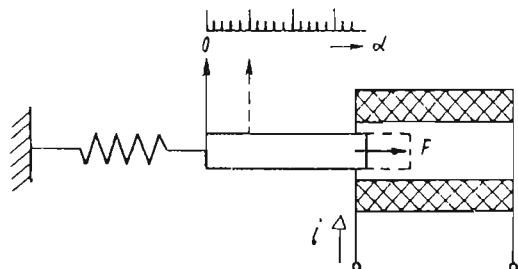
je zřejmé, že pro kladnou půlvlnu proudu jsou otevřeny diody D_1 a D_4 , pro zápornou půlvlnu D_2 a D_3 . Měřicím systémem protéká vždy proud stejného směru. Střední hodnota I_0 tohoto proudu již není nula, ale závisí na maximální nebo efektivní hodnotě měřeného proudu. Takovýto střídavý Λ -metr

proto bývá přímo oceňován v efektivních hodnotách harmonického signálu. Pokud je však měřený signál jiný než harmonický, naměřený údaj bude nesprávný (u tohoto signálu bude jiný vztah mezi střední hodnotou I_0 a efektivní hodnotou než u harmonického signálu).

Pro použití bočníků a předřadných rezistorů můžeme ME systém s usměrňovačem použít jako vícerozsahový přístroj pro měření napětí i proudu. Protože ve skutečnosti diody začnou propouštět proud až při napětí $\geq 0,3 \text{ V}$, nelze menší napětí měřit a stupnice je pro malé výchylky nelineární. Rovněž přesnost přístrojů s usměrňovačem je horší než přesnost samotného systému.

Poznámka : Měřicí transformátory. Používají se pro měření velkých hodnot střídavých napětí a proudů. Transformátory snižují měřené hodnoty tak, aby je bylo možno měřit přístroji s nižšími měřicími rozsahy. Měřená hodnota se určí vynásobením údaje měřidla a převodu transformátoru. Podle použití rozeznáváme tzv. měřicí transformátory napětí a proudu. Na principu měřicího transformátoru proudu pracuje klešťový ampérmetr. Primár je tvořen jediným závitem ve tvaru čelistí, kterými obemkne vodič, jehož proud měříme. Výhoda je v tom, že při měření proudu nemusíme rozpojovat obvod.

2. Feromagnetické (FM) měřicí přístroje. Princip je na obr. 7-34. Průchodem proudu



Obr. 7-34 FM měřicí systém

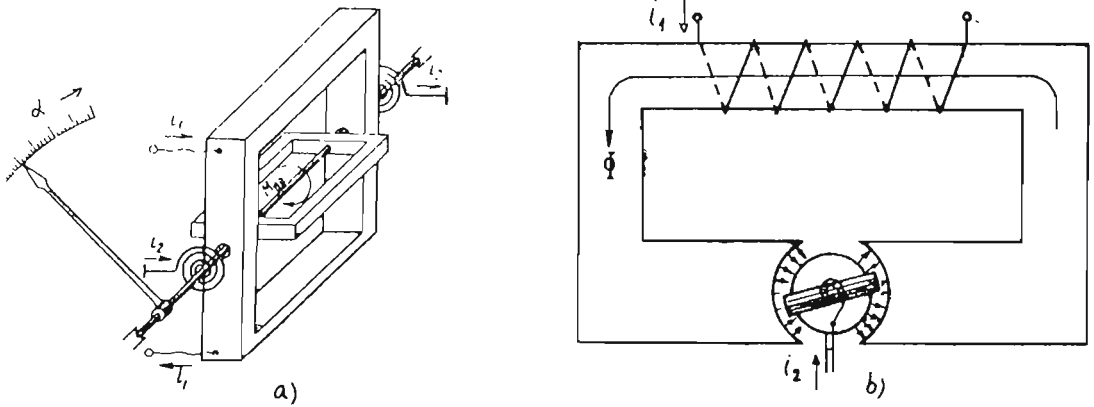
vzniká v dutině cívky magnetické pole, které do dutiny vtlahuje feromagnetické jádro. Lze dokázat, že výchylka α bude přímo úměrná i^2 mocnině proudu :

$$\alpha \sim i^2 \quad (7-21)$$

a proto nezávisí na směru proudu. FM měřicí systémy jsou tedy vhodné k přímému měření střídavého proudu bez potřeby usměrňovače. Při měření střídavého proudu už ukazatel nestačí sledo-

vat rychlé změny a reaguje proto na střední hodnotu druhé mocniny proudu, což je druhá mocnina efektivní hodnoty. Feromagnetický A-metr je proto přímo ocejchován v efektivních hodnotách signálu. Tento systém lze opět využít k měření proudu i napětí. FM přístroje jsou méně citlivé než přístroje ME, jsou však přesnější. Jsou více citlivé na vnější rušivá pole.

3. Elektrodynamické (ED) a ferodynamické (FD) měřicí přístroje. ED systém se



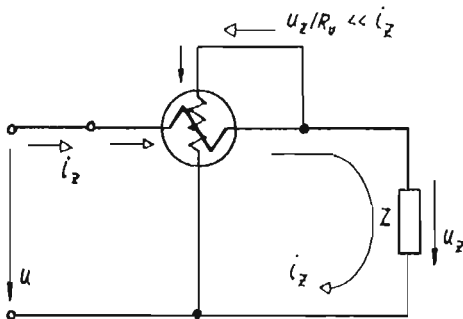
Obr. 7-35 Elektrodynamickej a) a ferodynamickej b) měřicí systém

skládá z pevné a otočné cívky. Protéká-li oběmi cívkami proud, pak každá z nich vytváří magnetické pole a mezi cívkami vznikají magnetické síly. Protéká-li dvěma rovnoběžnými vodiči proud stejného směru, pak se přitahují, v opačném případě odpužují. Síla je úměrná součinu proudů. Proto z obr. 7-35a plyne, že dojde k natočení pohyblivé cívky a výchylka bude

$$\alpha \sim i_1 \cdot i_2 \quad (7-22)$$

FD systém pracuje na podobném principu. Pevná cívka je však navinuta na železném jádře a vytváří magnetické pole v prostoru pohybu otočné cívky podobně jako u ED systému. Výchylka je opět dána součinem proudů.

Největší uplatnění tyto systémy našly při měření činného výkonu jako wattmetry. Princip měření činného výkonu na zátěži Z je na obr. 7-36. Pevná cívka je zapojena do série se zátěží, aby jí tekla



Obr. 7-36 Měření činného výkonu

proud zátěže i_z . Je to tzv. proudová cívka. Otočná cívka je připojena paralelně k zátěži, kde je napětí u_z . Říkáme jí napěťová cívka. Je-li odpor obvodu napěťové cívky R_u , pak napěťovou cívku teče proud u_z/R_u . Výchylka je úměrná součinu proudů oběmi cívkami :

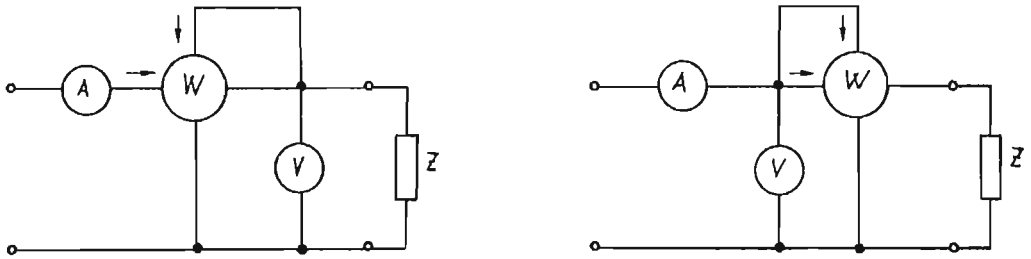
$$i_z \cdot u_z/R_u = p_z/R_u, \text{ neboli}$$

$$\alpha \sim p_z \quad (7-23)$$

Výchylka je tedy úměrná okamžitému výkonu na zátěži. Při rychlých změnách měřeného průběhu se opět uplatní setrvačnost systému a přístroj bude reagovat na střední hodnotu okamžitého výkonu, což je činný výkon.

Napěťovou či proudovou cívku wattmetru (W-metru) lze snadno přetížit, aniž

bychom to pozorovali na výchylce. Proto zapojujeme do měřeného obvodu kontrolní A-metr a V-metr, kterými hlídáme, aby napětí na napěťové cívce a proud proudovou cívkou nepřesáhly nastavené rozsahy. Dvě varianty zapojení W-metru jsou na obr. 7-37. Měření je v obou případech zatíženo chybou metody, jejíž rozbor je proveden v laboratorních návodech. Při zapojování W-metru do obvodu musíme dát pozor na to,



Obr. 7-37

aby cívky byly připojeny se správnou polaritou. Polarita cívek je jak na přístroji, tak i ve schématu označena šipkou. Při nesprávné polaritě ukazuje W-metr opačnou výchylku.

Přepočct mezi výchylkou α_w a měřeným výkonem P_c provádíme podle vzorce

$$P_c = \alpha_w \cdot k_w \quad (7-24)$$

kde

$$k_w = \frac{U_{MAX} I_{MAX}}{\alpha_{max}} \cos \varphi_n \quad (7-25)$$

je konstanta W-metru a U_{MAX} nastavený napěťový rozsah
 I_{MAX} nastavený proudový rozsah
 $\cos \varphi_n$... jmenovitý účinek W-metru.

POZOR! $\cos \varphi_n$ je parametr W-metru, vyznačený na jeho panelu. Je nutno jej odlišovat od fázového posuvu mezi \dot{U} a \dot{I} v měřeném obvodu! Vysvětlíme jeho význam.

Činný výkon se vypočte podle vztahu (7-13) $P_c = UI \cos \varphi$. W-metr proto bude ukazovat velkou výchylku v obvodech odporového charakteru ($\cos \varphi \approx 1$) a malou výchylku v obvodech reaktančního charakteru ($\cos \varphi \approx 0$). Malá výchylka znamená velkou chybu měření. Proto je vhodné k měření výkonů v obvodech, kde $\cos \varphi < 0,5$, používat W-metry se zvýšenou citlivostí. Citlivost je dána jmenovitým účínkem $\cos \varphi_n$ W-metru. Např. W-metr s $\cos \varphi_n = 0,1$ ukazuje při stejném činném výkonu 10x větší výchylku než W-metr s $\cos \varphi_n = 1$.

Poznámka : Měření účíniku. Provádí se nepřímým měřením činného výkonu P_c a zdánlivého výkonu $P_g = UI$. Potom

$$\cos \varphi = \frac{P_c}{P_g} \quad (7-26)$$

Induktivní či kapacitní charakter zátěže se určí pomocnou reaktancí (viz laboratorní návody). Kromě toho existují přímoukazující fázoměry.

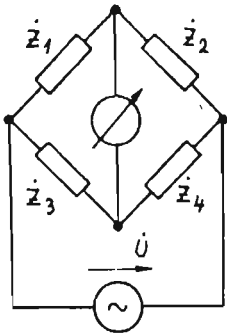
b) Měření impedancí

K úplnému určení impedance $\dot{Z} = Z \angle \varphi = R + jX$ je třeba určit buď její modul Z a argument φ , nebo její složky R a X . Např. při měření kondenzátorů a cívek měříme

imaginární složku (reaktanci) a činnou složku (ztrátový odpor). Známe-li použitý kmitočet, pak z reaktance určíme kapacitu nebo indukčnost. Můžeme měřit tzv. paralelní nebo sériové modely kondenzátorů a cívek (viz laboratorní návody). K měření impedance obecného dvoj pólu používáme několika metod.

1. Výchylkové metody. Modul impedance lze nepřímo zjistit měřením napětí a proudu : $Z = U/I$. Schéma zapojení je stejné jako v případě měření odporů (např. obr. 3-45). Zajímá-li nás i argument φ , je vhodné použít zapojení s W-metrem na obr. 7-37 (do kmitočtů max. 500 Hz); $\cos \varphi$ pak určíme z (7-26). K úplnému určení \dot{Z} se používá i metoda tří voltmetrů nebo metoda tří ampérmetrů. První z nich je popsána v laboratorních návodech.

2. Nulové metody. K přesnějšímu měření reálných a imaginárních složek impedancí se používají střídavé můstky. Zapojení střídavých můstků je obdobné jako u stejnosměrných můstků, pouze rezistory jsou nahrazeny impedancemi a napájení můstku



je harmonické. Jako nulový indikátor lze použít střídavý V-metr, sluchátka apod. Podobně jako u odporových můstků má podmínka rovnováhy tvar

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 \quad (7-27)$$

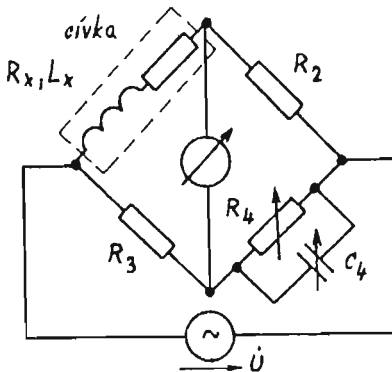
Protože tato komplexní rovnice musí platit pro reálné i imaginární složky, je možno ji zapsat jako dvě rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\dot{Z}_1 \dot{Z}_4\} &= \operatorname{Re}\{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3\}, \\ \operatorname{Im}\{\dot{Z}_1 \dot{Z}_4\} &= \operatorname{Im}\{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3\}. \end{aligned} \quad (7-28)$$

Obr. 7-38 Střídavý můstek

Z toho plyne, že můstek je v rovnováze, jsou-li v rovnováze současně reálné (odporové) a imaginární (reaktanční) složky ve větvích můstku. Proto na rozdíl od odporových můstků musíme provádět vyvažování dvěma proměnnými prvky - rezistorem a kapacitorem nebo rezistorem a induktorem.

Jako příklad uveďme Maxwell-Wienův můstek pro měření indukčnosti a ztrátového odporu cívky. Pro rovnováhu platí



Obr. 7-39 Maxwell-Wienův můstek

$\dot{Z}_1 = R_2 R_3 \cdot \frac{1}{\dot{Z}_4} = R_2 R_3 \dot{Y}_4$. Po dosazení za \dot{Z}_1 a \dot{Y}_4

$$R_x + j\omega L_x = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \right), \text{ neboli}$$

$$R_x + j\omega L_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} + j\omega R_2 R_3 C_4.$$

Z rovnosti reálných a imaginárních složek plyne

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{R_2 R_3}{R_4} \\ L_x &= R_2 R_3 C_4 \end{aligned} \quad (7-29)$$

Po nastavení rovnováhy lze tedy R_x a L_x vypočítat. Protože ve výsledných vzorcích není kmitočet zdroje, je tento můstek kmitočtově nezávislý.

Existuje mnoho druhů střídavých můstků, které jsou však vytlačovány přímoukazujícími číslicovými měřiči impedance.

c) Měření kmitočtu

Často potřebujeme změřit kmitočet periodického signálu. Pro měření síťového kmitočtu se používají jazýčkové rezonanční kmitoměry, které slouží pouze pro orientační měření. V praxi se používají i analogové přímokazující měřiče kmitočtu. Kmitočet lze změřit porovnáním dvou signálů o známém a neznámém kmitočtu na osciloskopu nebo tzv. směšovací metodou. Nejmodernější metodou je číslicové měření kmitočtů, kdy přístroj počítá počet period signálu během přesného časového intervalu. Hodnotu kmitočtu pak přímo čteme na displeji.

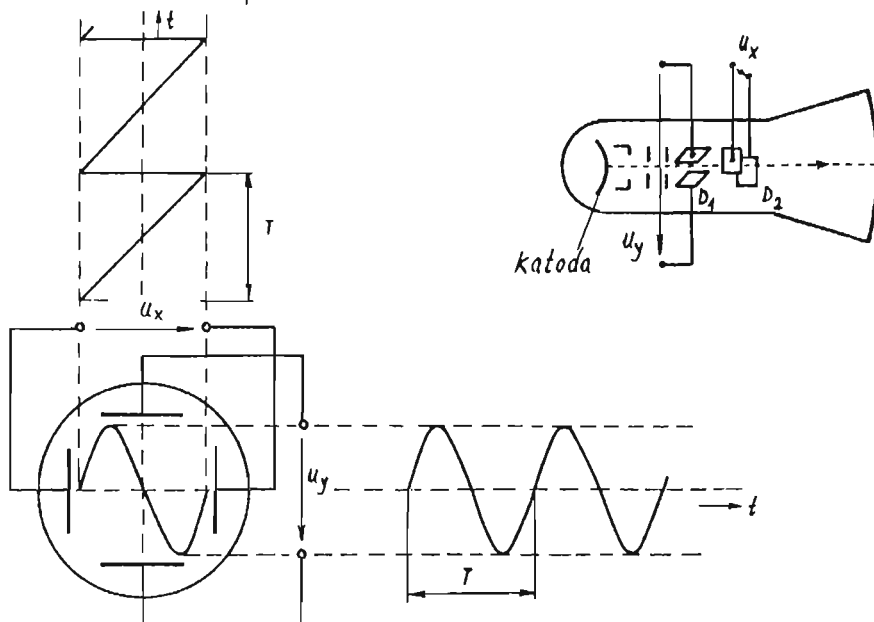
d) Měření časového průběhu

Velmi často potřebujeme zobrazit časový průběh signálu. K trvalému záznamu nepříliš rychle se měnících signálů se používají elektromechanické zapisovače a oscilografy.

Elektromechanické zapisovače vytvářejí grafický záznam na papírový pás, který se posunuje rovnoměrnou rychlostí.

Oscilografy vytvářejí záznam světelným paprskem na fotografický papír.

K zobrazování signálů o nejrůznějších kmitočtech na stínítko obrazovky se používají osciloskopy. Základní součástí osciloskopu je obrazovka. Elektrony vystupují z katody a dopadají na stínítko, kde se objeví svítící bod. Polohu tohoto bodu je možno měnit napětím na vychylovacích destičkách D_1 a D_2 ve dvou navzájem kolmých směrech. Na destičky D_1 přivádíme napětí úměrné zobrazovanému signálu, na destičky



Obr. 7-40 Princip elektronického osciloskopu

D_2 pak napětí pilovitého tvaru. Zobrazovaný signál způsobuje vychylování paprsku ve vertikálním směru, pilovitý signál (signál časové základny) zajišťuje rovnoměrný posun paprsku v horizontálním směru. Takovým způsobem dojde k zobrazení časového průběhu na obrazovce. Aby na obrazovce vznikl nepohyblivý obraz jedné nebo několika period signálu, musí být pilovité napětí synchronizováno s měřeným průběhem. Kmitočet časové základny lze různě nastavovat a tím rozšiřovat a zužovat zobrazený signál. Blíže se s touto problematikou seznámíme v předmětu "Elektronická měření".

7.7 VÍCFÁZOVÉ OBVODY

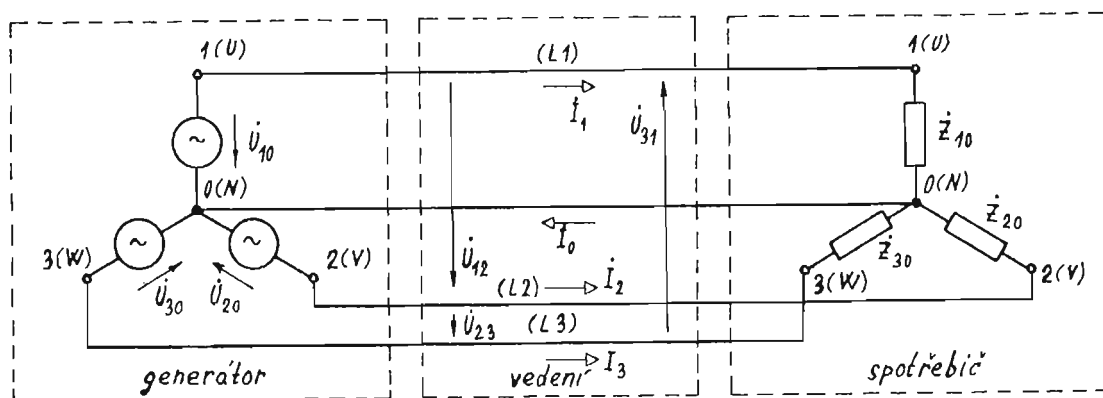
Z běžného života známe pojmy trojfázový elektrický rozvod a trojfázový spotřebič. Trojfázové obvody jsou nejčastěji používané vícefázové obvody. Skládají se ze tří zdrojů harmonického napětí v elektrárně, z elektrického vedení, kterým je toto napětí rozváděno k spotřebitelům, a z tří spotřebičů, které jsou sdruženy v tzv. trojfázovém spotřebiči (např. motoru).

Trojfázové soustavy se používají pro své výhody :

- malé ztráty při rozvodu elektrické energie
- možnost snadného vytvoření točivého magnetického pole, které je základem střídavých motorů.

Trojfázový obvod by potřeboval k propojení zdroje a spotřebiče 6 vodičů. Spotřebovalo by se tím mnoho drahého kovu a vznikaly by v něm velké ztráty. Proto se zdroj i spotřebiče nejprve vhodně propojí tak, aby se pak mohlo k jejich spojení použít menšího počtu vodičů. Nejčastějším propojením je propojení do hvězdy a do trojúhelníka.

1. Spojení trojfázové soustavy do hvězdy je na obr. 7-41. Vidíme, že spojovací vede-



Obr. 7-41 Spojení trojfázového zdroje a spotřebiče do hvězdy

ní je jen 4-vodičové. Na tomto zapojení si vysvětlíme základní pojmy.

Fáze zdroje jsou větve, ve kterých jsou zapojeny zdroje napětí \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} a \dot{U}_{30} . Proto se tato napětí nazývají fázová. Proudů tekoucí fázemi jsou fázové proudy.

Fáze spotřebiče jsou větve, kde jsou zapojeny impedance spotřebiče \dot{Z}_{10} , \dot{Z}_{20} a \dot{Z}_{30} .

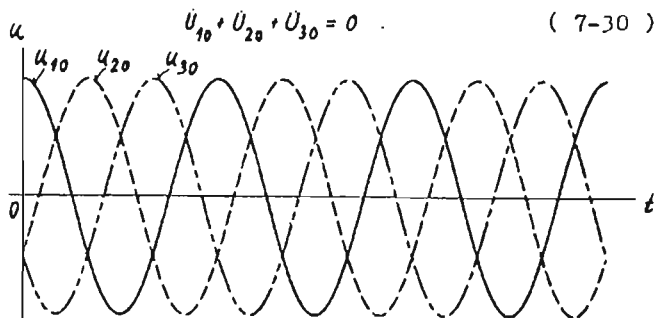
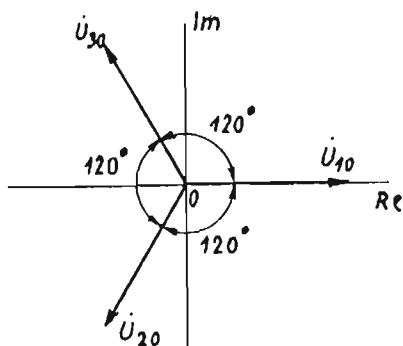
Fázové vodiče jsou vodiče vedení, které spojují začátky fází zdroje a spotřebiče. Označují se L1, L2 a L3. Vývody fází se u zdroje i spotřebiče označují U, V a W.

Nulový vodič je vodič spojující společné vývody fází zdroje a spotřebiče. Označuje se písmenem N.

Sdružená napětí jsou napětí mezi fázovými vodiči vedení \dot{U}_{12} , \dot{U}_{31} a \dot{U}_{23} , sdrúžené proudy jsou proudy těmito vodiči \dot{I}_1 , \dot{I}_2 a \dot{I}_3 .

V praxi se často používá tzv. souměrný trojfázový zdroj, jehož časové průběhy a fázorový diagram je na obr. 7-42. Vidíme, že fázory zdrojů jsou vůči sobě symetricky posunuty o úhel 120° a mají stejnou velikost. U běžných trojfázových rozvodů do domácností je $U_f = U_{10} = U_{20} = U_{30} = 220$ V. Symbolem U_f jsme označili fázové napětí

(je to efektivní hodnota !). Věimněme si, že součet všech fázorů je roven nule :



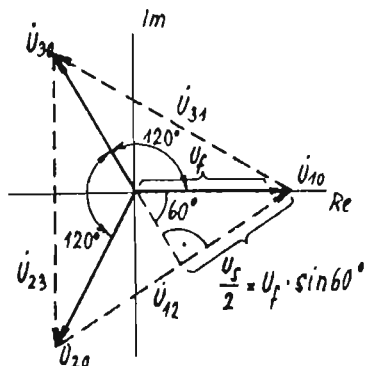
Obr. 7-42 Fázorový diagram a časové průběhy trojfázového generátoru

Jak se to projeví v časové oblasti ?

z obr. 7-41 a 7-43 plyne výpočet sdružených napětí :

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}, \quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}, \quad \dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10} \quad (7-31)$$

Na obr. 7-43 jsou zobrazeny fázory těchto napětí pro případ souměrného zdroje. Pak pro velikosti sdružených napětí platí



Obr. 7-43

$$U_s = U_{12} = U_{23} = U_{31}$$

Z obrázku plyne, že

$$U_s/2 = U_f \cdot \sin 60^\circ = U_f \cdot \sqrt{3}/2, \text{ neboli}$$

$$U_s = \sqrt{3} U_f \quad (7-32)$$

Proto pro fázové napětí 220 V vychází sdružené napětí asi 381 V.

Protože proudy vedením \dot{I}_1, \dot{I}_2 a \dot{I}_3 jsou stejné jako proudy fázemi, platí

$$I_s = I_f \quad (7-33)$$

Jaký proud poleče nulovým vodičem ? Je to dáno 1. KZ pro uzel N :

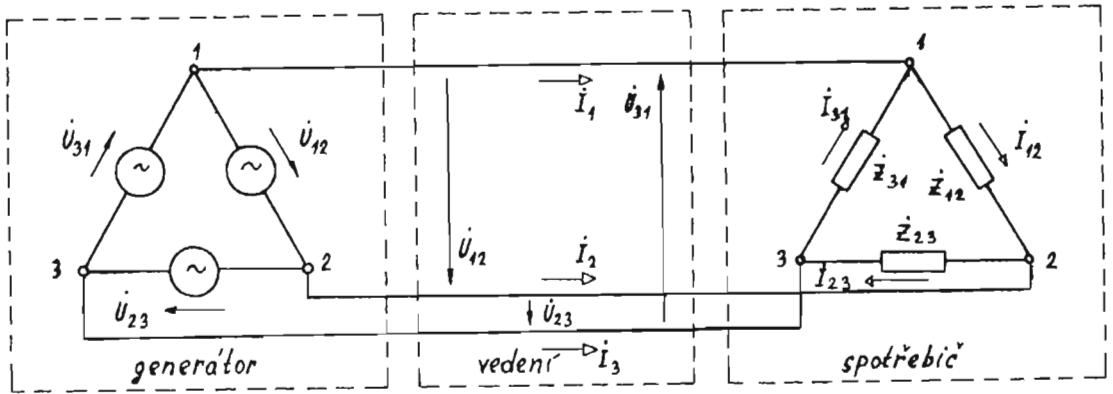
$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{Z}_{10}} + \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{Z}_{20}} + \frac{\dot{U}_{30}}{\dot{Z}_{30}} \quad (7-34)$$

Je-li trojfázový spotřebič souměrný, t.j. $\dot{Z}_{10} = \dot{Z}_{20} = \dot{Z}_{30} = \dot{Z}$, pak

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{10} + \dot{U}_{20} + \dot{U}_{30}}{\dot{Z}} = 0 \quad (7-35)$$

(viz (7-30)). Pro souměrný zdroj i zátěž tedy proud nulovým vodičem neteče. Při nesymetrické zátěži tímto vodičem teče vyrovnávací proud, který je však menší než největší z fázových proudů. Proto může být nulový vodič v čtyřžilových kabelech poněkud slabší než fázové vodiče.

2. Spojení trojfázové soustavy do trojúhelníka je naznačeno na obr. 7-44. V tomto



Obr. 7-44 Spojení trojfázového zdroje a spotřebiče do trojúhelníka

případě vystačíme s třemi propojovacími vodiči. Z obrázku je zřejmé, že fázová a sdružená napětí jsou stejná :

$$\boxed{U_f = U_S} \quad (7-36)$$

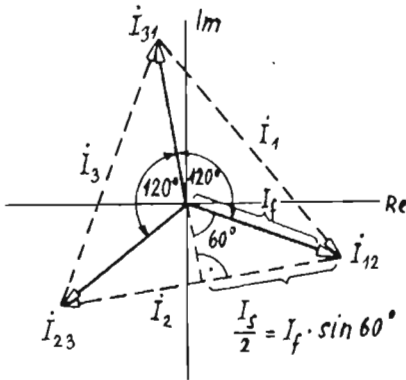
Sdružené proudy se z fázových musí určit výpočtem :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23} \quad (7-37)$$

Uvažujme souměrný zdroj i zátěž. Pak $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_f = U_n$,
 $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z$.

Proto $\dot{I}_{12} = \frac{\dot{U}_{12}}{Z}$, $\dot{I}_{23} = \frac{\dot{U}_{23}}{Z}$, $\dot{I}_{31} = \frac{\dot{U}_{31}}{Z}$, $I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_f$. Pak

$$\dot{I}_{12} + \dot{I}_{23} + \dot{I}_{31} = \frac{\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31}}{Z} = 0 \quad (7-38)$$



Tyto vztahy jsou zachyceny v fázorovém diagramu na obr. 7-45. Pro sdružené proudy platí $I_1 = I_2 = I_3 = I_S$. Z obrázku plyne

$$\frac{I_S}{2} = I_f \cdot \sin 60^\circ, \text{ a proto}$$

$$\boxed{I_S = \sqrt{3} I_f} \quad (7-39)$$

Obr. 7-45

Výkony v trojfázové soustavě

Činný výkon na trojfázovém spotřebiči je roven součtu činných výkonů na každé fázi spotřebiče :

$$P_c = P_{c1} + P_{c2} + P_{c3} = U_{1f} I_{1f} \cos \varphi_1 + U_{2f} I_{2f} \cos \varphi_2 + U_{3f} I_{3f} \cos \varphi_3 \quad (7-40)$$

Totéž platí pro jalový výkon.

V případě souměrného zdroje i zátěže jsou výkony na všech fázích stejné, a proto

$$P_{\Sigma} = 3U_f I_f \cos \varphi, P_j = 3U_f I_f \sin \varphi, P_S = 3U_f I_f. \quad (7-41)$$

Vyjádříme-li výkony pomocí sdružených napětí a proudů, pak pro zapojení do hvězdy a trojúhelníka platí :

$$\text{- hvězda : } 3 U_f I_f = 3 \cdot \frac{U_S}{\sqrt{3}} I_S = \sqrt{3} U_S I_S$$

$$\text{- trojúhelník : } 3 U_f I_f = 3 U_S \frac{I_S}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} U_S I_S.$$

V obou případech tedy počítáme ze vztahů

$$P_{\Sigma} = \sqrt{3} U_S I_S \cos \varphi, P_j = \sqrt{3} U_S I_S \sin \varphi, P_S = \sqrt{3} U_S I_S. \quad (7-42)$$

Měření trojfázových výkonů je založeno na stejném principu jako měření jednofázových výkonů (viz laboratorní návody).

Otázky k samostatnému studiu

- 7-27 Vysvětlete princip magnetoelektrického měřicího přístroje. Čemu je úměrná výchylka ? Proč se musí při střídavém měření použít usměrňovač ?
- 7-28 Jak lze využít magnetoelektrického systému k měření střídavých napětí a proudů různé velikosti ? Popište funkci měřicích transformátorů.
- 7-29 Vysvětlete princip feromagnetického měřicího přístroje. Čemu je úměrná výchylka při ss a střídavém měření ? Vyjmenujte vlastnosti tohoto přístroje.
- 7-30 Vysvětlete princip elektrodynamického a ferodynamického měřicího přístroje. Čemu je úměrná výchylka ? Jaké je nejčastější použití těchto systémů ?
- 7-31 Vysvětlete princip měření činného výkonu W-metrem a praktické zásady při měření. Co je to $\cos \varphi$, W-metru ? Jak by se změřil účinník $\cos \varphi$ v obvodu ?
- 7-32 Jaké znáte metody měření impedance ? Popište jejich princip.
- 7-33 Co je to střídavý můstek ? Jaká je podmínka jeho rovnováhy ? Kolik musí mít tento můstek vyvažovacích prvků a proč ?
- 7-34 Vyjmenujte metody pro měření kmitočtu a pro zjišťování časových průběhů. Popište činnost osciloskopu.
- 7-35 Vysvětlete pojem vícefázové obvody a důvody pro jejich používání.
- 7-36 Nakreslete schéma spojení 3f-soustavy do hvězdy a trojúhelníka a vysvětlete pojmy : souměrný zdroj a zátěž, fáze zdroje a zátěže, fázové a sdružené napětí a proudy, fázové vodiče a nulový vodič.
- 7-37 Vyznačte v zapojení 3f-obvodu do hvězdy a trojúhelníka fázové a sdružené proudy a napětí. Jaký je jejich vztah pro souměrný zdroj i spotřebič ?
- 7-38 Vysvětlete výpočet výkonů v 3f-obvodu.

Příklady k procvičení

- 7-29 Vypočtete proudy, které tečou vedením mezi zdrojem a spotřebičem na obr. 7-41, je-li dáno : $\dot{U}_{10} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{20} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{30} = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$ a
- a) $\dot{Z}_{10} = \dot{Z}_{20} = \dot{Z}_{30} = 5 \Omega$
- b) $\dot{Z}_{10} = 5 \Omega$, $\dot{Z}_{20} = 12 \angle 15^\circ \Omega$, $\dot{Z}_{30} = 15 \angle -25^\circ \Omega$.
- Výsledek : a) $\dot{I}_1 = 44 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 44 \angle -120^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 44 \angle 120^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_0 = 0 \text{ A}$
- b) $\dot{I}_1 = 44 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 18,3 \angle -132^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 14,7 \angle 145^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_0 = 19,6 \angle -13,5^\circ \text{ A}$.
- 7-30 Určete výkony na impedancích \dot{Z}_{10} , \dot{Z}_{20} a \dot{Z}_{30} z př. 7-29.
- Výsledek : a) $P_{\Sigma 1} = P_{\Sigma 2} = P_{\Sigma 3} = P_{S1} = P_{S2} = P_{S3} = 9680 \text{ W}$, $P_{j1} = P_{j2} = P_{j3} = 0$
- b) $P_{\Sigma 1} = P_{S1} = 9680 \text{ W}$, $P_{j1} = 0$
- $P_{\Sigma 2} = 3896 \text{ W}$, $P_{j2} = 1044 \text{ VAR}$, $P_{S2} = 4033 \text{ VA}$
- $P_{\Sigma 3} = 2925 \text{ W}$, $P_{j3} = -1364 \text{ VAR}$, $P_{S3} = 3227 \text{ VA}$.

8 OBVODY S VÍCEPÓLOVÝMI PRVKY

Obsah kapitoly :

8.1 VLASTNOSTI VÍCEPÓLOVÝCH PRVKŮ

Trojpól, čtyřpól, dvojbran.

8.2 OBVODY SE ZÁVISLÝMI ZDROJI

8.3 OBVODY S VÁZANÝMI INDUKTORY

8.4 TRANSFORMÁTORY

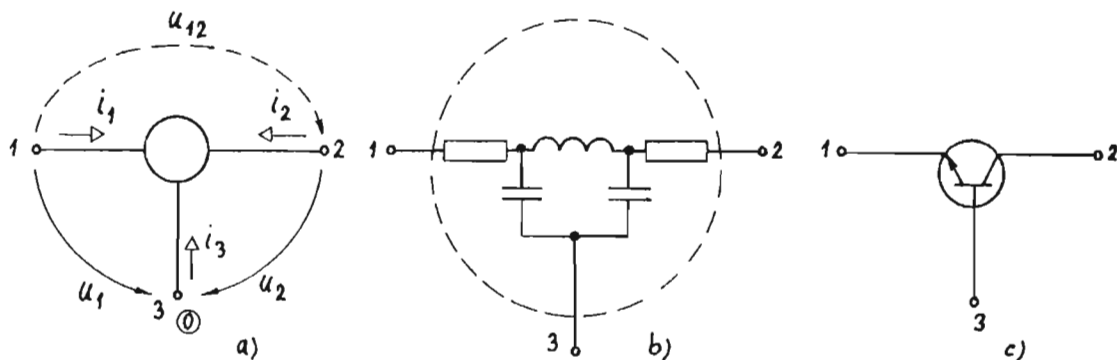
Vícepólové prvky, t.j. dvojpóly, trojpoły, čtyřpoły atd., se používají v obvodech silnoproudé i sdělovací elektrotechniky. Jsou to např. transformátory, tranzistory, operační zesilovače atd. Vlastnosti těchto prvků určuje jejich vnitřní struktura. Nás zajímá, jak se vícepólové prvky chovají, když je zapojíme do obvodu.

8.1 VLASTNOSTI VÍCEPÓLOVÝCH PRVKŮ

Často jsme již pracovali s dvojpóly, t.j. obvodovými prvky, které mají dvě svorky. Nejjednodušším vícepólovým prvkem je trojpól.

Trojpól

Trojpól (obr. 8-1a.) může mít libovolnou vnitřní strukturu. Buď je sestaven z dvojpólů (obr. 8-1b), nebo má složitější vnitřní strukturu, jako např. tranzistor (obr. 8-1c). Použijeme-li trojpól v elektrickém obvodu, zajímá nás jen jeho chování při spolupráci s vnějším obvodem. Na obr. 8-1a je nakreslen trojpól se svorkami



Obr. 8-1 Trojpoły

1, 2 a 3 a jsou zvoleny čítací šípky proudů a napětí. Podle 1. KZ získáme

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

(8-1)

Tedy jen dva proudy se mohou měnit nezávisle. Třetí (např. i_2) vyplývá z (8-1) :

$$i_2 = -i_1 - i_3 \quad (8-2)$$

Zvolme si jednu svorku jako referenční. Na obr. 8-1a je za referenční zvolena svorka 3 a označena $\textcircled{0}$. Použijeme 2. KZ. Pak

$$u_{12} + u_2 - u_1 = 0 \quad (8-3)$$

Tedy jen dvě napětí se mohou měnit nezávisle. Třetí (např. u_{12}) vyplývá z (8-3) :

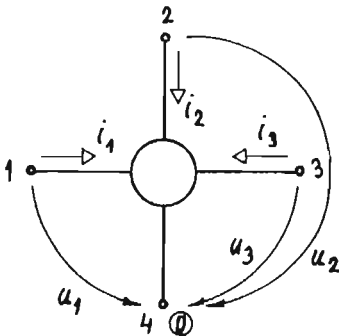
$$u_{12} = u_1 - u_2 \quad (8-4)$$

Trojčl je proto popsán dvěma nezávislými obvodovými veličinami, napětími a proudy. Vlastnosti trojčlu můžeme popsat dvěma rovnicemi.

Výkon vstupující do trojčlu je dán součtem součinů nezávislých napětí a proudů :

$$P = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 \quad (8-5)$$

Čtyřpól



Obr. 8-2 Nezávislé veličiny u čtyřpólu

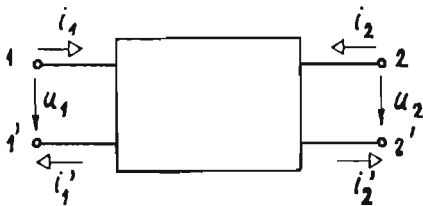
Čtyřpól je každá součástka, která je spojena s okolím čtyřmi vývody. Podobně jako u trojčlu zjistíme, že lze volit tři nezávislé proudy a tři nezávislá napětí (obr. 8-2).

Pro celkový výkon vstupující do čtyřpólu dostaneme

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 \quad (8-6)$$

Typickým příkladem čtyřpólu je tranzistor typu MOSFET se čtyřmi vývody. Vlastnosti každého čtyřpólu můžeme popsat třemi rovnicemi.

Dvojbran



Obr. 8-3 Dvojbran

Dvojbran je čtyřpól, který má čtyři svorky rozděleny do dvou párů. Jednomu páru svorek říkáme brána. V každé bráně jednou svorkou proud vstupuje a ze druhé svorky stejný proud vystupuje (obr. 8-3) :

$$i_1 = i_1' \quad a \quad i_2 = i_2' \quad (8-7)$$

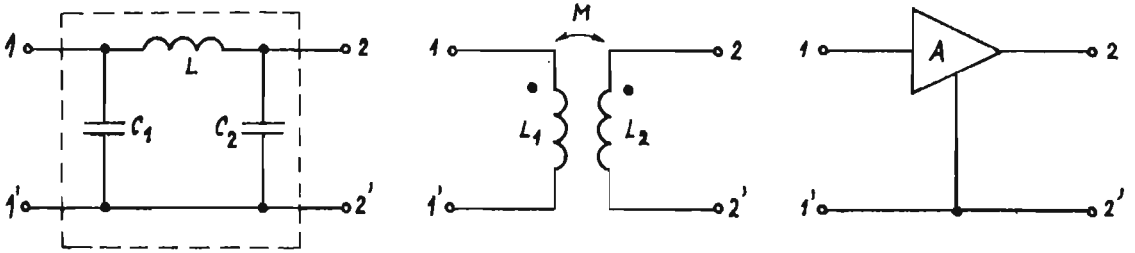
Svorky první brány jsme označili 1 a 1' a bráně říkáme vstupní brána. Svorky druhé brány jsme označili 2 a 2' a bráně říkáme výstupní brána.

Okamžitý výkon vstupující do dvojbranu je roven součtu výkonů vstupujících oběmi branami :

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2 = P_1 + P_2 \quad (8-8)$$

Vidíme, že obvodové veličiny u_1 , u_2 , i_1 a i_2 popisují dvojbran z výkonového hlediska.

Vztah (8-8) je stejný jako u trojčlunu. Je zde však rozdíl. U trojčlunu p_1 a p_2 závisí na volbě referenční svorky. To znamená, že když změním referenční svorku, změní se i p_1 a p_2 . U dvojbranu jsou p_1 a p_2 určeny bránami.



Obr. 8-4 Dvojbrany : a) pasivní dvojbran - LC filtr; b) magneticky vázané cívky; c) ideální zesilovač napětí

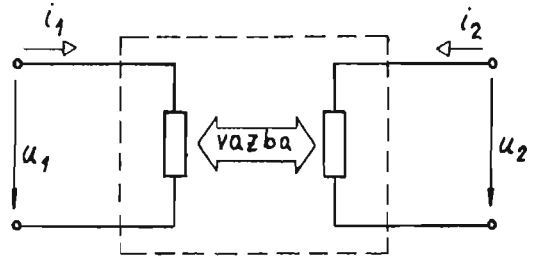
Příklady několika dvojbranů jsou uvedeny na obr. 8-4.

Vlastnosti dvojbranů můžeme popsat dvěma rovnicemi.

Velmi často pracujeme s dvojbranu, které obsahují vázané prvky. Vstupní i výstupní brány jsou realizovány jednobranu - prvky. Mezi těmito prvky je vazba. To znamená, že některé obvodové veličiny jednoho prvku ovlivňují některé obvodové veličiny druhého prvku. Typickým příkladem je optoelektronický vazební člen, který obsahuje svítivou diodu a fotoodpor. Při průchodu proudem dioda vyzařuje světlo, které dopadá na fotoodpor a mění jeho odpor.

Zde proud diodou ovlivňuje parametr druhého prvku.

Mezi často používané dvojbrany s vázanými prvky patří obvody se závislými zdroji a obvody s magneticky vázanými induktory.



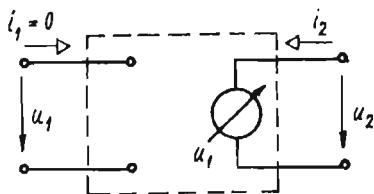
Obr. 8-5 Dvojbran s vázanými prvky

8.2 OBVODY SE ZÁVISLÝMI ZDROJI

Závislé zdroje jsou napěťové nebo proudové zdroje. Jsou to dvojbrany. Jejich výstupní napětí nebo proudy jsou řízeny napětími nebo proudy v jiných částech obvodu. Závislé zdroje tvoří princip mnoha elektronických prvků (tranzistorů, operačních zesilovačů apod.). Proto se často používají v obvodových modelech těchto prvků.

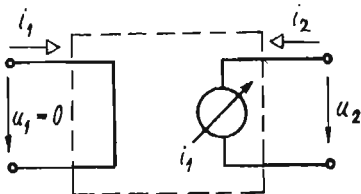
Závislé zdroje dělíme na čtyři druhy (obr. 8-6). Závislost výstupní veličiny na vstupní je lineární (obecně může být nelineární). Nejznámějším závislým zdrojem je zdroj napětí řízený napětím. Takto se chová ideální zesilovač napětí. Tento zesilovač je charakterizován následujícími parametry : napěťovým zesílením $A = u_2/u_1$, nulovým výstupním odporem a nekonečným vstupním odporem. Díky těmto parametrům zesilovač nezatěžuje obvod, z kterého je řízen ($i_1 = 0$) a z hlediska výstupu se chová jako ideální zdroj napětí $u_2 = A u_1$. V praxi se používají takovéto zesilovače s velmi vysokým zesílením ($A > 1\ 000\ 000$). Jsou to tzv. operační zesilovače a vyrábějí se jako integrované obvody.

a) napěťový zdroj řízený napětím



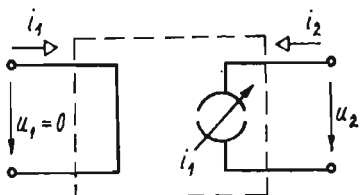
prvkové rovnice :
 $i_1 = 0, u_2 = A u_1$

b) napěťový zdroj řízený proudem



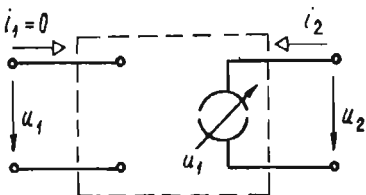
prvkové rovnice :
 $u_1 = 0, u_2 = W i_1$

c) proudový zdroj řízený proudem



prvkové rovnice :
 $u_1 = 0, i_2 = B i_1$

d) proudový zdroj řízený napětím

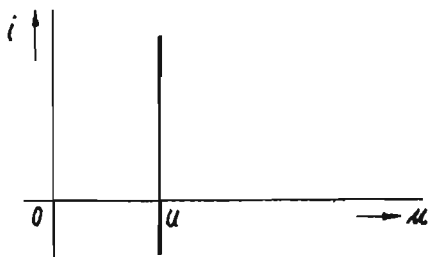
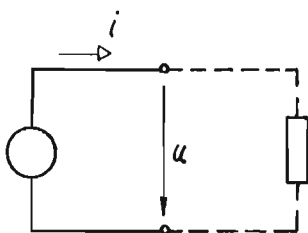


prvkové rovnice :
 $i_1 = 0, i_2 = S u_1$

Obr. 8-6 Přehled závislých zdrojů (A, W, B a S jsou konstanty)

Př. 8-1 : Nakreslete síť charakteristik závislého napěťového zdroje řízeného napětím. Zdroj je realizován ideálním zesilovačem se zesilením $A = 1000$.

Řešení : Ideální nezávislý zdroj napětí má charakteristiku :



Ideální závislý zdroj napětí (obr. 8-7a) je řízen podle vztahu $u_2 = A u_1, A=1000$.

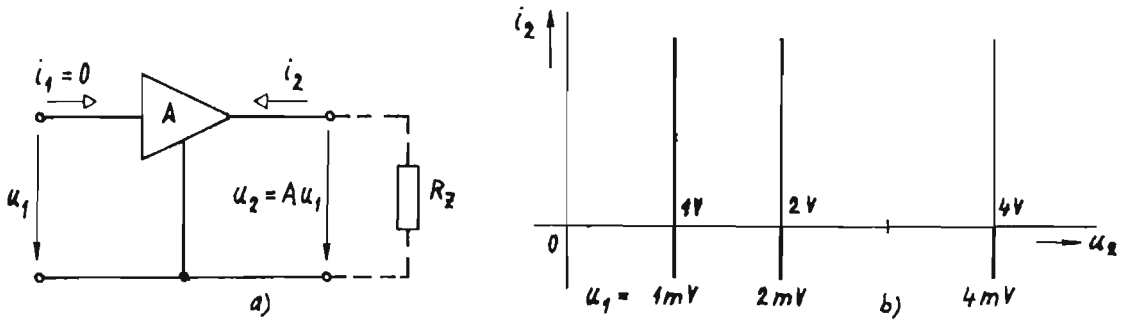
Pak např. pro $u_1 = 1 \text{ mV} \dots\dots u_2 = 1 \text{ V}$

$u_1 = 2 \text{ mV} \dots\dots u_2 = 2 \text{ V}$

$u_1 = 4 \text{ mV} \dots\dots u_2 = 4 \text{ V}$

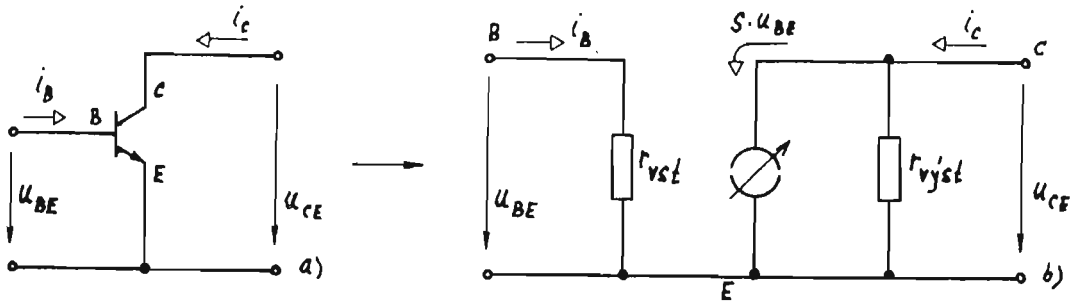
⋮

Z obr. 8-7b plyne, že obvod je možno využívat jako ideální napěťový zdroj s možností nastavení výstupního napětí.



Obr. 8-7 Ideální závislý zdroj napětí a jeho charakteristiky

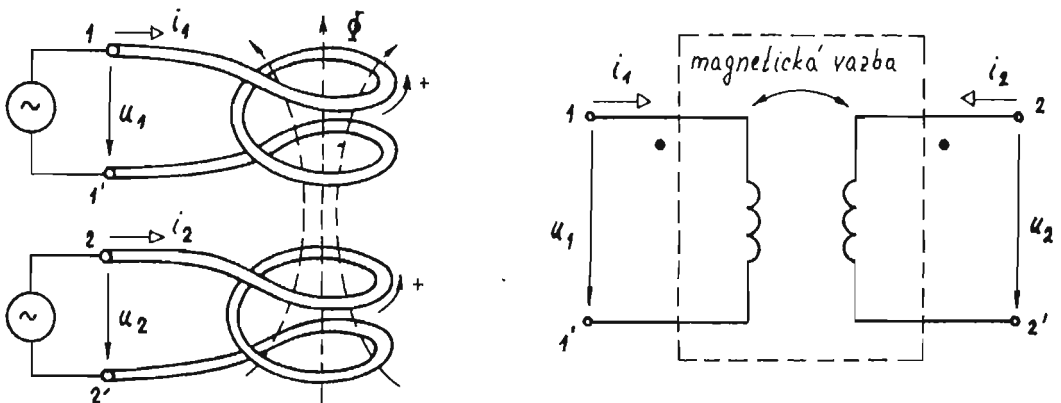
Se závislými zdroji se setkáváme u obvodových modelů elektronických prvků. Např. bipolární tranzistor (typu NPN) má schématickou značku (obr. 8-8a) a obvodový model na obr. 8-8b. B je báze, E je emitor a C je kolektor.



Obr. 8-8 Bipolární tranzistor a jeho obvodový model

8.3 OBVODY S VÁZANÝMI INDUKTORY

Dvě ideální cívky (induktory) L_1 a L_2 jsou umístěny blízko sebe (obr. 8-9a) v lineárním feromagnetickém prostředí. Cívky jsou magneticky vázané. Z obvodového

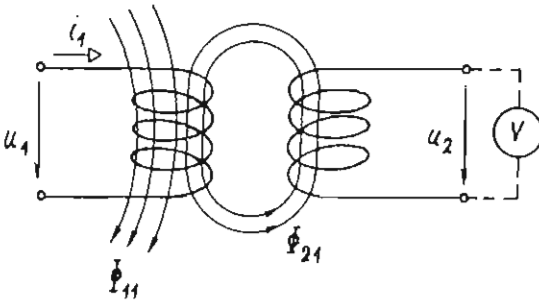


Obr. 8-9 Magneticky vázané induktory

hlediska představují dvojbran (obr. 8-9b).

První cívkou teče proud i_1 a vytváří magnetický tok Φ (obr. 8-10a), který zasahuje i závity druhé cívky. Mění-li se proud v první cívce, mění se i magnetický tok spjatý se závity druhé cívky a na svorkách druhé cívky se objeví indukované

napětí. Toto napětí je úměrné časové změně proudu i_1 :



$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} ; i_2 = 0 ,$$

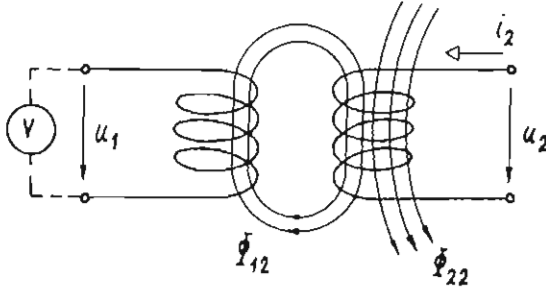
kde M je konstanta úměrnosti.

Zaměníme-li obě cívky (obr. 8-10b), dochází k stejnému fyzikálnímu jevu. To znamená, že mění-li se proud v druhé cívce, mění se i magnetický tok spjatý se závity první cívky a na svorkách této cívky se objeví indukované napětí. Toto napětí je úměrné časové změně proudu i_2 :

$$u_1 = M \frac{di_2}{dt} ; i_1 = 0 ,$$

kde M je konstanta úměrnosti.

Jestliže oběmi cívkami tečou proudy i_1 a i_2 a mění se, v obou cívkách vznikají proměnné spjaté magnetické toky, které jsou lineárními funkcemi proudů i_1 a i_2 :



Obr. 8-10

$$\Phi_1 = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad (8-9a)$$

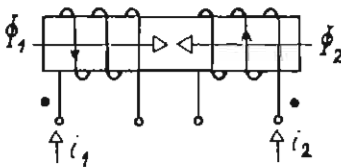
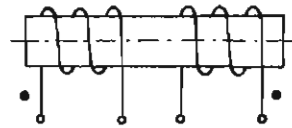
$$\Phi_2 = M \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad (8-9b)$$

Zde Φ_{21} je magnetický tok spjatý s druhou cívkou, vyvolaný proudem v první cívce. Podobně Φ_{12} je magnetický tok spjatý s první cívkou, vyvolaný proudem v druhé cívce. L_1 a L_2 jsou vlastní indukčnosti cívek a M je vzájemná indukčnost mezi cívkami. Jednotka vzájemné indukčnosti je stejná jako u vlastní indukčnosti : 1 henry [H].

Znaménko vlastní indukčnosti je vždy kladné. Znaménko vzájemné indukčnosti může být kladné i záporné a závisí na geometrickém uspořádání cívek, jejich vzájemné poloze a volbě začátků a konců cívek.

Př. 8-2 : Určete znaménko vzájemné indukčnosti pro cívky, které jsou navinuty na válcovém jádře na obrázku.

Řešení : Čítecí šipky proudů $i_1 > 0$ a $i_2 > 0$ volíme od začátku ke konci vinutí. Tyto proudy vytvoří magnetické toky Φ_1 a Φ_2 . Orientaci magnetických toků stanovíme podle pravidla pravé ruky. Souhlasí-li orientace magnetických toků, je $M > 0$, nesouhlasí-li, je $M < 0$.



V našem případě orientace magnetických toků nesouhlasí. Magnetické toky se tedy zeslabují (působí proti sobě) a $M < 0$.

Vzájemná indukčnost je rovna poměru magnetického toku spjatého s druhou (první) cívkou a proudem první (druhé) cívky :

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} \quad [H] \quad (8-10)$$

Svorkové napětí jsou dána vztahy

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} \quad , \quad u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (8-11)$$

Dosazení (8-9) do (8-11) dá prvkové rovnice

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad , \quad (8-12a)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad . \quad (8-12b)$$

Nahradíme-li proudy a napětí fázory a $d/dt \rightarrow j\omega$, obdržíme prvkové rovnice pro harmonický ustálený stav :

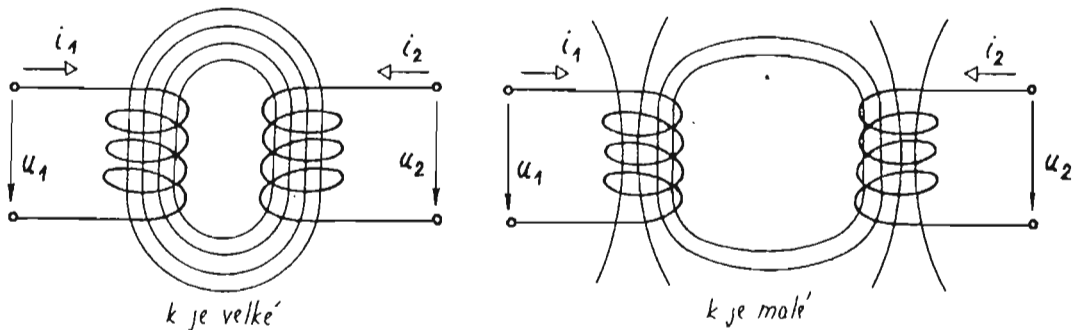
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \quad , \quad (8-13a)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \quad . \quad (8-13b)$$

Míru vzájemného ovlivňování dvou cívek udává činitel vazby k :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad . \quad (8-14)$$

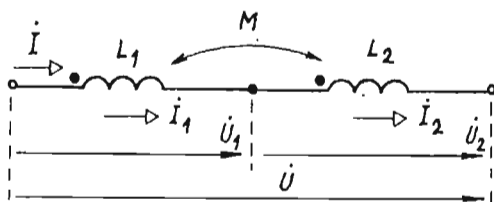
Činitel vazby k se mění v rozmezí $0 \leq k \leq 1$.



Obr. 8-11 Vysvětlení činitele vazby

Obvody s magneticky vázanými induktory můžeme řešit použitím Kirchhoffových rovnic a prvkových rovnic.

Př. 8-3 : Máme sériové spojení dvou vázaných induktorů (obr. 8-12). Nahraďte je jedním ekvivalentním induktorem o indukčnosti L_{ekv} .



Řešení : Z 1. KZ :

$$\dot{I} = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \quad . \quad (8-15a)$$

Z 2. KZ :

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \quad . \quad (8-15b)$$

Prvkové rovnice jsou :

Obr. 8-12 Sériové spojení dvou vázaných induktorů

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \quad (8-16)$$

Dosažením (8-15a) do (8-16) a odtud do (8-15b) máme :

$$\dot{U} = j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \dot{I} \quad (8-17)$$

Výraz v závorce je celkovou indukčností L_{ekv} ekvivalentního induktoru :

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M \quad (8-18)$$

Ze vztahu (8-18) je možno dospět k tomuto závěru :

- Jsou-li cívky zapojeny magneticky souhlasně, je $M > 0$. Pak $L_{ekv} > L_1 + L_2$.
- Jsou-li cívky zapojeny magneticky nesouhlasně, je $M < 0$. Pak $L_{ekv} < L_1 + L_2$.
- Je-li $M = 0$, je $L_{ekv} = L_1 + L_2$ a cívky spolu nejsou magneticky vázány.

8.4 TRANSFORMÁTORY

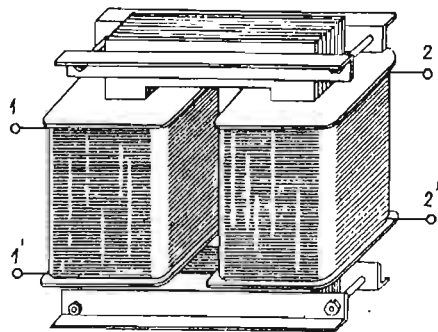
Transformátor plní v elektrických obvodech důležité funkce : transformuje (převádí) napětí, proudy a impedance, odděluje elektricky dva obvody, přenáší mezi dvěma obvody jen střídavou složku signálu atd.

Lineární transformátor

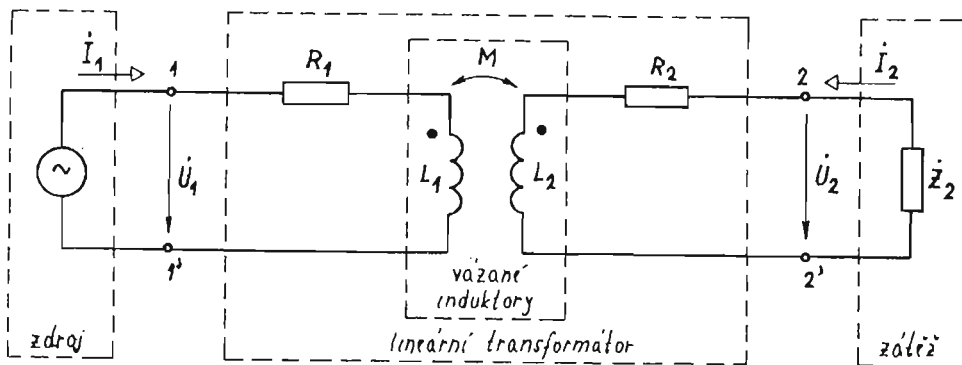
Pracuje v lineární oblasti magnetizační křivky. Můžeme zanedbat ztráty vířivými proudy a hysterezí. Používají se :

- a) vzduchový transformátor
- b) transformátor s feromagnetickým jádrem.

Obvodový model lineárního transformátoru je na obr. 8-14. Cívky uvažujeme reálné, t.j. s odpory R_1 a R_2 . Cívku mezi svorkami 1 a 1' nazýváme vstupní (primární), cívku mezi svorkami 2 a 2' výstupní (sekundární). Na



Obr. 8-13 Transformátor



Obr. 8-14 Lineární transformátor

vstupní svorky je připojen napěťový zdroj a na výstupní svorky zátěž.

Když doplníme prvkové rovnice pro vázané induktory (8-13) ztrátovými rezistory R_1 a R_2 , získáme prvkové rovnice pro lineární transformátor :

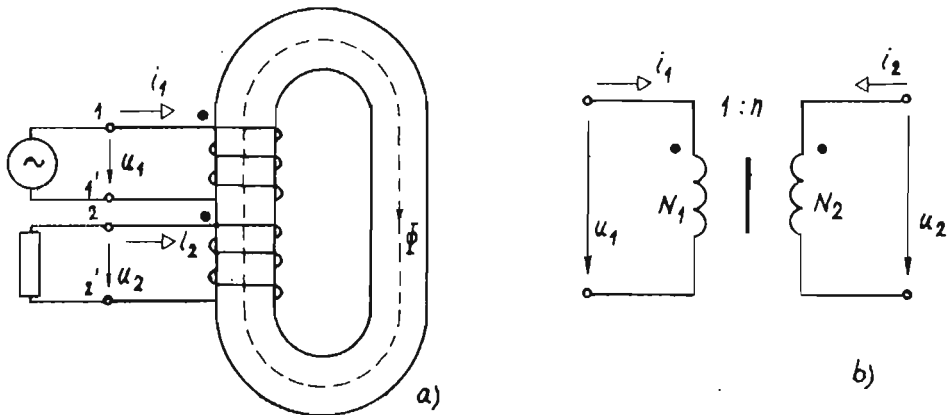
$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 \quad , \\ \dot{U}_2 &= j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 \quad . \end{aligned} \quad (8-19)$$

Ideální transformátor

Ideální transformátor je idealizací skutečného transformátoru. Idealizace spočívá v následujících podmínkách :

- Uvnitř transformátoru jsou nulové ztráty (odpory cívek R_1 a R_2 jsou nulové, nulové ztráty hysterezi a vířivými proudy v jádru).
- V transformátoru je nulový rozptyl, t.j. činitel vazby $k = 1$.
- Jádro transformátoru má nulový magnetický odpor : $R_M = 0$.

Ideální transformátor se dvěma vinutími (cívkami) o N_1 a N_2 závitech je nakreslen na obr. 8-15a, jeho schématická značka pak na obr. 8-15b.



Obr. 8-15 Ideální transformátor

U ideálního transformátoru je poměr výstupního napětí u_2 ke vstupnímu napětí u_1 konstantní. Tento poměr nezávisí na zátěži a na tvaru vstupního napětí. Nazýváme jej převodem transformátoru n :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad . \quad (8-20)$$

Také poměr výstupního proudu k vstupnímu je konstantní, nezávislý na zátěži a tvaru vstupního proudu :

$$\frac{i_2}{i_1} = - \frac{N_1}{N_2} = - \frac{1}{n} \quad . \quad (8-21)$$

Proudy se transformují v obráceném poměru počtu závitů. Záporné znaménko v rovnici (8-21) je dáno volbou směrů proudů (obr. 8-13b).

Vztahy (8-20) a (8-21) jsou prvkové rovnice ideálního transformátoru.

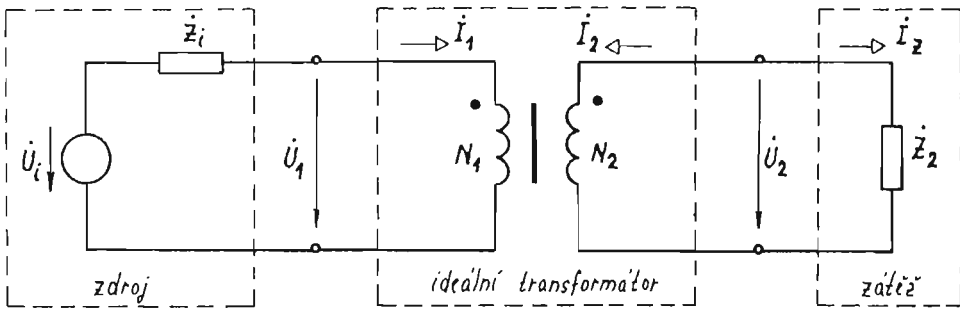
Celkový okamžitý výkon p , který vstupuje do ideálního transformátoru, je podle (8-8) :

$$p = p_1 + p_2 = u_1 i_1 + u_2 i_2 .$$

Dosadíme-li za u_2 ze vztahu (8-20) a za i_2 ze vztahu (8-21), pak

$$p = p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -p_1 . \quad (8-22)$$

Celkový výkon, který vstupuje do ideálního transformátoru, je roven nule. Transformátor přenáší výkon beze ztrát a neakumuluje žádnou energii. Pouze transformuje (mění) hodnoty napětí (8-20) a proudů (8-21). Často se používá také k transformaci hodnoty zatěžovací impedance \dot{Z}_z , aby se dosáhlo výkonového přizpůsobení (obr. 8-16). Víme, že ze zdroje o vnitřní impedanci \dot{Z}_i se přeneše do zátěže maximální činný výkon, je-li $\dot{Z}_i = \dot{Z}_z^*$. Je-li $Z_i = Z_z$ a nemůžeme-li velikost impedance Z_z měnit, dosáhneme výkonového přizpůsobení tak, že zatěžovací impedanci \dot{Z}_z připojíme ke zdroji přes ideální transformátor (tzv. přizpůsobovací transformátor).



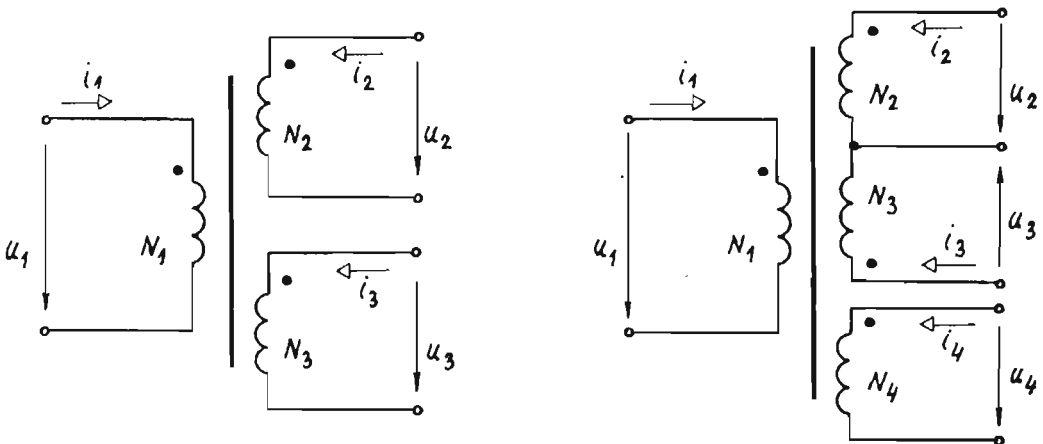
Obr. 8-16 Výkonové přizpůsobení

Vstupní impedance transformátoru je $\dot{Z}_{1vst} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$. Dosadíme-li za $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 N_1 / N_2$ a za $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 N_2 / N_1$, obdržíme :

$$\dot{Z}_{1vst} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \dot{Z}_z = \frac{1}{n^2} \dot{Z}_z . \quad (8-23)$$

Změnou převodu $n = N_2 / N_1$ dosáhneme splnění podmínky $Z_{1vst} = Z_i$. Zatěžovací impedance se transformuje se čtvercem převodu.

Ideální transformátor může mít i více vinutí, např. tři, jak je zřejmé z obr. 8-17a, nebo čtyři (obr. 8-17b), případně více.



Obr. 8-17 Transformátory s více vinutími

Př. 8-4 : Transformátor pro elektrický zvonek má na vstupu primární vinutí o $N_1 = 660$ závitů, $U_1 = 220$ V. Výstupní cívka (sekundární) má tři svorky (jednu společnou) se dvěma napětími, a to : 3 V a 5 V.

Vypočtete : a) převody n_2 a n_3
 b) počet závitů výstupních vinutí N_2 a N_3
 c) proud i_1 , když proud odebíraný ze sekundárního vinutí o napětí u_3 činí $i_3 = 200$ mA.

Řešení :

a) Výstupní vinutí cívky tvoří dvě cívky. Vypočítáme dva převody :

$$n_1 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{220} = 1,36 \cdot 10^{-2} ; \quad n_2 = \frac{U_3}{U_1} = \frac{5}{220} = 2,27 \cdot 10^{-2}$$

b) Počty závitů :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = n_1 \Rightarrow N_2 = N_1 n_1 = 660 \cdot 1,36 \cdot 10^{-2} = 9 \text{ závitů}$$

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{N_3}{N_1} = n_2 \Rightarrow N_3 = N_1 n_2 = 660 \cdot 2,27 \cdot 10^{-2} = 15 \text{ závitů}$$

c) Proud primárním vinutím

$$\frac{i_1}{i_3} = - \frac{N_3}{N_1} \Rightarrow i_1 = -i_3 \frac{N_3}{N_1} = -200 \cdot 10^{-3} \frac{15}{660} = -4,55 \text{ mA}$$

Otázky k samostatnému studiu

- 8-1 Použijte Kirchhoffovy zákony k popisu vlastností trojpolu. Vyjádřete okamžitý výkon vstupující do trojpolu.
 8-2 Definujte dvojbran. Odvoďte vztah pro výkon. Uveďte příklady dvojbranů.
 8-3 Vysvětlete princip čtyř základních ideálních závislých zdrojů. Nakreslete pro ně síť charakteristik.
 8-4 Vysvětlete pojem vzájemná indukčnost. Uveďte vztahy mezi spjatými magnetickými toky a elektrickými proudy. Definujte činitel vazby.
 8-5 Nakreslete obvodový model lineárního transformátoru. Vysvětlete pojmy "stav naprázdno" a "stav nakrátko".
 8-6 Vyjmenujte podmínky pro ideální transformátor. Definujte převod transformátoru. Napište prvkové rovnice ideálního transformátoru. Vysvětlete výkonové přizpůsobení pomocí ideálního transformátoru.

Příklady k procvičení

8-1 Určete výslednou indukčnost sériového spojení dvou cívek $L_1 = 10$ mH a $L_2 = 20$ mH vázaných vzájemnou indukčností $M = 5$ mH.

a) Počátky vinutí jsou podle obr. 8-12.

b) Počátky vinutí jsou přehozeny.

Výsledek : a) 40 mH, b) 20 mH.

8-2 U obvodu s ideálním transformátorem stanovte :

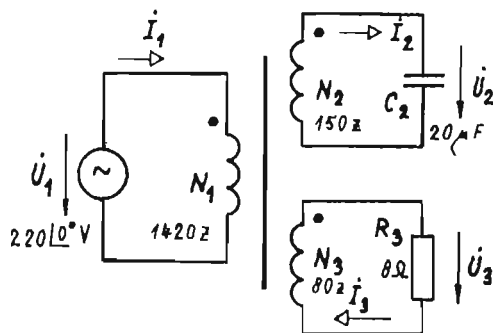
a) převody, b) napětí \dot{U}_2

a \dot{U}_3 , c) proud \dot{I}_1 . Kmitočet $f=50$ Hz.

Výsledek : a) $n_{21} = 0,11$, $n_{31} = 0,056$

b) $\dot{U}_2 = 23,2 \angle 0^\circ$ V, $\dot{U}_3 = 12,4 \angle 0^\circ$ V

c) $\dot{I}_1 = 88,7 \angle 190^\circ$ mA



9 OBVODY S NEHARMONICKÝMI ČASOVÝMI PRŮBĚHY

Obsah kapitoly :

9.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Ustálený stav, přechodný stav. Ustálený stav stejnosměrný, harmonický, periodický. Příčiny přechodných jevů.

9.2 PŘECHODNÉ JEVY

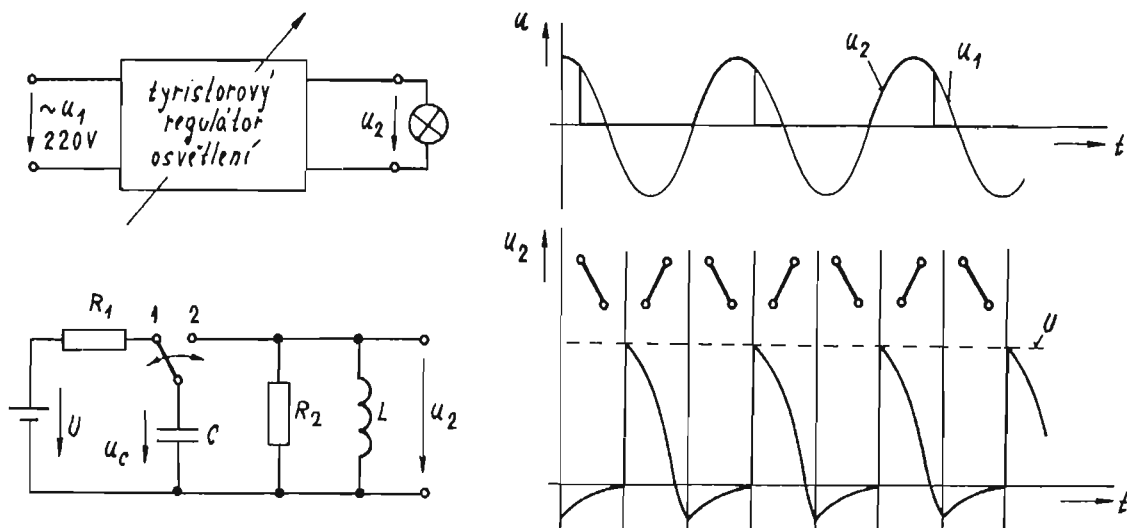
Stavové veličiny. Počáteční podmínky. Odezva na počáteční podmínky, odezva na podnět, celková odezva. Řešení přechodných jevů. Řád obvodu. Jednoduché obvody 1. a 2. řádu.

9.3 PERIODICKÉ SIGNÁLY A JEJICH SPEKTRA

Základní vlastnosti periodických signálů. Spektra periodických signálů. Analýza obvodů metodou Fourierovy řady.

9.1 ZÁKLADNÍ POJMY

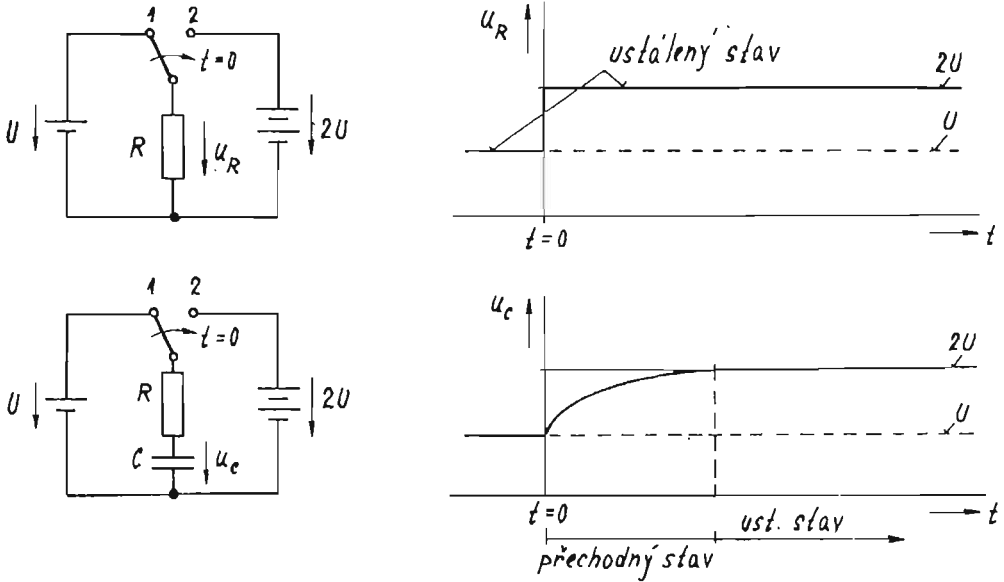
Kapitola č.7 pojednávala o elektrických obvodech, kde všechny veličiny - napětí i proudy - jsou harmonické. V praxi se ale vyskytuje mnoho zařízení, které pracují se signály, odlišnými od harmonických. Tak například v silnoproudé elektronice se používají tyristorové či triakové regulátory výkonu, které z harmonického napětí vyrábějí napětí periodické, ale neharmonické (viz obr. 9-1a). Taktéž se používají tzv. spínané obvody, které jsou schopny ze stejnosměrného napětí vyrobit periodické neharmonické napětí (obr. 9-1b). Říkáme, že u těchto obvodů dochází k periodickému ustálenému stavu.



Obr. 9-1 a) Tyristorový regulátor osvětlení, b) spínaný měnič v periodickém ust. stavu

S neharmonickými periodickými průběhy napětí a proudů se setkáváme v radiolokaci, televizní technice i v obvodech samočinných počítačů.

V obvodech stejnosměrných jsme řešili ustálené stavy : všechny veličiny byly konstantní, nezávislé na čase. Jednalo se o stejnoseměrný ustálený stav. Je to nejjednodušší případ periodického ustáleného stavu. Jiným zvláštním případem periodického ustáleného stavu je harmonický ustálený stav u střídavých obvodů, buzených harmonickou veličinou.



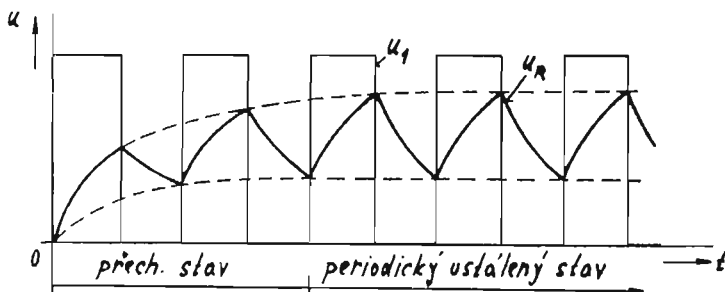
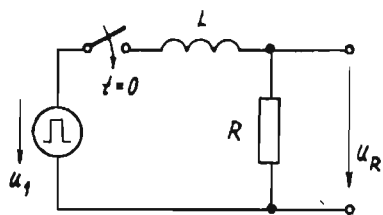
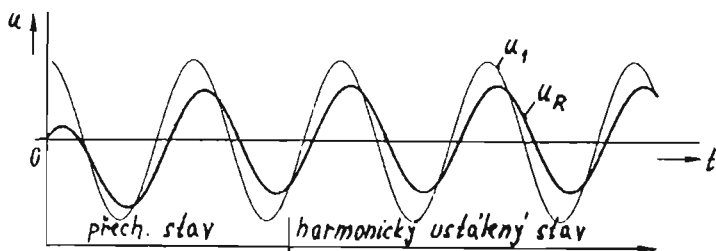
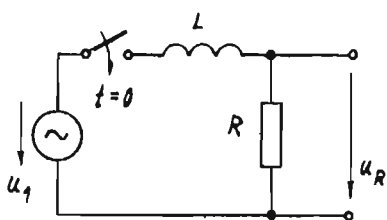
Obr. 9-2 a) Okamžitá změna napětí v odporovém obvodu, b) přechodný jev v obvodu s akumulacním prvkem

Každý elektrický obvod se může nacházet buď v ustáleném stavu, nebo v tzv. přechodném stavu. Podívejme se na obr. 9-2a. Je-li přepínač v poloze 1, je $U_R = U$ a obvod se nachází v ustáleném stavu. Přepneme-li přepínač do polohy 2, zvětší se napětí na rezistoru skokem na hodnotu $2U$. Obvod se okamžitě nachází v jiném ustáleném stavu. V čase $t = 0$ obvod přešel z jednoho ustáleného stavu do druhého. Přechodný stav trval velmi krátce a dobu jeho trvání lze zanedbat.

Představme si však, že do série s rezistorem zapojíme kapacitor (obr. 9-2b). Je-li přepínač v poloze 1, je kapacitor připojen přes rezistor R na baterii U a nabije se na celé její napětí. Obvod se nachází v ustáleném stavu, $u_C = U$. Po přepnutí do polohy 2 je kapacitor náhle připojen přes R na dvojnásobné napětí. Trvá určitou dobu, než se dobije na nové napětí $2U$. Pak se obvod nachází v novém ustáleném stavu. Přechod od jednoho ustáleného stavu k druhému se nazývá přechodný jev. Přechodné jevy vznikají v důsledku přítomnosti akumulacních prvků L a C v obvodu. U obvodů bez L a C dochází k přechodům z jednoho ustáleného stavu v druhý okamžitě. Příčinou vzniku přechodného jevu může být buď náhlá změna budicího signálu, nebo změna ve struktuře obvodu (změna polohy přepínače apod.).

Přechodné jevy často vznikají při připojování zařízení nebo elektrických spotřebičů ke zdrojům. Na obr. 9-3a je RL článek, který je v okamžiku $t = 0$ připojen na zdroj harmonického napětí. Připojíme-li k tomuto článku napětí obdélíkového tvaru (obr. 9-3b), dojde po odeznění přechodného jevu k periodickému ustálenému stavu.

V praxi trvají přechodné jevy většinou velmi krátkou dobu - řádově mikrosekundy



Obr. 9-3 Postupný přechod obvodu do a) harmonického b) periodického ustáleného stavu po připojení ke zdroji

až milisekundy. Přesto mnohdy hrají důležitou úlohu. Bez řešení přechodných jevů se neobejdeme při návrhu řady zařízení (klopné obvody, časovače ...). Proto se v této kapitole naučíme řešit přechodné jevy u jednodušších obvodů. Dále umíme řešit obvody v harmonickém ustáleném stavu (pomocí fázorů), nikoliv však v ustáleném periodickém stavu. Seznámíme se proto s tzv. spektrální metodou analýzy obvodů v periodickém ustáleném stavu (metoda Fourierovy řady).

Otázky k samostatnému studiu

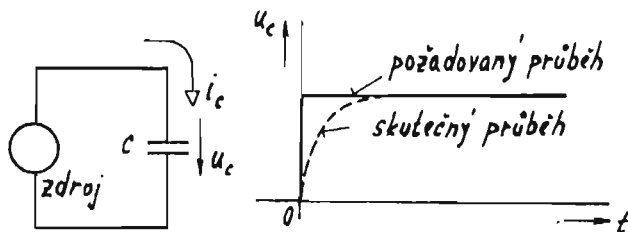
- 9-1 Co je to ustálený stav? Jaké typy ustálených stavů znáte?
- 9-2 Co je to přechodný jev (stav)? V jakých obvodech může vzniknout přechodný jev?
- 9-3 Co všechno může být příčinou vzniku přechodného jevu?

9.2 PŘECHODNÉ JEVY

Stavové veličiny

Položme si otázku: je možné, aby se nám podařilo skokově (za nekonečně krátkou dobu) změnit napětí na kapacitoru?

Odpověď: Není to možné. K zvýšení napětí na C potřebujeme z vnějšího zdroje dodat nabíjecí proud. Časový průběh proudu vy-

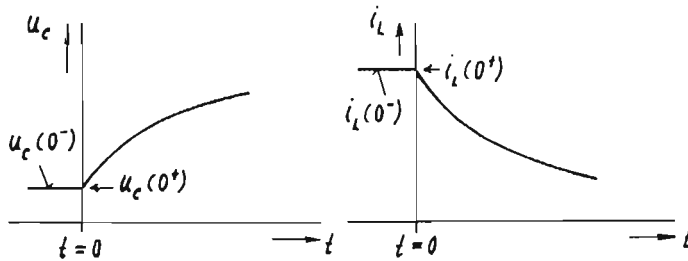


Obr. 9-4 Nabíjení kapacitoru

počítáme ze vztahu $i_C = C du_C/dt$. Požadujeme v čase $t = 0$ skokovou změnu u_C , tedy $du_C/dt \rightarrow \infty$. K tomu je nutné, aby zdroj dodal proudový impuls o nekonečně velké hodnotě. Takový zdroj však neexistuje, musel by být schopen dodat v okamžiku nabíjení nekonečný výkon. Proto ve skutečnosti nikdy nedojde k skokové změně napětí u_C . Funkce $u_C(t)$ je tedy spojitá.

U induktoru je situace obdobná. Ze vztahu mezi napětím a proudem $u_L = L di_L/dt$ plyne, že k skokové změně i_L by bylo zapotřebí přivést na svorky induktoru nekonečně velké napětí. Proto i funkce $i_L(t)$ je spojitá. Napětí na kondenzátoru a proud induktorem jednoznačně vyjadřují energetický stav obvodu: $W_C = \frac{1}{2} C u_C^2$, $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$. Proto se u_C a i_L nazývají stavové veličiny.

Ze spojitosti funkcí $u_C(t)$ a $i_L(t)$ plyne, že napětí na kondenzátoru a proud induktorem jsou "těsně" před začátkem přechodného jevu stejně velké jako "těsně" po začátku přechodného jevu. Limity funkce $u_C(t)$ a $i_L(t)$ pro $t \rightarrow 0$ zleva i zprava jsou stejné:

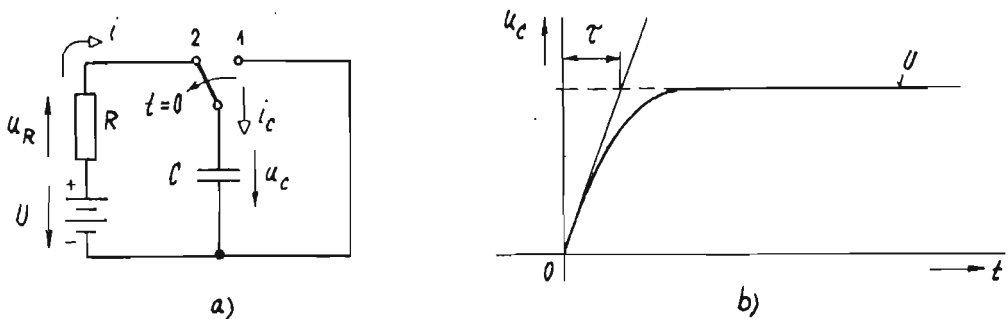


$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$
 $u_C(0^-) = u_C(0^+) = u_C(0)$.
 Veličiny $u_C(0)$ a $i_L(0)$ na začátku přechodného jevu se nazývají fyzikální počáteční podmínky, zkráceně počáteční podmínky.

Obr. 9-5 Spojitost stavových veličin $u_C(t)$ a $i_L(t)$

Odezva na počáteční podmínky, odezva na podnět, úplná odezva

Vybitý kondenzátor připojíme v čase $t = 0$ k baterii o napětí U v sérii s rezistorem R . Co se stane? V prvním okamžiku je $u_C = 0$ (kondenzátor byl vybit), a proto



Obr. 9-6 Nabíjení kondenzátoru na napětí zdroje U

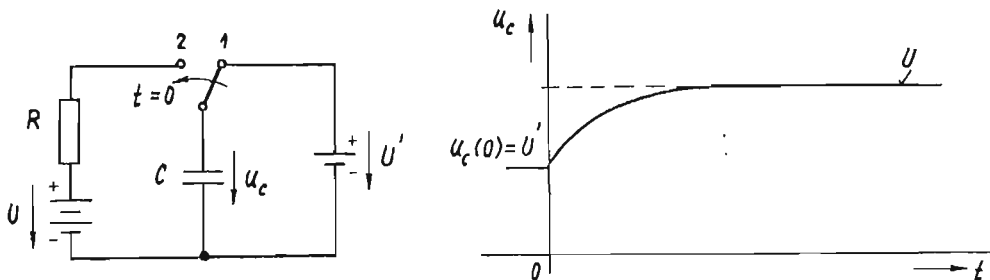
$u_R = U$ a rezistorem poteče ze zdroje do kondenzátoru proud $i = i_C = U/R$. Na elektrody kondenzátoru přiteká náboj q , na kondenzátoru se objeví napětí $u_C = q/C$. Kdyby ze zdroje U tekla do kondenzátoru stále stejný proud, náboj na elektrodách kondenzátoru by se stále hromadil a napětí u_C by se lineárně zvětšovalo, jak je to znázorněno na obr. 9-6b čárkovaně. Čemu je ale ve skutečnosti roven proud i v obvodu? $i = U_R/R = (U - u_C)/R$. Jestliže se kondenzátor nabíjí, roste u_C a proud i klesá. Jestliže i klesá, kondenzátor se nabíjí stále pomaleji, u_C se pomalu blíží k U a i se zmenšuje k nule. V ustáleném

stavu bude kapacitor nabit na celé napětí baterie a proud i nepoteče, protože $u_R=0$.

Křivka, po které se kapacitor nabíjí, je popsána exponenciální funkcí. Zkráceně jí říkáme exponenciála. Rychlost nabíjení kapacitoru určuje tzv. časová konstanta τ . Graficky se určí tak, že se sestrojí tečna k nabíjecí křivce na počátku přechodného jevu a určí se její průsečík s čarou $u_C = U$ (viz obr. 9-6b). Časová konstanta je doba, za kterou by se kapacitor nabil na celé napětí U , kdyby se nabíjel stále stejně rychle jako na začátku přechodného jevu. U obvodu, složeného z induktoru L a rezistoru R , dochází k podobnému ději. Časová konstanta obvodu RC se vypočte podle vzorce $\tau = RC$ [s], obvodu RL $\tau = L/R$ [s].

Přechodný jev nabíjení kapacitoru trvá přesně vzato nekonečně dlouhou dobu. Ve skutečnosti můžeme říct, že za dobu asi $t = 5\tau$ je už rozdíl mezi u_C a U tak malý, že došlo k ustálenému stavu.

Přechodný jev, který jsme sledovali, se nazývá odezva na podnět. Podnět = budící zdroj U vyvolal odezvu - t.j. nabíjení kapacitoru.



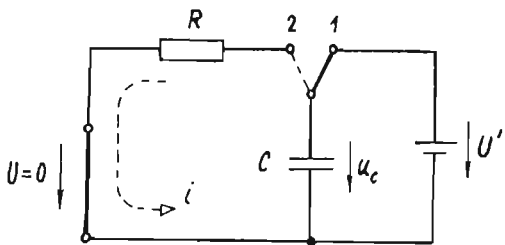
Obr. 9-7 Nabíjení kapacitoru s nenulovou počáteční podmínkou

Představme si nyní, že kapacitor nejprve nabijeme na napětí U' (přepínač v poloze 1) a pak jej připojíme k zdroji U (poloha 2). Jak bude vypadat přechodný jev nyní ? Je zřejmé, že tentokrát se kapacitor nabíje na napětí U rychleji, protože před přepnutím již byl nabit na napětí U .

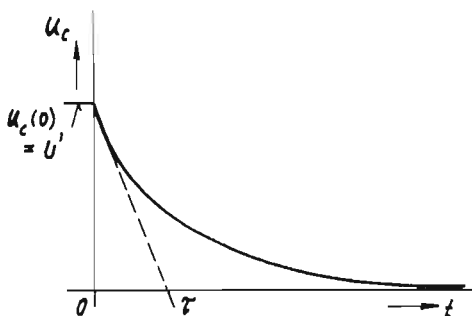
Průběh přechodného jevu závisí na počátečním stavu obvodu, t.j. na počátečních podmínkách $u_C(0)$, případně $i_L(0)$.

Jestliže budící zdroj - podnět působí na obvod s nenulovými počátečními podmínkami $u_C(0)$, $i_L(0)$, pak vzniklý přechodný jev nazýváme úplná odezva.

Nakonec si představme situaci na obr. 9-8. Viděli jsme, že mezi odezvou na podnět, kde $u_C(0) = 0$, a úplnou odezvou, kde $u_C(0) \neq 0$ jsou rozdíly. Tyto rozdíly jsou způsobeny právě počáteční podmínkou $u_C(0)$. Proto vyřadíme z činnosti zdroj U (podnět) tím, že ho zkratujeme - $U = 0$ a budeme sledovat jen odezvu na počáteční podmínku $u_C(0)$. Co se stane po přepnutí do polohy 2 ? Kapacitor je nabit na počáteční podmínku $u_C(0) = U'$. Paralelně je zapojen rezistor R , kterým začne protékat proud $i = u_C/R$. Rezistor se začne zahřívat, výkon na něm se mění v teplo. Množství



Obr. 9-8 Vybití kapacitoru



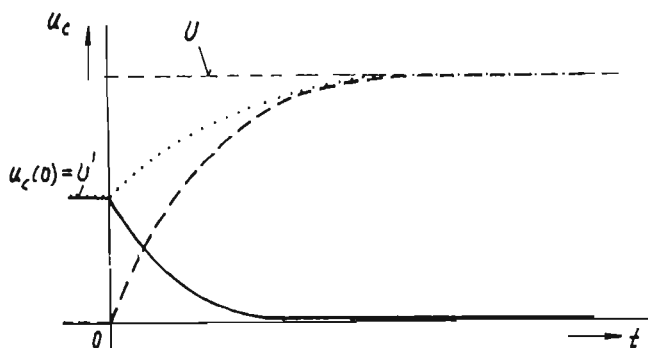
Obr. 9-9 Časový průběh vybíjecího napětí kondenzátoru

náboje na kondenzátoru se zmenšuje, klesá napětí u_C . Proto klesá i vybíjecí proud $i = u_C/R$. Rychlost vybíjení se zpomaluje. Vybíjecí křivka má proto podobný tvar jako nabíjecí - je to opět exponenciální funkce.

Poznámka : Vybíjení si můžeme představit jako nabíjení po exponenciále na napětí $U = 0$.

Nakreslíme-li odezvu na počáteční podmínku, odezvu na podnět a úplnou odezvu do společného grafu, vidíme, že

úplná odezva = odezva na podnět + odezva na počáteční podmínky



..... úplná odezva
 --- odezva na podnět
 — odezva na počáteční podmínku $u_C(0) = U'$

Obr. 9-10 Vztah mezi odezvou na podnět, odezvou na počáteční podmínku a úplnou odezvou

Je to v souladu s principem superpozice, který platí v lineárních obvodech. Úplná odezva je vyvolána dvěma příčinami : 1. podnětem

2. počáteční energií kondenzátorů a induktorů, t.j. poč. podmínkami $u_C(0)$ a $i_L(0)$.

Obě příčiny působí současně. Jejich účinek je stejný, jako kdyby působily samostatně :

- 1) působí podnět a nepůsobí počáteční podmínky → odezva na podnět
- 2) působí počáteční podmínky a nepůsobí podnět → odezva na počáteční podmínky

Σ působí současně podnět i počáteční podmínky → Σ úplná odezva

Přechodný jev může mít charakter odezvy na podnět, odezvy na počáteční podmínky nebo úplné odezvy. Podle toho pak závisí způsob jeho řešení.

Otázky k samostatnému studiu

- 9-4 Co jsou to stavové veličiny ? Jakou mají vlastnost ?
- 9-5 Proč se nemůže měnit skokem napětí na kondenzátoru a proud induktorem ?
- 9-6 Nakreslete časový průběh nabíjení kondenzátoru ze zdroje napětí přes rezistor R. Jak se graficky určí časová konstanta ? Jak se vypočte z hodnot součástek obvodu ?
- 9-7 Nakreslete časový průběh vybíjení kondenzátoru přes rezistor R. Jak se určí časová konstanta z vybíjecí křivky ?
- 9-8 Jaký je rozdíl mezi odezvou na podnět, odezvou na počáteční podmínku a úplnou odezvou ? Kam byste zařadili nabíjení kondenzátoru, vybíjení nabitého kondenzátoru a přebíjení nabitého kondenzátoru na jiné napětí ?

Řešení přechodných jevů

Naučíme se řešit přechodné jevy, kdy budicí podnět je buď stejnosměrné napětí nebo proud, nebo harmonická veličina. Složitější buzení probere v části 9.3. Dále budeme vycházet z toho, že přechodný jev začíná z ustáleného stavu a končí novým ustáleným stavem. To je vlastnost obvodů, které se nazývají stabilní.

V obvodech s akumulacími prvky s obecnými časovými průběhy samozřejmě platí Kirchhoffovy zákony i Ohmův zákon pro rezistory. Mezi napětím a proudem akumulací prvků musíme uvažovat obecné vztahy $i_C = C du_C/dt$, $u_L = L di_L/dt$, případně

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt, \quad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Při řešení každého přechodného jevu budeme postupovat podle těchto bodů :

1. Určíme počáteční podmínky přechodného jevu $u_C(0)$ a $i_L(0)$ a počáteční hodnoty ostatních veličin, které nás zajímají.
2. Určíme nový ustálený stav po uplynutí přechodného jevu. V případě stejnosměrného ustáleného stavu hodnoty $u_C(\infty)$ a $i_L(\infty)$, případně hodnoty veličin, které nás zajímají. V případě harmonického ustáleného stavu fázory \dot{U}_C a \dot{I}_L a z nich okamžité hodnoty, případně fázory a okamžité hodnoty ostatních hledaných veličin.
3. Sestavíme diferenciální rovnici (DR) obvodu pro časový interval, v němž probíhá přechodný jev.
4. Vyřešíme DR za pomoci informací z bodů 1 a 2.

Metoda řešení přechodných jevů přímým řešením DR je klasická metoda. V předmětu Teorie obvodů se seznámíme s efektivnější metodou, založenou na teorii Laplaceovy transformace.

Postup řešení diferenciální rovnice je shrnut v Tab. 9-1.

Tab. 9-1 Řešení DR stabilních obvodů 1. a 2. řádu

DR :	$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$	← nehomogenní DR (s pravou stranou)
$a_0, a_1, a_2 \dots$	konstanty, dané parametry obvodu	
$x = x(t)$... neznámá (hledaná) obvodová veličina	
$f(t)$... funkce času, která závisí na budicím podnětu (na zdrojích)	
Obecné řešení DR = obecné řešení homogenní DR + nový ustálený stav		
$x(t)$	=	$x_h(t)$ + $x_\infty(t)$
Homogenní DR = DR bez pravé strany $f(t) = 0$		
Řešení homogenní DR :	$x_h(t)$	
	charakteristická rovnice	
	$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$	
	⇓	
	kořeny λ_1, λ_2	
<u>Kořeny</u> :	<u>reálné různé</u>	$x_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$
	<u>reálné stejné</u>	$x_h(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$
	<u>komplexní</u>	$\lambda_{1,2} = a \pm jb \Rightarrow x_h(t) = A_1 e^{at} \cos(bt) + A_2 e^{at} \sin(bt)$
	$A_1, A_2 \dots$ integrační konstanty	

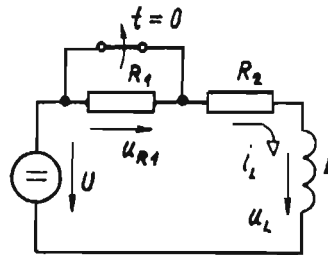
Př. 9-1 : Určete časový průběh u_L , i_L a u_{R1} po rozeznutí spínače.

$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 100 \Omega$
 $U = 10 \text{ V}$
 $L = 0,1 \text{ H}$

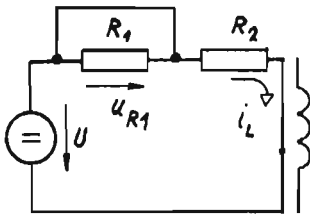
Řešení :

1. Určení počátečních podmínek přechodného jevu.

Před rozeznutí spínače je v obvodu stejnosměrný ustálený stav : "odpor" inductoru pro stejnosměrné napětí je nula \rightarrow představuje zkrat :



Obr. 9-11



Obr. 9-12 Určení počátečních podmínek

Z obr. plyne :

$$u_{R1}(0^-) = 0$$

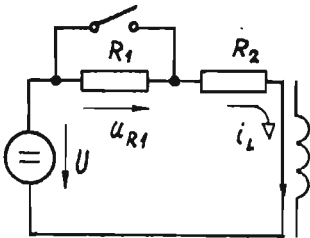
$$u_L(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{U}{R_2} = \frac{10 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,1 \text{ A}$$

Poznámka : V případě, kdyby v obvodu byl kapacitor, pak v stejnosměrném ustáleném stavu představuje nekonečně velký "odpor".

Přechodný jev bude mít charakter celkové odezvy.

2. Určení nového ustáleného stavu po uplynutí přechodného jevu.



Obr. 9-13 Určení nového ustáleného stavu

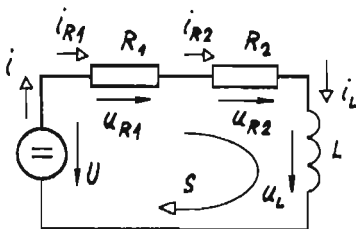
Po uplynutí přechodného jevu nastane opět stejnosměrný ustálený stav :

$$i_L(\infty) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{10 \text{ V}}{(10000 + 100) \Omega} \approx 0,99 \text{ mA}$$

$$u_L(\infty) = 0$$

$$u_{R1}(\infty) = R_1 i_L(\infty) \approx 10000 \cdot 0,99 \cdot 10^{-3} = 9,9 \text{ V}$$

3. Sestavení DR obvodu.



Obr. 9-14

Sestavíme rovnici II. Kirchhoffova zákona pro schéma na obr. 9-14 (spínač rozpojen)

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = U$$

což je přímo hledaná DR pro neznámou veličinu $i(t) = x(t)$.

4. Vyřešení DR - probíhá podle tabulky Tab. 9-1 .

DR je 1. řádu ($n=1$) s pravou stranou (nehomogenní).

Řešení homogenní DR $x_h(t)$ (DR bez pravé strany) :

Charakteristická rovnice $L\lambda + (R_1 + R_2) = 0$

kořen $\lambda_1 = -\frac{R_1 + R_2}{L}$ reálný, $x_h = i_{Lh}$

$$i_{Lh}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} = A_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}$$

A_1 integrační konstanta

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \text{ časová konstanta}$$

$$i_{Lh}(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{0,1}{10000 + 100} \doteq 9,9 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 9,9 \mu\text{s}$$

Obecné řešení DR :

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{L\infty}(t)$$

$i_{L\infty}(t)$ nový ustálený stav, který již známe (bod 2) : $i_L(\infty) = \frac{U}{R_1 + R_2} \doteq 0,99 \text{ mA}$.

Proto
$$i_L(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{R_1 + R_2}$$

Zbývá určit integrační konstantu A_1 . Vypočítáme ji z počáteční podmínky

$$i_L(0) = \frac{U}{R_2} = 0,1 \text{ A}$$

$$i_L(0) = A_1 \cdot e^0 + \frac{U}{R_1 + R_2} \Rightarrow A_1 = i_L(0) - \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_2(R_1 + R_2)} U$$

Výsledné řešení je

$$i_L(t) = \frac{R_1}{R_2(R_1 + R_2)} U e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Dále je třeba určit $u_{R1}(t)$ a $u_L(t)$:

$$u_{R1}(t) = R_1 i_L(t) = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$u_L(t) = U - i_L(R_1 + R_2) = -\frac{R_1}{R_2} U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Po dosazení číselných hodnot

$$i_L(t) \doteq 0,99 (1 + 100 e^{-t/\tau}) \text{ mA}$$

$$u_{R1}(t) \doteq 9,9 (1 + 100 e^{-t/\tau}) \text{ V}$$

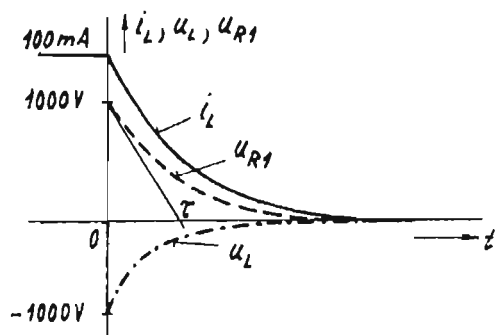
$$u_L(t) = -1000 e^{-t/\tau} \text{ V}$$

Grafické znázornění výsledků je na obr. 9-15.

Vičíme, že v čase $t=0$ došlo k nespojitě změně veličin u_{R1} a u_L . Přestože napájecí zdroj má napětí jen 10 V, objevilo se v obvodu napětí o hodnotě 1000 V. Vysvětlíte proč !

Praktický závěr : Snaha o rychlé snížení proudu indukční zátěží je doprovázena vznikem napěťových impulsů, které mohou způsobit poškoze-

$$\tau = 9,9 \mu\text{s}$$



Obr. 9-15 Výsledné průběhy přechodného jevu v RL obvodu

ní elektrického obvodu.

Poznámka : Řád obvodu

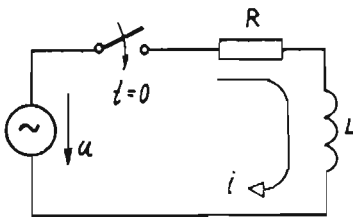
DR analyzovaného obvodu byla 1. řádu. Říkáme proto, že obvod je 1. řádu. Obecně :

$$\boxed{\text{řád DR} = \text{řád obvodu}}$$

V mnoha případech platí, že řád obvodu je roven počtu akumulčních prvků v obvodu. Někdy však řád obvodu může být menší. Podrobněji se touto otázkou budeme zabývat v Teorii obvodů v tématu "Metoda stavové proměnné".

K obvodům 1. řádu patří různé varianty jednoduchých RL a RC článků. Přechodný jev zde probíhá po exponenciále. Důležitou charakteristikou obvodů 1. řádu je časová konstanta.

Př. 9-2 : Přechod obvodů 1. řádu do harmonického ustáleného stavu.



Obr. 9-16

Určete průběh proudu i po připojení indukční zátěže k zdroji harmonického napětí $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U)$.

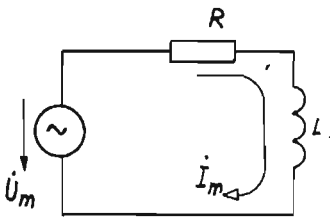
$$R = 25 \Omega, L = 1 \text{ H}, U_m = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}, \psi_U = 85,5^\circ$$

Řešení :

1. Určení počátečních podmínek přechodného jcvu.

Před sepnutím spínače je v obvodu ustálený stav, $i(0) = 0 \text{ A}$. Přechodný jev bude mít charakter odcvy na podnět.

2. Určení nového ustáleného stavu po uplynutí přechodného jcvu.



Obr. 9-17 Určení harmon. ustáleného stavu

Po uplynutí přechodného jcvu nastane harmonický ustálený stav :

$$\dot{U}_m = U_m \angle \psi_U = \sqrt{2} \cdot 220 \angle 85,5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m \angle \psi_U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \varphi} =$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \psi_U - \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \doteq 85,5^\circ$$

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_I; I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \doteq 0,987 \text{ A}, \psi_I = \psi_U - \varphi \doteq 0^\circ$$

Proto $\dot{I}_m = I_m \angle \psi_I \rightarrow i_m(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_I)$
 $\doteq 0,987 \angle 0^\circ \rightarrow \doteq 0,987 \cos \omega t \text{ ampérů} \dots \text{ harmonický ustálený stav}$

3,4. Sestavení DR, řešení DR.

V předešlém příkladu jsme řešili DR obvodu tohoto typu. Opíšeme výsledek řešení homogenní DR :

$$i_h(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{25} \text{ s} = 40 \text{ ms}.$$

Obecné řešení nehomogenní DR :

$$i(t) = i_h(t) + i_m(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \cos(\omega t + \psi_I).$$

Integrační konstantu A_1 určíme z počáteční podmínky $i(0)=0$ A :

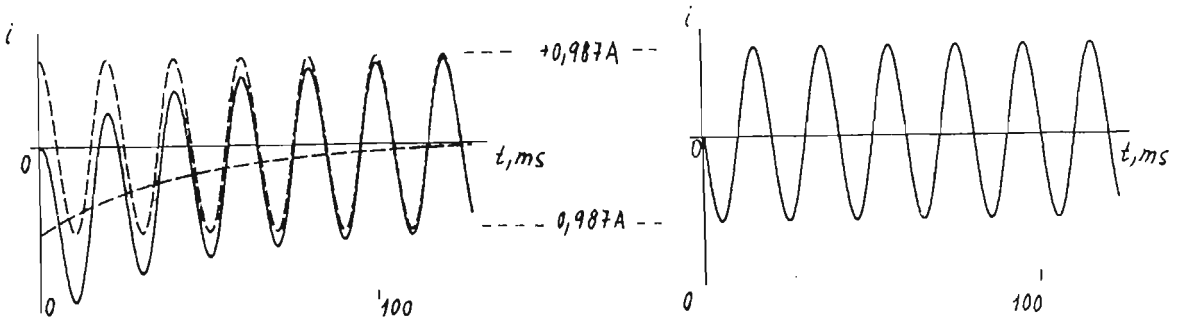
$$t = 0 \Rightarrow i(0) = A_1 e^0 + I_m \cos \psi_I \Rightarrow A_1 = i(0) - I_m \cos \psi_I = -I_m \cos \psi_I.$$

Proto

$$i(t) = -I_m \cos \psi_I e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \cos(\omega t + \psi_I).$$

Po dosazení číselných hodnot $I_m = 0,987$ A, $\psi_I = 0^\circ$ vyjde

$$i(t) = (0,987 \cos \omega t - 0,987 e^{-t/\tau}) \text{ A}.$$



Obr. 9-18 Přechodný jev z Př. 9-2 pro dva různé okamžiky sepnutí spínače (viz obr. 9-16)

Přechodná složka je tím větší, čím je větší $\cos \psi_I = \cos(\psi_U - \varphi)$. Při $\psi_U = \varphi$ je největší ($\cos 0 = 1$), při $\psi_U - \varphi = 90^\circ$ se neuplatní ($\cos(90^\circ) = 0$). Proto charakter přechodného jevu závisí na tom, v kterém okamžiku je spotřebič připojen k síti. V některých případech dojde přímo k ustálenému stavu (obr. 9-18b), jindy může proudová špička způsobit přerušení špatně dimenzovaných pojistek (obr. 9-18a).

Příklady k procvičení

9-1 Sestavte diferenciální rovnici pro nabíjení kapacitoru ze zdroje stejnosměrného napětí U přes rezistor R . Před začátkem nabíjení byl kapacitor nabit na napětí $U' = 0$. DR vyřešte a nakreslete časový průběh přechodného jevu pro různé vztahy mezi U a U' . Nakreslete časový průběh nabíjecího proudu.

$$\text{Výsledek : } u_C(t) = U(1 - e^{-t/\tau}) + U' e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$

$$i_C(t) = \frac{U - U'}{R} e^{-t/\tau}.$$

9-2 Řešte přechodný jev vybíjení kapacitoru přes rezistor. Nakreslete časové průběhy napětí u_C a vybíjecího proudu.

$$\text{Výsledek : } u_C(t) = u_C(0) e^{-t/\tau},$$

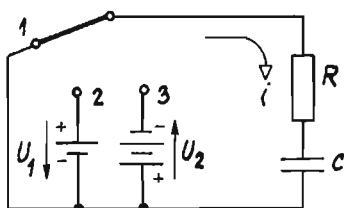
$$i_C(t) = \frac{u_C(0)}{R} e^{-t/\tau}.$$

9-3 Vysvětlete průběhy přechodných jevů v Tab. 9-2. Doplňte průběhy ostatních obvodových veličin.

Tab. 9-2 Obvody 1. řádu - shrnutí

	<p>$\tau = RC$</p>
	<p>$\tau = RC$</p>
	<p>$\tau = RC$</p>
	<p>$\tau = \frac{L}{R}$</p>
	<p>$\tau = \frac{L}{R}$</p>
	<p>$\tau = \frac{L}{R}$</p>

9-4



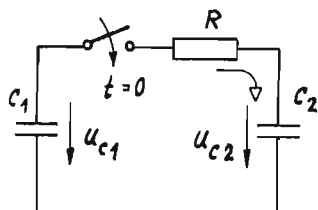
V obvodu na obrázku došlo v čase $t = 0$ k přeprnutí z polohy 1 do polohy 2 a po $250 \mu\text{s}$ z polohy 2 do polohy 3. Určete průběh proudu $i(t)$.

$R = 500 \Omega$, $C = 0,5 \mu\text{F}$, $U_1 = 20 \text{ V}$, $U_2 = 40 \text{ V}$

Výsledek : $i(t) = 0,04 e^{-4000t} \text{ A}$ pro $t = 0 \div 250 \mu\text{s}$,
 $i(t) = -0,1053 e^{-4000(t-250\mu\text{s})} \text{ A}$ pro $t > 250 \mu\text{s}$.

9-5 Sériový člen RL byl připojen v čase $t = 0$ k baterii o napětí 20 V. Určete časový průběh napětí na induktoru. $R = 10 \Omega$, $L = 0,01 \text{ H}$.
 Výsledek : $u_L(t) = 20 e^{-1000t} \text{ V}$.

9-6



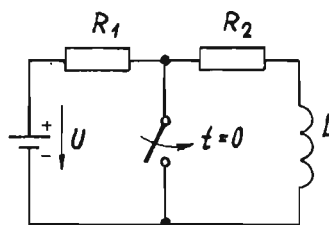
Kapacitor C_1 je nabit na náboj $Q_0 = 300 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, C_2 je vybit. Najděte časový průběh proudu i a napětí na C_2 .

$R = 20 \Omega$, $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$
 Výsledek : $i(t) = 2,5 e^{-2,5 \cdot 10^4 t} \text{ A}$,
 $u_{C2}(t) = 33,3 (1 - e^{-2,5 \cdot 10^4 t}) \text{ V}$.

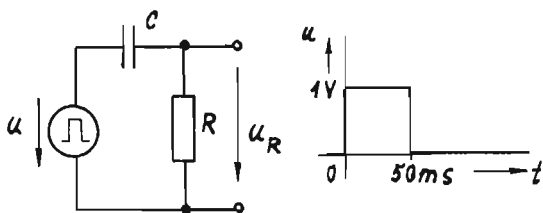
9-7 Určete průběh napětí na induktoru po sepnutí spínače.

$U = 1 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $L = 0,01 \text{ H}$

Výsledek : $u_L(t) = -0,5 e^{-10000t} \text{ V}$.



9-8



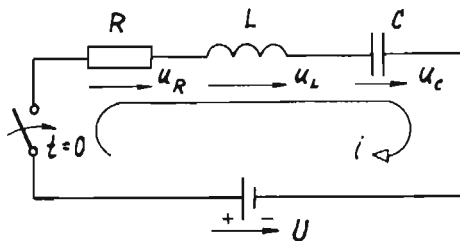
$C = 10 \text{ nF}$, $R = 1 \text{ M}\Omega$

Výsledek : $u_R(t) = e^{-10000t} \text{ V}$, $t = 0 \div 50 \text{ ms}$,
 $u_R(t) = -e^{-10000(t-50\text{ms})} \text{ V}$, $t \geq 50 \text{ ms}$.

K RC článku je připojen zdroj u . Obvod se nachází v stejnosměrném ustáleném stavu. V čase $t = 0$ se napětí skokově zvětší na 1 V. Dojde k přechodnému jevu. Po jeho odeznění napětí u klesne opět na nulu. Určte časový průběh u_R pro čas $t > 0$. Ukažte, že je tohoto obvodu možno využít k získání impulsů kladné i záporné polarity.

Jednoduché obvody RLC - obvody 2. řádu

Obvod na obrázku obsahuje akumulací prvky různého typu - kapacitor a induktor. Uvidíme, že přechodný jev už nebude mít charakter obyčejné exponenciály. Díky přelévání energie z L do C a opačně se mohou v průběhu přechodného jevu objevit kmity,



Obr. 9-19

kteře však časem slábnou, protože na rezistoru R vznikají ztráty. Čím je větší odpor R, tím budou ztráty větší. Použijeme-li příliš velkou hodnotu R, může se stát, že ke kmitům vůbec nedojde a přechodný jev bude pozvolna zanikat podobně jako u obvodů 1. řádu. Charakter přechodného jevu tedy bude záviset na tlumení, které vnáší do obvodu ztrátový prvek – rezistor. Uvedený jev má souvislost s pojmy tlumení a činitel jakosti, se kterými jsme se seznámili v teorii rezonančních RLC obvodů.

Pro obvod na obr. 9-19 můžeme psát rovnici II. Kirchhoffova zákona

$$\underbrace{Ri}_{u_R} + L \underbrace{\frac{di}{dt}}_{u_L} + \underbrace{u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt}_{u_C} = U \quad (9-1)$$

Abychom se zbavili integrálu, musíme obě strany rovnice derivovat podle času :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Dostali jsme homogenní DR 2. řádu.

Pro zjednodušení označíme : $\frac{R}{2L} = \beta$ konstanta útlumu [s^{-1}] (9-2)

$\frac{1}{LC} = \omega_r^2$, ω_r rezonanční kmitočet [rad/s] (9-3)

Proto DR je v tvaru

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\beta \frac{di}{dt} + \omega_r^2 i = 0} \quad (9-4)$$

Tuto rovnici řešíme podle tabulky Tab. 9-1. Charakteristická rovnice bude

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_r^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_r^2} \\ \lambda_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_r^2} \end{aligned}$$

Mohou nastat tři různé případy :

1. $\beta^2 > \omega_r^2$, neboli $(\frac{R}{2L})^2 > \frac{1}{LC}$

Kořeny λ_1 , λ_2 jsou pak reálné různé, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Řešení bude

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (9-5)$$

Grafický průběh je na obr. 9-20b. Říkáme, že obvod se nachází v aperiodickém stavu. Odpor R je příliš velký, nedojde ke kmitání.

2. $\beta^2 = \omega_r^2$, neboli $(\frac{R}{2L})^2 = \frac{1}{LC}$

Kořeny λ_1 , λ_2 jsou reálné stejné : $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$. Proto

$$i(t) = A_1 e^{-\beta t} + A_2 t e^{-\beta t} \quad (9-6)$$

Grafický průběh je na obr. 9-20c. Říkáme, že obvod se nachází na mezi aperiodicity. Přechodný jev se ustaluje v nejkratším možném času. Kdybychom velikost R dále zmenšili, přechodný jev by už měl kmitavý charakter (obr. 9-20d,e).

3. $\beta^2 < \omega_r^2$, neboli $(\frac{R}{2L})^2 < \frac{1}{LC}$

Pro kořeny λ_1 , λ_2 platí

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_r^2 - \beta^2)} = -\beta \pm j\sqrt{\omega_r^2 - \beta^2} = -\beta \pm j\omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_r^2 - \beta^2}$$

...

kmitočet vlastních kmitů

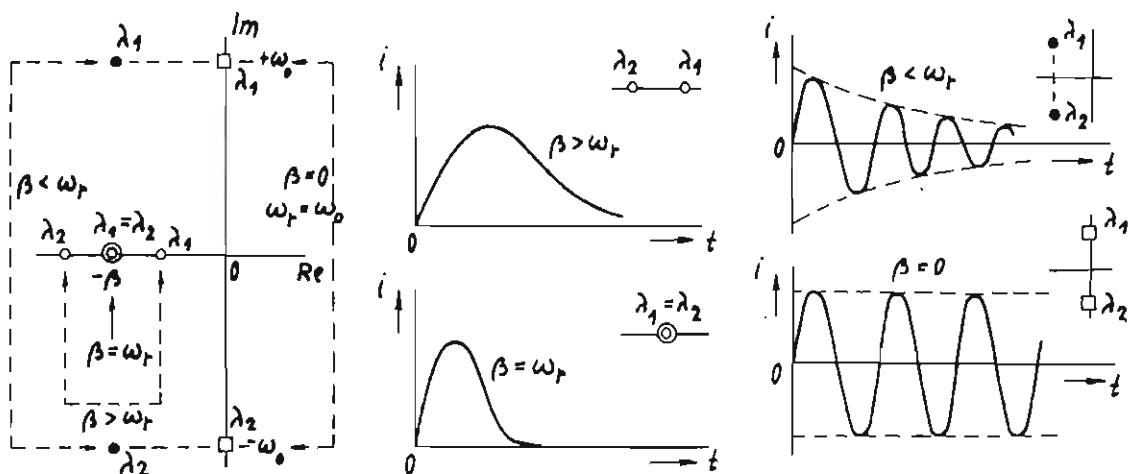
(9-7)

Kořeny jsou komplexní a komplexně sdružené. Proto

$$i(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t + A_2 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \quad (9-8)$$

Grafický průběh je na obr. 9-20d. Říkáme, že obvod se nachází v kmitavém režimu. Všimněme si, že pro $\beta = 0$, t.j. pro $R = 0$ budou kmity netlumené (obr. 9-21e).

Z obr. 9-20 dále plyne souvislost mezi polohou kořenů λ_1 a λ_2 v komplexní rovině a charakterem přechodného jevu. Pro reálné kořeny je průběh aperiodický, pro komplexní kořeny kmitavý. Míra tlumení je určována reálnou složkou kořenů, t.j. konstantou útlumu β .



Obr. 9-20 Souvislost mezi polohou kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině a časovým průběhem přechodného jevu

Je zřejmé, že podmínka $\beta^2 = \omega_r^2$, neboli $(\frac{R}{2L})^2 = \frac{1}{LC}$ udává hranici mezi aperiodickým režimem a režimem kmitavým. Z podmínky plyne

$$R = R_{krit} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9-9)$$

R_{krit} je tzv. kritický odpor : pro $R > R_{krit}$ je obvod v aperiodickém režimu
pro $R < R_{krit}$ je obvod v kmitavém režimu.

Poznámka : Všimněme si, že $\sqrt{\frac{L}{C}}$ je tzv. charakteristická impedance rezonančního obvodu Z_0 , která byla zavedena v kapitole 7. Je tedy $R_{krit} = 2 Z_0$. Činitel jakosti je u sériového RLC obvodu

$$Q = \frac{Z_0}{R} = \frac{1}{2} \frac{R_{krit}}{R} \quad (9-10)$$

Pro stav na mezi aperiodicity je tedy $Q = 1/2$. Pro aperiodický režim $Q < 1/2$, pro kmitavý režim $Q > 1/2$. V radioelektronice se rezonanční obvody využívají především v kmitavém režimu, kde $Q \approx 100 \div 200$.

Způsob výpočtu integračních konstant A_1, A_2 si vysvětlíme na příkladu.

Př. 9-3 : K sériovému obvodu RLC s $R = 3 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ H}$ a $C = 200 \mu\text{F}$ byla v čase $t = 0$ připojena baterie o napětí $U = 50 \text{ V}$. Nalezněte průběh proudu, když kapacitor před připojením baterie byl vybit.

Řešení :

Kritický odpor je $R_{krit} = 2\sqrt{L/C} = 2\sqrt{10/(200 \cdot 10^{-6})} = 447\Omega < R \Rightarrow$ přechodný jev bude aperiodický.

Rovnice II. Kirchhoffova zákona má po připojení baterie tvar

$$3000i + 10 \frac{di}{dt} + \frac{1}{200 \cdot 10^{-6}} \int_0^t i dt + u_c(0) = 50 \quad \text{nebo} \quad (9-11)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 300 \frac{di}{dt} + 500i = 0.$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 300\lambda + 500 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = -298,3$, $\lambda_2 = -1,67$. Proto

$$i(t) = A_1 e^{-1,67t} + A_2 e^{-298,3t} \quad \text{ampérů.}$$

Konstanty A_1, A_2 určíme z dvou počátečních podmínek. Protože sériový obvod obsahuje indukčnost, musí být $i(t)$ spojitá funkce. Proto $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$ A :

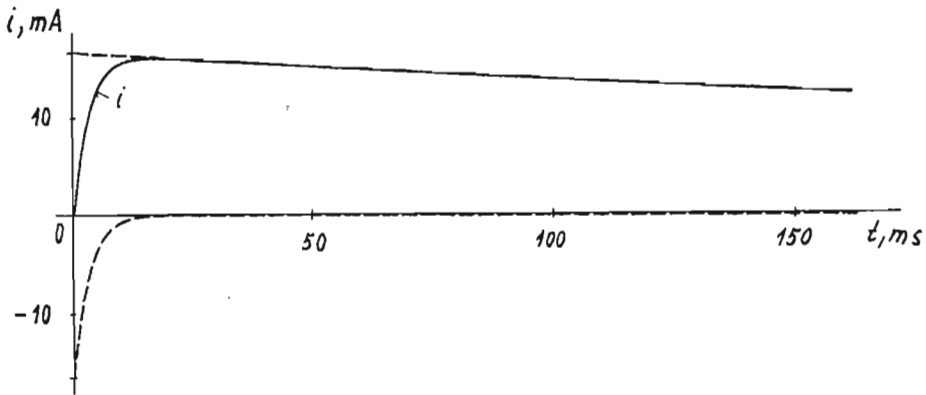
$$i(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0.$$

Z (9-11) plyne pro čas $t=0$: $10 \frac{di}{dt} = 50 \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 5$ A/s. Zároveň platí

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (A_1 e^{-1,67t} + A_2 e^{-298,3t}) = -1,67A_1 e^{-1,67t} - 298,3A_2 e^{-298,3t}.$$

Pro $t=0$: $5 = \frac{di}{dt} = -1,67A_1 - 298,3A_2$. Dosadíme $A_1 + A_2 = 0$ a vypočteme $A_1 = 0,0168$ A, $A_2 = -0,0168$ A. Pak

$$i(t) = 0,0168 e^{-1,67t} - 0,0168 e^{-298,3t} \quad \text{ampérů.}$$



Obr. 9-21 Průběh přechodného jevu z Př. 9-3

Př. 9-4 : V čase $t=0$ je kapacitor, nabitý na napětí U , připojen k paralelnímu obvodu RL. Určete časový průběh napětí $u(t)$.

Dáno : $U = 1$ V, $C = 1$ nF, $L = 1$ mH, $R = 6800\Omega$.

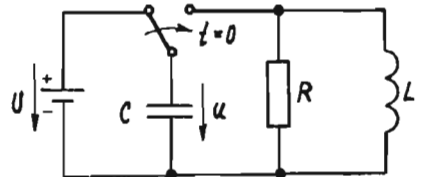
Řešení :

Pro $t > 0$ platí rovnice I. Kirchhoffova zákona :

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt = 0 \quad (9-12)$$

neboli

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0 \quad (9-13)$$



Označíme-li $\omega_r^2 = 1/(LC) = 10^{12} \text{ (rad/s)}^2$, $\beta = 1/(2RC) \doteq 7,35 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, máme DR stejného typu jako u sériového obvodu RLC :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_r^2 u = 0 \quad \text{se stejným řešením.} \quad (9-14)$$

$$\text{Kořeny } \lambda_1, \lambda_2 = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_r^2}.$$

Kritický odpor určíme ze vztahu

$$\beta^2 = \omega_r^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow R_{\text{krit}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} Z_0 = 500 \Omega. \quad (9-15)$$

Pro $R > R_{\text{krit}}$ kmitavý režim

$R < R_{\text{krit}}$ aperiodický režim

Z kapitoly o rezonančních obvodech plyne vztah pro činitel jakosti paralelního rezonančního obvodu : $Q = R/Z_0$. Je tedy

$$Q = \frac{R}{2R_{\text{krit}}} \quad (9-16)$$

Pro mez aperiodicity $Q = 1/2$ stejně jako u sériového RLC obvodu.

Pro náš případ $R = 6800 \Omega > R_{\text{krit}} = 500 \Omega \Rightarrow$ kmitavý režim.

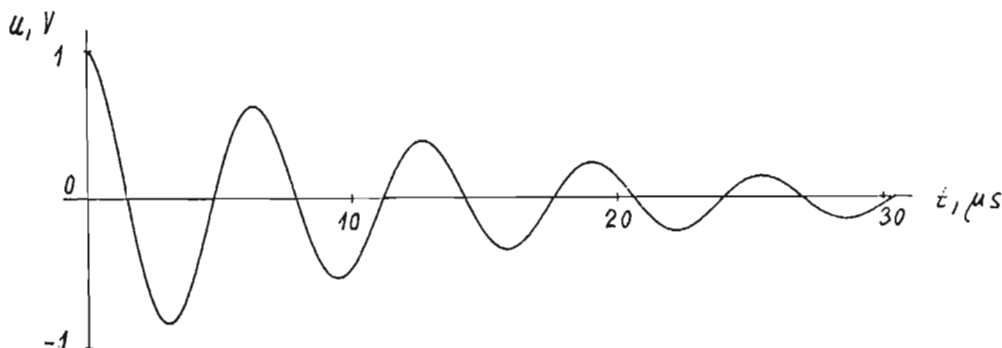
$$\beta^2 - \omega_r^2 = -9,9 \cdot 10^{11} \Rightarrow \lambda_1 = -7,35 \cdot 10^4 + j 9,98 \cdot 10^5$$

$$\lambda_2 = -7,35 \cdot 10^4 - j 9,98 \cdot 10^5$$

Proto

$$u(t) = A_1 e^{-7,35 \cdot 10^4 t} \cos 9,98 \cdot 10^5 t + A_2 e^{-7,35 \cdot 10^4 t} \sin 9,98 \cdot 10^5 t.$$

A_1 a A_2 určíme obdobným způsobem jako v Př. 9-3 : $A_1 = 1 \text{ V}$, $A_2 = -7,365 \cdot 10^{-2} \text{ V}$.



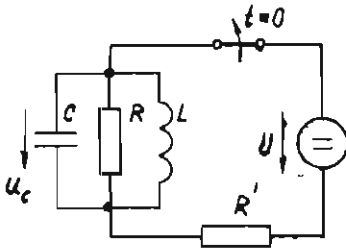
Obr. 9-22 Průběh přechodného jevu z Př. 9-4

Otázky k samostatnému studiu

- 9-9 Jaký může být průběh přechodného jevu v RLC obvodu 2. řádu při malém tlumení, při velkém tlumení a bez tlumení ?
- 9-10 Napište diferenciální rovnici RLC obvodu 2. řádu. Jaké jsou kořeny charakteristické rovnice λ_1, λ_2 pro aperiodický režim, režim na mezi aperiodicity a kmitavý režim ? Nakreslete tyto kořeny v komplexní rovině !
- 9-11 Jaký význam má veličina kritický odpor ?
- 9-12 Načrtněte průběh proudu sériovým RLC obvodem v aperiodickém a kmitavém režimu. Nakreslete průběhy napětí na induktoru a kapacitoru.
- 9-13 Totéž pro paralelní RLC obvod : nakreslete průběh napětí + průběhy i_C, i_L .
- 9-14 Načrtněte průběh proudu sériovým RLC obvodem v kmitavém režimu. Jak se na obrázku projeví zvětšení Q ?

Příklady k procvičení

9-9



V čase $t = 0$ je rozepnut spínač. Určete časový průběh napětí u_C pro $R = 100\Omega$, 500Ω a 1000Ω .

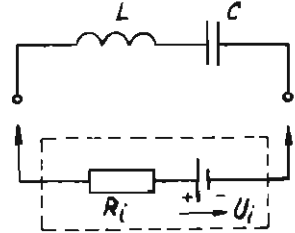
$L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $U = 5 \text{ V}$, $R' = 50\Omega$.

Výsledek : $10,2(-e^{-9898,9t} + e^{-101,02t}) \text{ V}$,
 $10^5 t e^{-1000t} \text{ V}$,
 $115,5 e^{-500t} \sin 866t \text{ V}$.

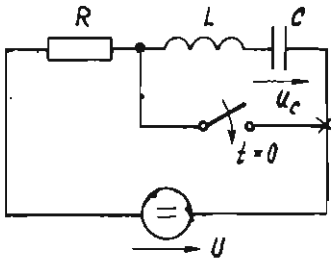
9-10 Jaký musí být maximální vnitřní odpor baterie, aby po jejím připojení nastal v obvodu kmitavý režim ?

$L = 25 \mu\text{H}$, $C = 1 \mu\text{F}$

Výsledek : $R_{i\text{max}} = 10\Omega$.



9-11



RLC obvod se nachází v ustáleném stavu. V čase $t = 0$ dojde k sepnutí spínače. Najděte časový průběh napětí na u_C .

$R = 100\Omega$, $L = 25 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $U = 1 \text{ V}$

Výsledek : $u_C(t) = \cos 6325t \text{ V}$.

9-12 K sériovému RLC obvodu, $R = 50\Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 50 \mu\text{F}$ připojíme zdroj harmonického napětí $u(t) = 100 \sin(1000t + \psi) \text{ V}$. V okamžiku připojení je $\psi = 90^\circ$. Nakreslete $i(t)$, jestliže v okamžiku připojení byl kapacitor vybit.

Výsledek : $i(t) = e^{-250t} \cdot 2,7 \sin 371t \text{ A}$.

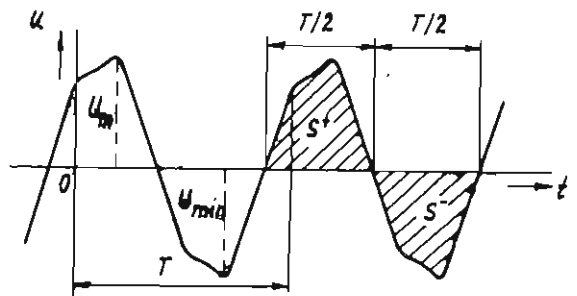
9.3 PERIODICKÉ SIGNÁLY A JEJICH SPEKTRA

Základní vlastnosti periodických signálů

Periodický signál je signál, jehož závislost na čase je vyjádřena periodickou funkcí. Tvar signálu se vždy začne opakovat s periodou T :
 $u(t+T) = u(t)$

Počet opakování periodické veličiny za jednotku času se nazývá základní kmitočet nebo zkráceně kmitočet periodické veličiny

$f = 1/T$, [Hz] (9-17)



Obr. 9-23 Příklad periodického signálu

Zvláštním případem periodické veličiny je střídavá veličina : po dobu $T/2$ je kladná, po druhou polovinu periody $T/2$ je záporná a obsahy ploch S^+ a S^- jsou si rovny (viz obr. 9-23). Dalším příkladem střídavé veličiny je harmonická veličina.

Časový průběh periodického signálu můžeme popsat jeho význačnými charakteristikami :

	U_m maximální hodnota
	U_{min} minimální hodnota
	U_a střední hodnota
	U efektivní hodnota

Význam U_m a U_{min} je jasný. U harmonického signálu je $U_m = -U_{min}$. Pojmy střední hodnota a efektivní hodnota jsme vysvětlili v kapitole 7. Zopakujme :

Střední hodnota periodického signálu $u(t)$ za 1 periodu je rovna jeho "průměrné" hodnotě za 1 periodu. Počítá se ze vztahu

$$U_a = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad , \quad t_0 \text{ je libovolný počáteční čas} \quad (9-18)$$

U střídavých veličin je $U_a = 0$, a proto se zde počítá střední hodnota jen v intervalu, kdy $u(t) \geq 0$ (tzv. střední hodnota za půl periody $U_{a1/2}$, viz kapitolu 7).

Efektivní hodnota U periodického signálu za 1 periodu dává obraz o výkonu signálu. Jestliže periodické napětí nebo proud pracuje do rezistoru R , pak dodává do rezistoru R činný výkon stejně velký jako stejnosměrný zdroj o napětí U . Efektivní hodnota se určí ze vzorce

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt} \quad , \quad t_0 \text{ je libovolný počáteční čas} \quad (9-19)$$

Př. 9-5 : Pro harmonickou veličinu $u(t) = U_m \cos \omega t$ určete střední hodnotu, střední hodnotu za půl periody a efektivní hodnotu.

Řešení :

Harmonický průběh je střídavý, proto $U_a = 0$: $U_a = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos \omega t dt = 0$.

Střední hodnota za půl periody = střední hodnota kladné půlvlny : zvolíme proto interval integrace $t \in \langle -T/4, T/4 \rangle$:

$$U_{a1/2} = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_m \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m.$$

Efektivní hodnota

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m.$$

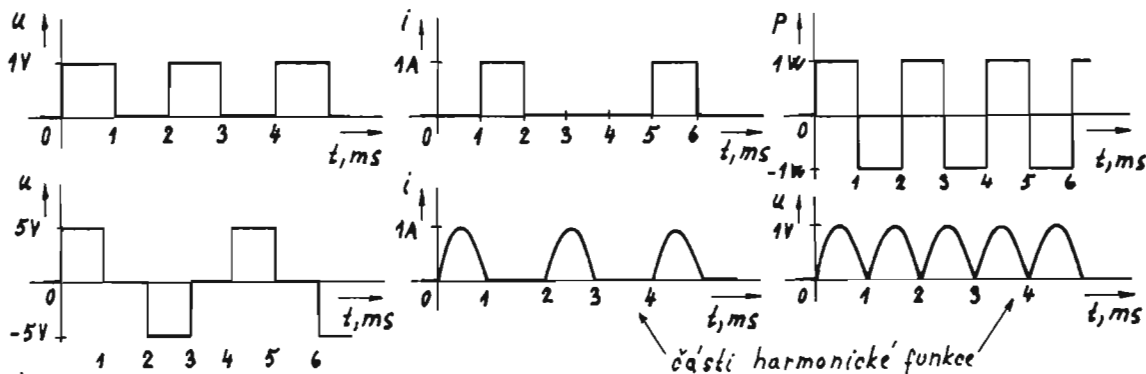
Otázky k samostatnému studiu

- 9-15 Vysvětlete pojmy periodický signál a střídavý signál. Kam byste zařadili harmonický signál ?
- 9-16 Vysvětlete pojem maximální a minimální hodnota, perioda, kmitočet.
- 9-17 Jaký je vztah mezi periodou a kmitočtem periodického signálu ?

- 9-18 Jaká je maximální a minimální hodnota napětí 220 V v rozvodné síti ?
 9-19 Vysvětlete pojem střední hodnota a efektivní hodnota a způsob výpočtu.
 9-20 Jak se určuje střední hodnota střídavého signálu ?

Příklady k procvičení

9-13 Určete střední a efektivní hodnoty uvedených signálů. Určete, které jsou střídavé. Dále určete periodu T, kmitočet f, maximální a minimální hodnotu.

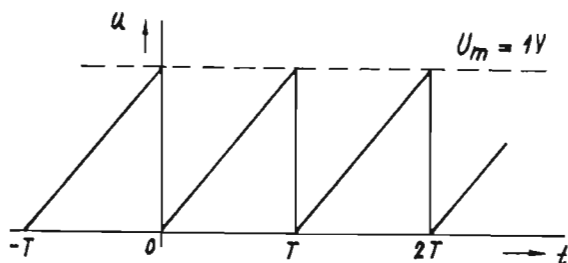


Výsledek :

	stř. hodnota	ef. hodnota	T, ms	f, kHz	max	min
a)	0,5 V	0,707 V	2	0,5	1 V	0
b)	0,25 A	0,5 A	4	0,25	1 A	0
c)	0	1 W	2	0,5	1 W	-1 W
d)	0	3,54 V	4	0,25	5 V	-5 V
e)	0,318 A	0,5 A	2	0,5	1 A	0
f)	0,637 V	0,707 V	1	1	1 V	0

Spektra periodických signálů

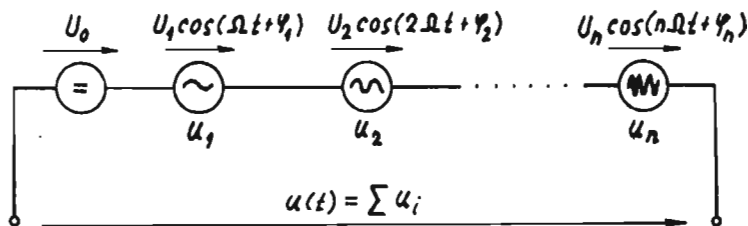
Na obrázku je pilovitý periodický signál u(t). Jeho maximální hodnota $U_m = 1$ V, perioda $T = 1$ s, kmitočet $F = 1/T = 1$ Hz, kruhový kmitočet $\Omega = 2\pi F = 2\pi$ rad/s.



Obr. 9-24 Periodický pilovitý signál

Máme vyřešit tento problém : K dispozici máme : 1) zdroj stejnosměrného napětí U_0 , velikost napětí U_0 můžeme libovolně měnit; 2) zdroj harmonického napětí $u_1 = U_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$. Toto napětí má stejný kmitočet jako pilovitý

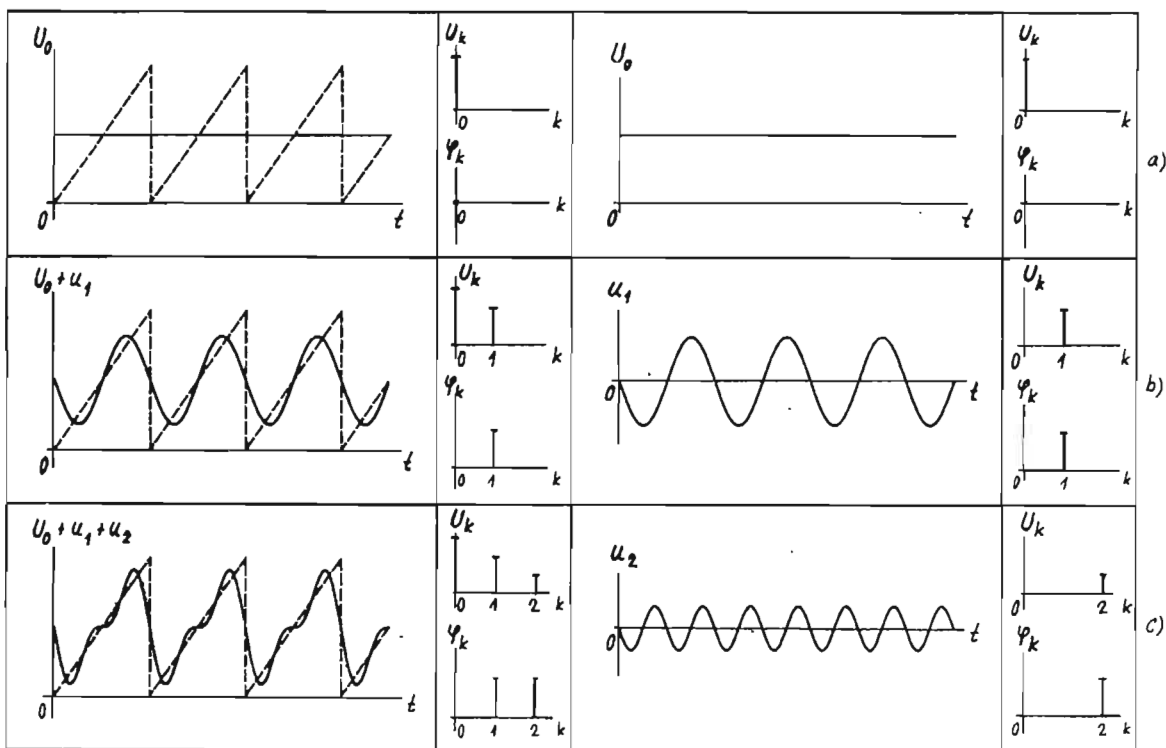
signál a můžeme libovolně měnit amplitudu U_1 a fázi φ_1 ; 3) obdobný zdroj napětí $u_2 = U_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$ o dvojnásobném kmitočtu; ... viz obr. 9-25. Tyto zdroje jsou zapojeny v sérii a jejich napětí se



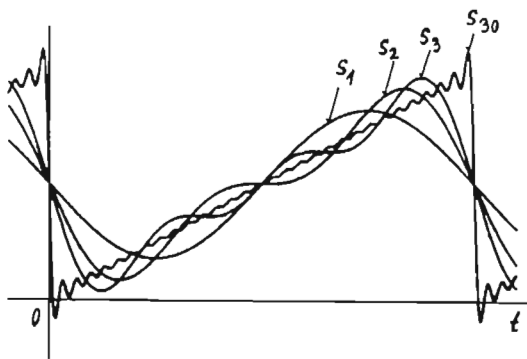
Obr. 9-25 Skládání period. signálu z harmon. složek

sčítají. Máme nastavit velikosti $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$; $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tak, aby součet $u(t)$ co nejpřesněji odpovídal pilovitému signálu na obr. 9-24.

Budeme postupovat takto : Nejprve nastavíme amplitudy všech zdrojů na nulu : $U_1 = U_2 = \dots = U_n = 0$. U_0 nastavíme tak, abychom co nejlépe aproximovali pilovitý signál, t.j. na jeho střední hodnotu (obr. 9-26a). Dále nastavujeme amplitudu a



Obr. 9-26 Postupné skládání pilovitého signálu z jeho harmonických složek



Obr. 9-27 Periodický signál jako součet harmonických složek

stejnoseměrné složky (ss) a harmonických složek :

$$u(t) \doteq 0,5 + 0,32\cos(\Omega t + 90^\circ) + 0,16\cos(2\Omega t + 90^\circ) + 0,11\cos(3\Omega t + 90^\circ) + \dots$$

Obecně
$$u(t) = U_0 + U_1\cos(\Omega t + \varphi_1) + U_2\cos(2\Omega t + \varphi_2) + \dots + U_k\cos(k\Omega t + \varphi_k) + \dots$$

ss složka

1. harmonická

2. harmonická

k -tá harmonická

Tomuto zápisu se říká Fourierova řada.

Vidíme, že každý periodický signál obsahuje harmonické složky. Můžeme se o tom přesvědčit : Přístrojem zvaným spektrální analyzátor můžeme ze signálu každou harmonickou složku vybrat a prohlédnout si ji např. na osciloskopu. Existence vyšších harmonických periodického signálu se může projevit např. v tom, že tyto signály způsobují rušení na mnohem vyšších kmitočtech, než je kmitočet F signálu. Například domácí spotřebiče, které pracují na kmitočtu 50 Hz, mohou způsobovat rušení rozhlasových nebo televizních přijímačů.

Mnoho zařízení pracuje na takovém principu, že z periodického signálu se vhodným elektrickým filtrem (např. rezonančním obvodem) vybere některá z vyšších harmonických tohoto signálu. Z periodického signálu o kmitočtu F tedy můžeme získat harmonický signál o vyšším kmitočtu kF , $k > 1$.

Každá harmonická má svou amplitudu a počáteční fázi. Můžeme ji proto zapsat jako fázor :

$$u_k(t) = U_k \cos(k\Omega t + \varphi_k) \quad \dots \quad \dot{U}_k = U_k \angle \varphi_k .$$

Pozor ! Každá harmonická má svůj vlastní kmitočet $k\Omega$! Každý fázor \dot{U}_k tedy rotuje jinou úhlovou rychlostí.

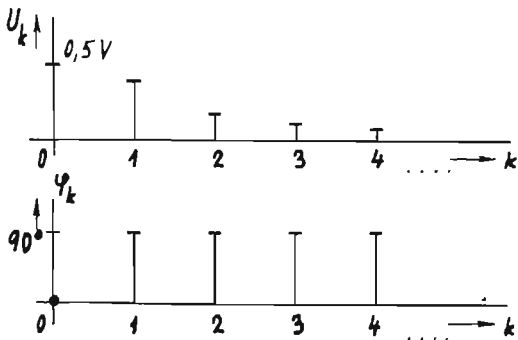
k -tou harmonickou určíme z vzorce

$$\dot{U}_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\Omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \dot{U}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad . \quad (9-20)$$

$\Omega = 2\pi/T = 2\pi F$ je kruhový kmitočet základní harmonické.

Poznámka : Pro $k=0$ dostaneme z (9-20) známý vztah pro střední hodnotu signálu za periodu T :

$$\dot{U}_0 = U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad , \quad \text{což je ss složka.}$$



Obr. 9-28 a) amplitudové, b) fázové spektrum pilovitého signálu

Spektrum periodického signálu je znázornění jeho harmonických složek na kmitočtové ose. Obr. 9-28 ukazuje spektrum pilovitého signálu; horní obrázek spektrum amplitud, spodní obrázek spektrum fází. Porovnejte s fourierovou řadou na předchozí straně !

Známe-li časový průběh signálu, můžeme určit jeho spektrum z vzorce (9-20). Naopak známe-li spektrum signálu, můžeme určit časový průběh jednotlivých harmonických a jejich sečtením získáme časový průběh celého periodického signálu.

Př. 9-6 : Určete spektrum pilovitého signálu na obr. 9-24.

Řešení : $T = 1$ s, $F = 1/T = 1$ Hz, $\Omega = 2\pi F = 2\pi$ rad/s, $U_m = 1$ V.

Časový průběh $u(t)$ v intervalu $t \in <0, T$) je přímka o rovnici $u(t) = \frac{U_m}{T} t$. Proto

$$\dot{U}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{U_m}{T} t e^{-jk\Omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \dot{U}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m}{T} t dt.$$

Po výpočtu integrálu dostaneme

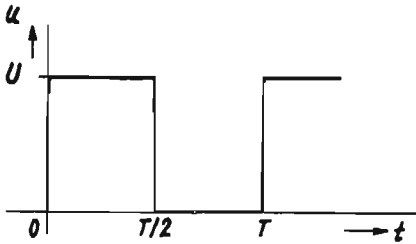
$$U_0 = \frac{U_m}{2}, \quad \dot{U}_k = j \frac{U_m}{k\pi} \Rightarrow U_k = \frac{U_m}{k\pi}, \quad \varphi_k = 90^\circ \text{ pro } k=1,2,3,\dots$$

Prvních deset harmonických složek je vypočteno v tabulce :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_k [V]	0,5000	0,3183	0,1592	0,1061	0,0796	0,0637	0,0531	0,0455	0,0398	0,0354	0,0318
φ_k [°]	0	90									

Porovnejte s obr. 9-26 a 9-27.

Př. 9-7 : Určete spektrum obdélníkového signálu na obr. 9-29.



$$U = 10 \text{ V}, \quad T = 1 \text{ ms}$$

Řešení : Základní kmitočet signálu je

$$F = 1/T = 1 \text{ kHz.}$$

Stejnoseměrnou složku můžeme určit přímo z obrázku. Je zřejmé, že to bude polovina maximální hodnoty : $U_0 = U/2 = 5 \text{ V.}$

Výpočet harmonických složek :

Obr. 9-29

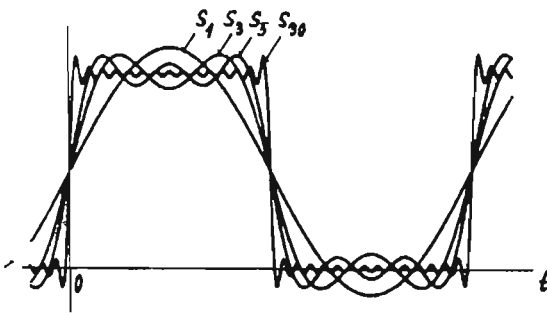
$$\dot{U}_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U e^{-jk\Omega t} dt$$

Po vyřešení integrálu dostaneme výsledek

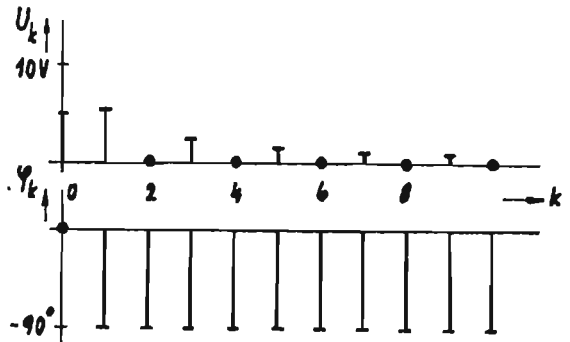
$$\dot{U}_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudá} \\ -j \frac{2U}{k\pi} & \text{pro } k \text{ lichá} \end{cases}$$

Po dosazení konkrétních hodnot můžeme vypsát tabulku a nakreslit spektra amplitud a fází.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_k [V]	5	6,366	0	2,122	0	1,273	0	0,909	0	0,707	0
φ_k [°]	0	-90									



Obr. 9-30 Obdélníkový signál jako součet jeho harmonických složek



Obr. 9-31 Amplitudové a fázové spektrum obdélníkového signálu

Na obr. 9-30 je znázorněno skládání jednotlivých harmonických ve výsledný obdélníkový signál. Zde s_k opět značí součet ss složky a prvních k harmonických.

Výpočet efektivní hodnoty periodického signálu z jeho spektrálních složek

Provádí se podle vztahu

$$U_{ef} = \sqrt{U_0^2 + U_{1ef}^2 + U_{2ef}^2 + \dots} \quad (9-21)$$

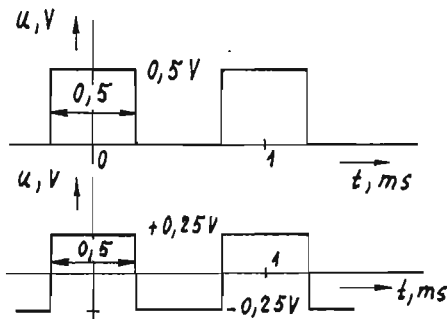
- kde U_{ef} efektivní hodnota periodického signálu
 U_0 ss složka signálu
 U_{1ef} efektivní hodnota první harmonické signálu, $U_{1ef} = U_{1m}/\sqrt{2}$.
 \vdots

Otázky k samostatnému studiu

- 9-21 Vysvětlete princip rozvoje periodického signálu v součet harmonických signálů.
 9-22 Co je to ss složka, základní harmonická a vyšší harmonické periodického signálu? Jak se vypočítají z průběhu $u(t)$?
 9-23 Co je to spektrum amplitud a fází periodického signálu?
 9-24 Jaké spektrum má ss signál $u(t) = +5$ V?
 9-25 Jaké spektrum má harmonický signál $i(t) = 2 \sin(314t)$ A?
 9-26 Proč může elektrický vysavač rušit televizní příjem?

Příklady k procvičení

- 9-14 Nakreslete na milimetrový papír časový průběh prvních čtyř harmonických složek z PŘ. 9-6. Pak je graficky sečtěte.
 9-15 Nakreslete na milimetrový papír časový průběh prvních pěti harmonických složek z PŘ. 9-7. Pak je graficky sečtěte.
 9-16 Vypočtěte ss složku a prvních pět spektrálních složek signálů na obrázcích. Spektra porovnejte a vysvětlete rozdíly.

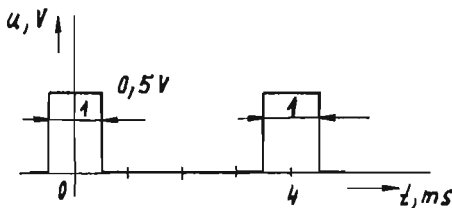


Výsledek :

- a) $U_0 = 0,25$ V, $U_1 = 0,318$ V, $U_2 = 0$ V,
 $U_3 = 0,106$ V, $U_4 = 0$ V, $U_5 = 0,064$ V,
 $\varphi_1 = \varphi_5 = 0^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$.
 b) $U_0 = 0$ V, ostatní jako u signálu a).

- 9-17 Vypočtěte ss složku a prvních pět spektrálních složek signálu na obrázku.

Výsledek : $U_0 = 0,25$ V, $U_1 = 0,225$ V, $U_2 = 0,159$ V, $U_3 = 0,075$ V, $U_4 = 0$ V, $U_5 = 0,045$ V
 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_5 = 180^\circ$.



Jaký je vztah mezi šířkou impulsů a šířkou jejich spektra?

Lineární obvod je buzen periodickým signálem u_1 , jehož časový průběh známe. Obvod se nachází v periodické ustáleném stavu. Máme určit, jak bude vypadat periodický signál na výstupu obvodu. Postupujeme takto :

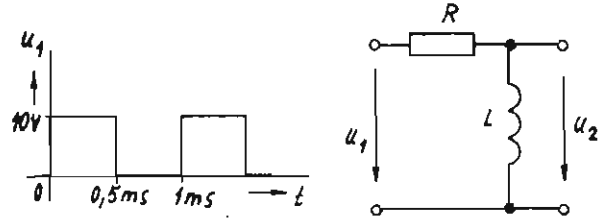
Rozložíme budicí signál na jeho harmonické složky :

$u_1(t) = U_{10} + U_{11} \cos(\Omega t + \varphi_{11}) + U_{12} \cos(2\Omega t + \varphi_{12}) + \dots$. Všechny složky působí na obvod najednou a vytvářejí odezvu u_2 na výstupu. Podle principu superpozice určíme odezvu zvlášť na každou složku. Součet dílčích odezev je roven celkové odezvě u_2 . Výstupní signál tedy určujeme tak, že vypočítáme jeho spektrální složky. Výpočet těchto složek je jednoduchý, protože při působení harmonických složek na vstupu obvodu se obvod nachází v harmonickém ustáleném stavu.

Př. 9-8 : Metodou Fourierovy řady určete průběh výstupního napětí u_2 RL článku v periodickém ustáleném stavu, buzeného obdélníkovými impulsy podle obrázku.

$R = 1,8 \text{ k}\Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$.

Řešení : Obdélníkový signál má základní kmitočet $F = 1 \text{ kHz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$. Rozložíme jej do Fourierovy řady. Stejnoseměrná složka, amplitudy a fáze jsou až do 10. harmonické vypočítány v Př. 9-7. Pro každou harmonickou určíme přenos RL článku. Přenos bude



Obr. 9-32 Působení obdélníkového signálu na RL obvod

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{\omega L \angle 90^\circ}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \arctg \frac{\omega L}{R}}$$

neboli

$$K(\omega) = K(\omega) \angle \psi(\omega), \quad K(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \psi(\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega L}{R}$$

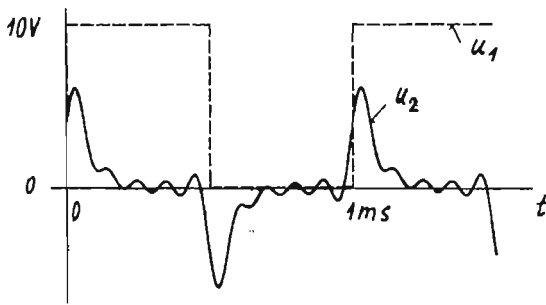
Výpočet uspořádáme do tabulky. Protože všechny sudé harmonické obdélníkového signálu jsou nulové, nejsou v tabulce uvedeny (nemá smysl počítat odezvy na tyto harmonické). Sloupce U_{1k} a φ_{1k} vyplníme z tabulky u Př. 9-7. Hodnoty v sloupcích U_{2k} a φ_{2k} určíme podle $U_{2k} = U_{1k} \cdot K(k \cdot \Omega)$, $\varphi_{2k} = \varphi_{1k} + \psi(k \cdot \Omega)$.

k	$k \cdot \Omega$ [rad/s]	U_{1k} [V]	φ_{1k} [°]	$K(k \cdot \Omega)$	$\psi(k \cdot \Omega)$ [°]	U_{2k} [V]	φ_{2k} [°]
0	0	5	0	0	90	0	-
1	6283	6,366	-90	0,330	70,8	2,102	-19,2
3	18850	2,122		0,723	43,7	1,532	-46,3
5	31416	1,273		0,868	29,8	1,104	-60,2
7	43982	0,909		0,925	22,3	0,840	-67,7
9	56549	0,707		0,953	17,7	0,674	-72,3

Odezvu $u_2(t)$ proto můžeme psát ve tvaru Fourierovy řady

$$u_2(t) \approx 2,102 \cos(\Omega t - 19,2^\circ) + 1,532 \cos(3\Omega t - 46,3^\circ) + 1,104 \cos(5\Omega t - 60,2^\circ) + 0,840 \cos(7\Omega t - 67,7^\circ) + 0,674 \cos(9\Omega t - 72,3^\circ) + \dots \text{ V}$$

Grafický součet této řady a výsledné spektrum jsou na obr. 9-33. Po porovnání s obr. 9-3: vyplývá, že RL článek potlačil harmonické na nižších kmitočtech a tyto harmonické také nejlépe fázově posunul.



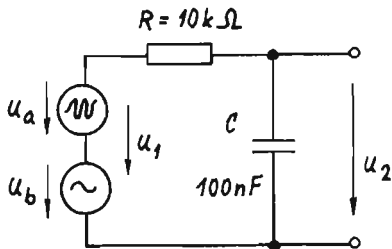
Obr. 9-33 Vypočítaný časový průběh a spektrum odezvy $u_2(t)$ z obr. 9-32

Otázky k samostatnému studiu

- 9-27 Vysvětlete podstatu analýzy obvodů metodou Fourierovy řady. Na čem závisí přesnost výsledků ?
- 9-28 Proč dochází k podstatné změně tvaru obdélníkového signálu z PŘ. 9-8 průchodem RL článkem (viz obr. 9-33) ? Vysvětlete pomocí kmitočtové charakteristiky RL článku.
- 9-29 Jak velkou časovou konstantu $\tau = L/R$ musíme volit v PŘ. 9-8, aby výstupní signál u_2 byl přibližně obdélníkový ? V čem by se pak lišily u_1 a u_2 a proč ?

Příklady k procvičení

9-18



Na vstupu RC článku působí dva harmonické průběhy $u_a(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 10000t)$ V

$$u_b(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 100t + 45^\circ)$$
 V.

Vypočtete metodou Fourierovy řady spektrum a časový průběh výstupního napětí. Nakreslete !
Výsledek :

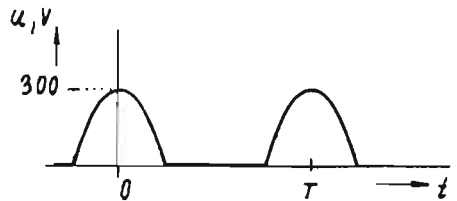
$$u_2(t) = 0,08 \cos(2\pi \cdot 10000t - 89^\circ) + 4,23 \cos(2\pi \cdot 100t - 32^\circ)$$
 V.

- 9-19 Napětí $u(t)$ na obrázku působí na sériový RL článek, $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ H}$. Nakreslete spektrum $u(t)$ a $u_R(t)$, je-li $F = 1/T = 60 \text{ Hz}$.

Pomůcka : Fourierova řada pro $u(t)$

$$u(t) = \frac{300}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \Omega t + \frac{2}{3} \cos 2\Omega t - \frac{2}{15} \cos 4\Omega t + \frac{2}{35} \cos 6\Omega t - \dots \right\} \text{ V.}$$

$$\text{Výsledek : } u_R(t) = 95,5 + 70,4 \cos(\Omega t - 62^\circ) + 16,4 \cos(2\Omega t - 75,1^\circ) - 1,67 \cos(4\Omega t - 82,45^\circ) + 0,483 \cos(6\Omega t - 84,92^\circ) - \dots \text{ V.}$$

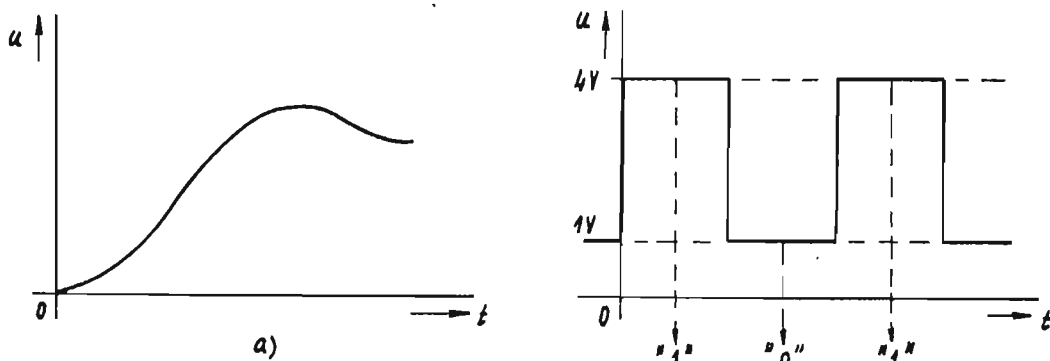


10 ČÍSLICOVÉ OBVODY A SIGNÁLY

Fyzikální veličinu, pomocí které lze přenášet nebo uchovávat informaci, nazýváme signál. V elektrotechnice pracujeme s různými signály. Tyto signály jsou v krajním případě buď

- a) spojité (analogové) nebo
- b) nespojité.

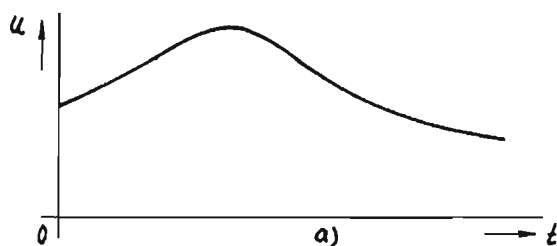
Na obr. 10-1b je nespojitý signál, který může nabývat dvou úrovní. Nižší úroveň je označena symbolem "0", vyšší úroveň symbolem "1". Tento nespojitý signál lze



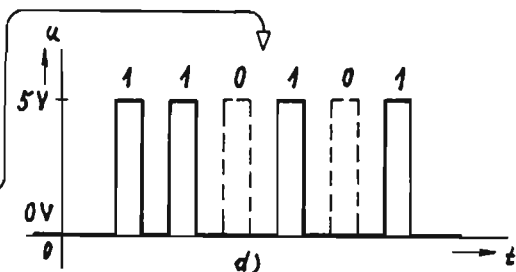
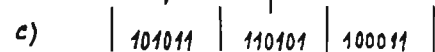
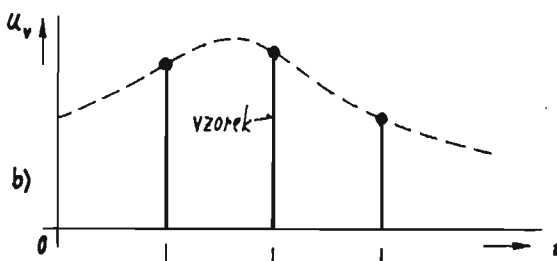
Obr. 10-1 a) Spojitý průběh signálu, b) nespojitý průběh signálu

proto popsat posloupností nul a jedniček a používá se v tzv. číslicových obvodech.

Je-li to pro zpracování signálu nebo jeho přenos výhodné, převádíme spojité signály na nespojité. Na obr. 10-2 jsou ukázány různé formy jednoho signálu. Původním signálem je signál spojitý (obr. 10-2a). Jestliže z tohoto signálu vybereme



pouze hodnoty v určitých oddělených (diskrétních) okamžicích (obr. 10-2b), získáme signál vzorkovaný (diskrétní). Vyjádříme-li každý vzorek v dvojkové číselné soustavě, získáme posloupnost dvojkových čísel. Posloupnosti dvojkových čísel říkáme číslíkový signál (obr. 10-2c). Tuto posloupnost fyzikálně realizujeme nespojitým signálem



Obr. 10-2 Různé druhy signálů

(obr. 10-2d). S tímto signálem pracují číslicové logické obvody anebo jej můžeme zpracovávat na číslicových počítačích.

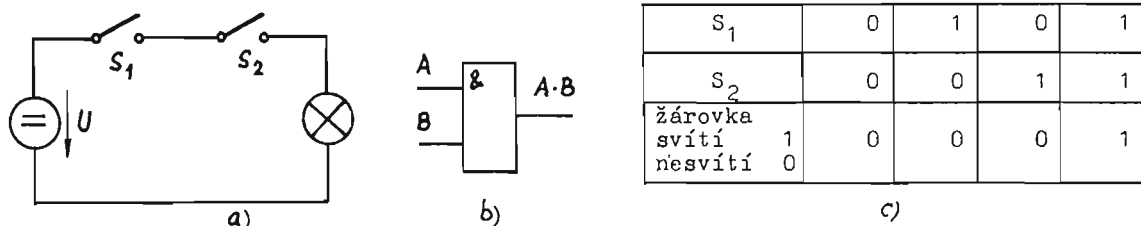
Číslicové signály mají oproti spojitým signálům výhodu v tom, že jsou odolné proti působení šumů a poruch. Z toho důvodu se číslicové signály často používají v telekomunikacích a v řídicích obvodech.

Vidíme, že číslicové (logické) obvody pracují s nespojitými signály o dvou úrovních (hladinách). Operace prováděné pouze mezi dvěma hladinami (žárovka svítí nebo nesvítí) můžeme popsat pomocí dvojkové číselné soustavy a matematické logiky. Získanou matematickou závislost nazýváme "logickou funkcí" a elektrickou soustavu, která tuto funkci realizuje "logickým obvodem".

10.1 ZÁKLADNÍ LOGICKÉ FUNKCE

Základní logické funkce jsou AND a OR a jejich invertované (negované) funkce NAND a NOR.

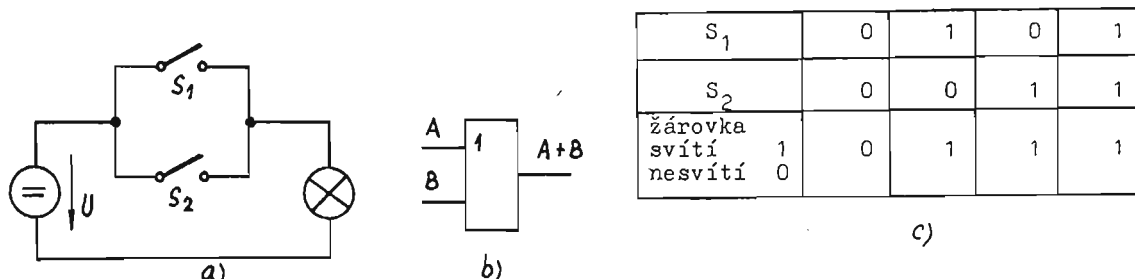
Funkce AND - logický součin



Obr. 10-3 Znázornění funkce AND : a) ekvivalentní obvod, b) schématická značka logického členu AND, c) tabulka možných kombinací (0 - vypínač rozepnut, 1 - vypínač sepnut)

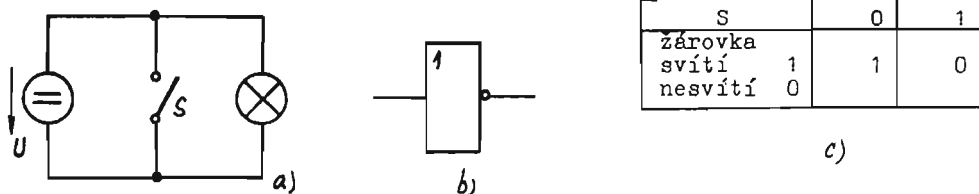
Žárovka svítí jen tehdy, jsou-li oba vypínače sepnuty.

Funkce OR - logický součet



Obr. 10-4 Znázornění funkce OR : a) ekvivalentní obvod, b) schématická značka logického členu OR, c) tabulka možných kombinací

Žárovka svítí, je-li alespoň jeden vypínač sepnut.



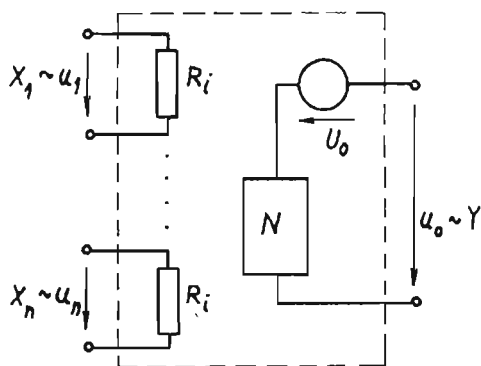
Obr. 10-5 Znázornění funkce NOT : a) ekvivalentní obvod, b) schématická značka logického členu NOT (invertoru), c) tabulka možných kombinací

Na výstupu invertoru je signál opačného stavu než na vstupu.

10.2 REALIZACE ČÍSLICOVÝCH (LOGICKÝCH) OBVODŮ

Základní logické funkce realizujeme logickými členy. Logický člen je nelineární elektronický obvod, který modeluje základní logickou funkci (základní logickou operaci). Dříve se logické členy realizovaly pomocí diod (diodová logika), později pomocí tranzistorů (tranzistorová logika).

Logický člen má jednu nebo více vstupních svorek (bran) a jednu výstupní svorku (bránu). Stav vstupní nebo výstupní brány (0 nebo 1) je dán úrovní napětí na těchto svorkách. Obecné znázornění napěťového logického členu je ukázáno na obr. 10-6. Obvod N je vytvořen ze spínacích prvků (diody, tranzistory apod.), které realizují požadovanou logickou funkci.



Obr. 10-6 Princip napěťového logického členu

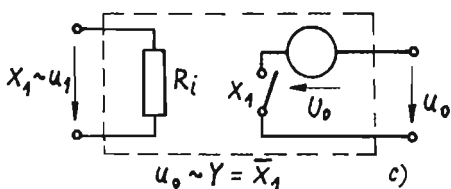
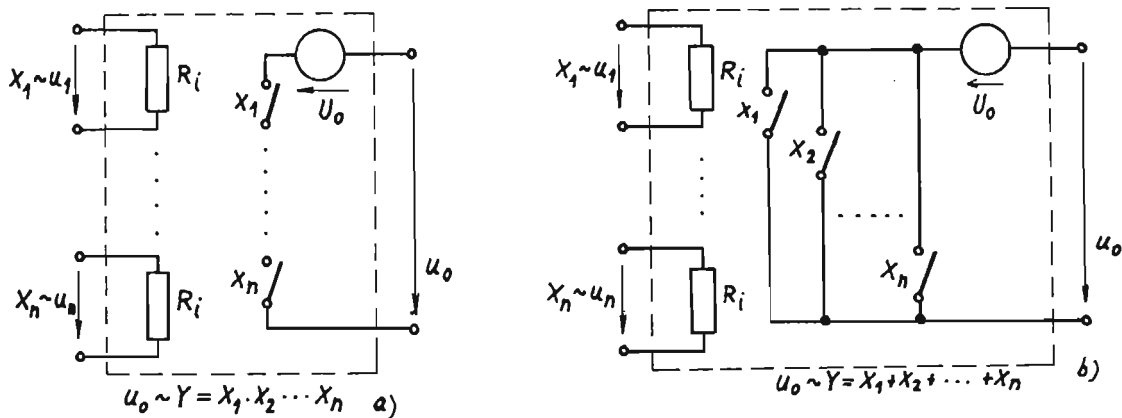
Ideální spínací prvek představuje v sepnutém stavu odpor $R \rightarrow 0$ a v rozepnutém stavu odpor $R \rightarrow \infty$.

V praxi se používají elektronické logické členy, které realizují základní logické operace AND, OR, NAND, NOR. Principy logických členů AND, OR a invertoru jsou ukázány na obr. 10-7. Tyto členy mohou být realizovány z diskretních součástek nebo jako integrované obvody. Pro jednoduché nenáročné aplikace můžeme logické členy sestavit pomocí diod. Převážně se však v praxi používají integrované logické obvody TTL s tranzistorovou logikou.

Základním logickým členem je zde člen NAND. Kombinací základních používaných logických členů je možno vytvořit libovolnou složitou logickou funkci.

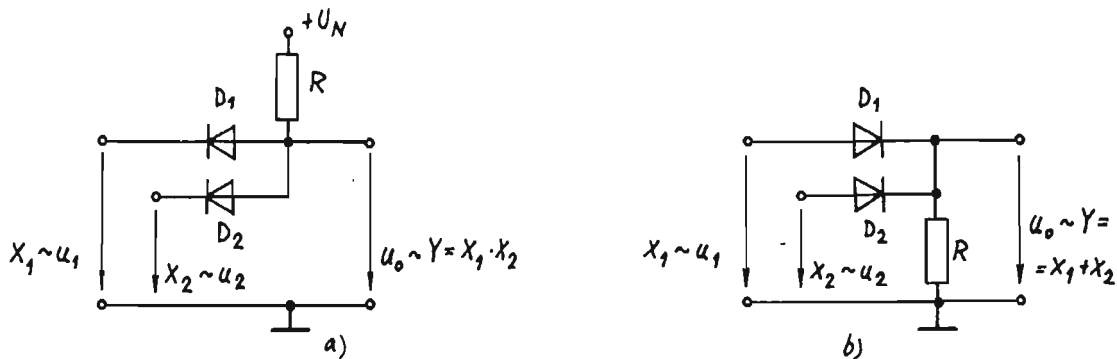
Diodové logické členy

Pomocí diod je možno jednoduše vytvořit součtový a součinnový logický člen (viz obr. 10-8). Tyto logické členy nedávají ještě úplný soubor logických členů. K doplnění úplného souboru je třeba ještě invertoru. Invertor nelze pomocí diodové logiky realizovat.



Obr. 10-7 Základní logické členy :
 a) logický součin, b) logický součet, c) negace; spínače jsou při $X=1$ sepnuty (a), b)), resp. rozepnuty (c)).

Součinnový logický člen je napájen z napěťového zdroje o napětí U_N . Je-li na některém vstupu X_1 nebo X_2 napětí malé hodnoty (menší než U_N), je příslušná dioda otevřena a představuje zkrat, takže výstupní napětí u_0 je malé ($Y=0$). Pouze v případě, že obě vstupní napětí jsou velká (větší než U_N), jsou obě diody zavřeny a $u_0 = U_N$ ($Y=1$). Proto se jedná o logický součin.



Obr. 10-8 a) Součinnový logický člen, b) součtový logický člen

Součtový logický člen je napájen pouze vstupními signály u_1 a u_2 . Výstupní napětí má úroveň 1 tehdy, když alespoň jedna z diod je otevřena, tzn. když alespoň jedno ze vstupních napětí má úroveň 1. Proto se jedná o logický součet.

Integrované logické členy

V současné době se logické členy vyrábějí v integrované podobě. K realizaci logického součinu se používá např. tranzistoru s více emitory (obvody typu TTL). K rozšířeným typům integrovaných logických obvodů patří obvod řady 7400, který obsahuje čtyři hradla typu NAND. Ze základních logických členů sestavuje výrobce složitější

logické obvody, které pak nabízí jako soubor číslicových integrovaných obvodů.

Otázky k samostatnému studiu

- 10-1 Vysvětlete pojmy : spojitý signál, nespojitý signál, vzorkovaný signál a číslicový signál.
- 10-2 Vysvětlete podstatu základních logických funkcí.
- 10-3 Vysvětlete, jakými obvodovými prvky mohou být číslicové obvody realizovány.
- 10-4 Popište funkci diodového logického součtového a součinnového obvodu.